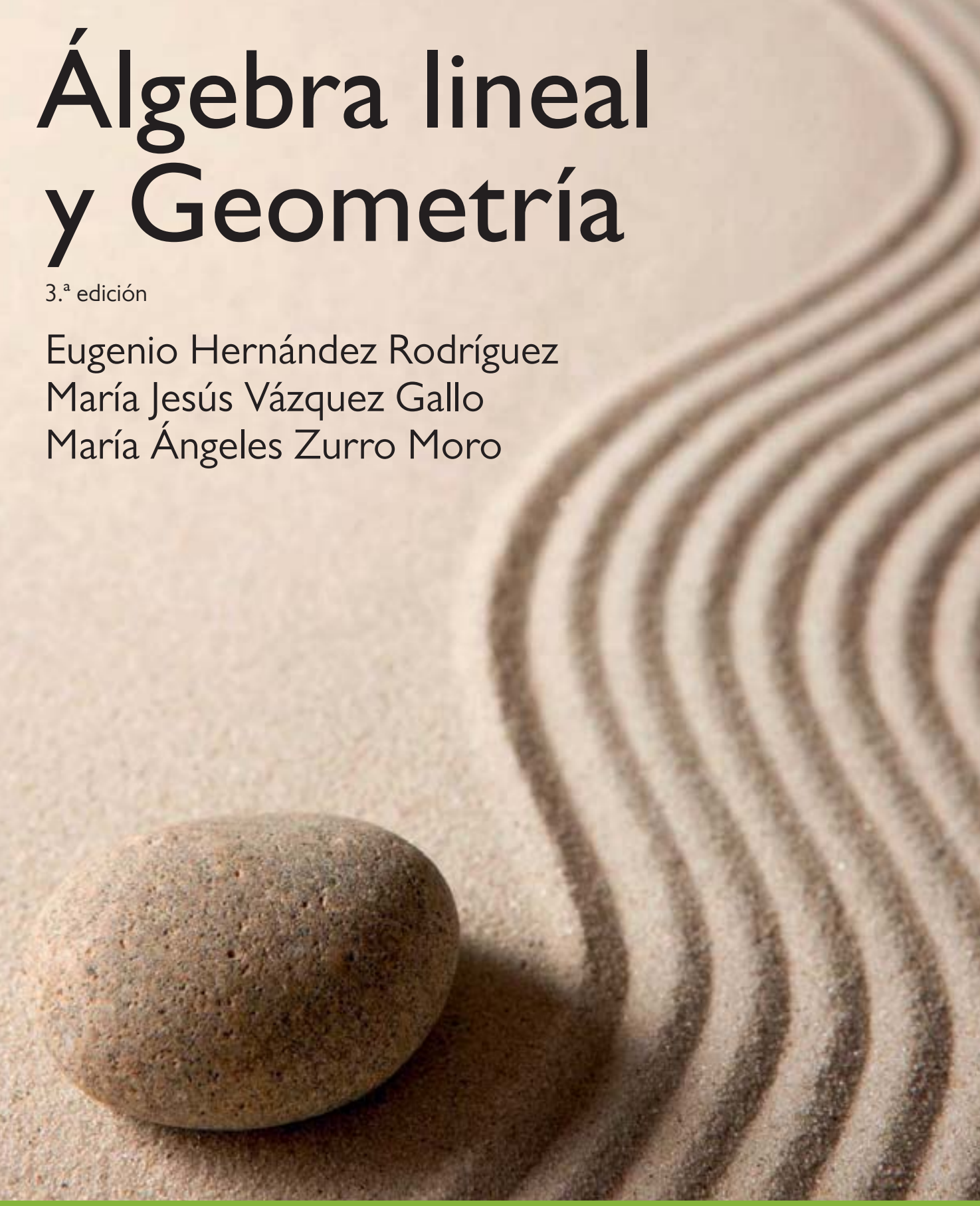
Álgebra lineal y Geometría

3.ª edición

Eugenio Hernández Rodríguez
María Jesús Vázquez Gallo
María Ángeles Zurro Moro



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Álgebra lineal y Geometría

3.ª edición

Eugenio Hernández Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

María Jesús Vázquez Gallo
Departamento de Ingeniería Civil: Servicios Urbanos
Unidad Docente de Matemáticas
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica de Obras Públicas
Universidad Politécnica de Madrid

María Ángeles Zurro Moro
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Álgebra lineal y Geometría, 3.ª edición
Eugenio Hernández Rodríguez, María Jesús Vázquez Gallo, María Ángeles Zurro Moro

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2012

ISBN: 978-84-7829-129-8

Materia: 512. Álgebra

Formato: 195 × 250 mm Páginas: 712

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o trasformación de esta obra solo puede ser utilizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código penal).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos - www.cedro.org), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Todos los derechos reservados.

© 2012 PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
C/ Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

ISBN: 978-84-7829-129-8
Depósito legal: M-10289-2012

Equipo de Edición:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Esther Martín

Equipo de Diseño:
Diseñadora senior: Elena Jaramillo
Técnico de diseño: Irene Medina

Equipo de Producción:
Directora: Marta Illescas
Coordinadora: Tini Cardoso

Diseño de cubierta: Copibook, S.L.
Composición: Copibook, S.L.
Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: este libro incluye enlaces a sitios web cuya gestión, mantenimiento y control son responsabilidad única y exclusiva de terceros ajenos a PEARSON EDUCACIÓN, S.A. Los enlaces u otras referencias a sitios web se incluyen con finalidad estrictamente informativa y se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas. Los enlaces no implican el aval de PEARSON EDUCACIÓN S.A a tales sitios, páginas web, funcionalidades y sus respectivos contenidos o cualquier asociación con sus administradores. En consecuencia, PEARSON EDUCACIÓN S.A., no asume responsabilidad alguna por los daños que se puedan derivar de hipotéticas infracciones de los derechos de propiedad intelectual y/o industrial que puedan contener dichos sitios web ni por las pérdidas, delitos o los daños y perjuicios derivados, directa o indirectamente, del uso de tales sitios web y de su información. Al acceder a tales enlaces externos de los sitios web, el usuario estará bajo la protección de datos y políticas de privacidad o prácticas y otros contenidos de tales sitios web y no de PEARSON EDUCACIÓN S.A.

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Para Sonia y Marlit.

Para Bruno y Anais.

Para María Victoria y Sofía.

Índice

Prólogo (a la primera edición) xi
Prólogo (a la tercera edición) xiii

Capítulo 1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Operaciones con matrices 1

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: método de eliminación de Gauss-Jordan .. 3
1.2. Rango de una matriz. Estructura de las soluciones de un sistema 13
1.3. Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y operaciones con matrices 25
1.4. Inversa de una aplicación e inversa de una matriz 39

Capítulo 2. Determinantes y sus aplicaciones 51

2.1. Determinantes de matrices de orden 2 y de orden 3 52
2.2. Definición general de determinante. Propiedades 60
2.3. Determinante de un producto de matrices. Cálculo de determinantes de orden n 78
2.4. Inversa de una matriz. Regla de Cramer 89
2.5. Rango de una matriz. Resolución de sistemas compatibles e indeterminados 96
2.6. La factorización *LU*. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 106
2.7. Determinantes y permutaciones 114

Capítulo 3. Los números complejos 121

3.1. Los números complejos y sus propiedades 122
3.2. Formas trigonométrica y polar de un número complejo 127
3.3. Raíces de números complejos 131
3.4. Resolución de ecuaciones algebraicas 135
3.5. Ejercicios de álgebra lineal con números complejos 139

Capítulo 4. Espacios vectoriales 143

4.1. Definición de espacio vectorial. Ejemplos 144

4.2. Base y dimensión de un espacio vectorial 148
4.3. Cambio de base 156
4.4. Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios vectoriales 162
4.5. El espacio vectorial cociente 169

Capítulo 5. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales 177

5.1. Definición de aplicación lineal. Ejemplos 178
5.2. Matriz de una aplicación lineal. Operaciones con aplicaciones lineales 182
5.3. Aplicaciones lineales y cambio de base 189
5.4. Aplicaciones lineales inyectivas y suprayectivas. Núcleo y rango de una aplicación lineal 195
5.5. El espacio dual de un espacio vectorial 204

Capítulo 6. Valores y vectores propios. Forma de Jordan 207

6.1. Introducción 208
6.2. Subespacios invariantes. Valores y vectores propios de una aplicación lineal 209
6.3. Forma de Jordan de matrices de orden 2 222
6.4. Ejemplos de formas de Jordan de matrices de orden 3 231
6.5. El polinomio característico 238
6.6. Aplicaciones lineales y subespacios invariantes 248
6.7. El Teorema de Jordan 253
6.8. Obtención de la forma de Jordan compleja de una matriz 265
6.9. Forma de Jordan real de matrices reales con autovalores complejos 275

Ejercicios de repaso: Capítulos 1 a 6 285

Capítulo 7. La geometría del plano y del espacio 291

7.1. Rectas en un plano 293
7.2. Rectas y planos en el espacio 303
7.3. Distancias y ángulos. Producto escalar 315
7.4. Figuras sencillas en el plano y en el espacio: sus ecuaciones 328
7.5. Áreas y volúmenes. Producto vectorial 338

Capítulo 8. Espacios euclídeos 353

8.1. Espacios euclídeos. Longitudes, áreas y ortogonalidad 354
8.2. Bases ortonormales en un espacio euclídeo 361
8.3. Complemento ortogonal. Proyecciones 366
8.4. Adjunta de una aplicación. Aplicaciones autoadjuntas 377
8.5. Aplicaciones ortogonales 383
8.6. Clasificación de aplicaciones ortogonales 390
8.7. Estructura de las aplicaciones lineales no singulares 399
8.8. Descomposición en valores singulares de una matriz 402

Capítulo 9. Espacios hermíticos 415

9.1. Producto hermítico 416
9.2. Aplicaciones entre espacios hermíticos 420

Capítulo 10. Movimientos en un espacio afín euclídeo. Movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 429

10.1. Espacio afín. Variedades lineales 430
10.2. Transformaciones afines. Ejemplos 437
10.3. Espacio afín euclídeo. Movimientos 441
10.4. Estudio geométrico de los movimientos en el plano 446
10.5. Estudio analítico de los movimientos en $\mathbb{R}^2$ 453
10.6. Descripción geométrica de los movimientos en el espacio 466
10.7. Clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^3$ 477
10.8. Ecuaciones de los movimientos en $\mathbb{R}^3$ 490
10.9. Movimientos en $\mathbb{R}^3$ y puntos fijos 496

Capítulo 11. Secciones cónicas 509

11.1. Definiciones 510
11.2. La circunferencia y alguna de sus propiedades 511
11.3. La elipse y la hipérbola 513
11.4. Nueva definición de las secciones cónicas: la elipse, la hipérbola y la parábola 518
11.5. Ecuaciones de las cónicas 525
11.6. Determinación de las cónicas 532
11.7. Determinación del tipo de una cónica 534
11.8. Invariantes de las cónicas y reducción a su forma canónica 544
11.9. Determinación del centro y de los ejes principales de una cónica con centro 550
11.10. Determinación del vértice y del eje de una parábola 553
11.11. Haces de cónicas 556

Capítulo 12. Formas bilineales y cuadráticas 565

12.1. Formas bilineales y cuadráticas 566
12.2. Formas bilineales y cuadráticas en un espacio euclídeo 571
12.3. Ley de inercia de las formas cuadráticas 574
12.4. Formas cuadráticas definidas. Puntos críticos de funciones de varias variables 576
12.5. Diagonalización simultánea de formas cuadráticas 582

Capítulo 13. Superficies de segundo grado 591

13.1. Clasificación de las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$ 592
13.2. Invariantes de las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$ 603
13.3. Determinación de los elementos geométricos de algunas cuádricas 609
13.4. Clasificación de las cuádricas según sus invariantes 614
13.5. Notas adicionales 624
1. El hiperboloide de una hoja como superficie reglada 624
2. La regla de los signos de Descartes para polinomios de grado 3 626
3. Demostración del Teorema 13.4.1 630

Ejercicios de repaso: Capítulos 7 a 13 635
Soluciones 643
Referencias 679
Índice alfabético 681
Tablas 689

Prólogo (a la primera edición)

La Matemática no es un deporte para espectadores; el lector debe acercarse a este texto con un lapicero en su mano y un papel a su lado para verificar con sus propios razonamientos y su espíritu crítico las afirmaciones que contiene.

De la misma manera que lograr un nivel adecuado en el juego del tenis requiere tiempo y práctica, y conseguir tocar una pieza de música clásica requiere esfuerzo, recompensado por la belleza que su música proporciona, la matemática es una ciencia cuyo aprendizaje requiere esfuerzo y práctica y cuya recompensa se alcanza por la elegancia con la que permite resolver problemas propios y de otras Ciencias.

Esperamos que el lector se esfuerce en comprender los conceptos y resultados que se exponen en este libro, porque ellos son la base para poder apreciar posteriormente varias de las aportaciones que la Ciencia ha dado a la humanidad a través de los tiempos y, de manera especial, en el siglo XX.

Este libro ha surgido de las clases de Álgebra y Geometría impartidas durante varios años a los alumnos de primer curso de las licenciaturas de Ciencias Físicas y Ciencias Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid. Ha crecido con la colaboración de varios colegas del Departamento de Matemáticas de esta universidad; unos, aportando soluciones para la mejor exposición de algunas lecciones; otros, mejorando ideas ya plasmadas en papel; otros, finalmente, corrigiendo varias versiones del manuscrito. A todos ellos agradezco su desinteresada aportación en la elaboración de este libro.

En él se ha pretendido seguir un esquema que permita al lector adivinar los resultados e intuir su demostración: para ello, se dan varios ejemplos antes de enunciar un resultado y aportar las razones convincentes que lo demuestran. Estas razones son puramente geométricas cuando ha sido posible, como en la demostración de las propiedades de las secciones cónicas (Capítulo 11) o en la clasificación de los movimientos en el plano (Capítulo 10).

Se dan ejemplos de aplicaciones en varias ocasiones después de haber concluido la demostración de un resultado importante. Con todo ello, se intenta lograr una participación activa del lector en el descubrimiento de las ideas principales de cada capítulo, a la vez que se le brinda la oportunidad de ir comprobando su nivel de conocimientos.

Este nivel de conocimientos puede comprobarse también intentando solucionar los numerosos problemas que se proponen al final de casi todas las secciones y los que, a modo de repaso, se incluyen después de los Capítulos 6 y 13. El completo aprendizaje de las teorías matemáticas se consigue después de haber resuelto numerosos ejercicios. El lector debe intentar resolverlos todos, con la seguridad de que estos intentos, aunque sean fallidos, le proporcionarán grandes beneficios.

De muchos de los problemas se incluyen los resultados al final del libro. La elaboración de estos resultados ha contado con la participación de varios ayudantes del departamento de Matemáticas, a quienes también agradezco su contribución.

Las Rozas de Madrid
Agosto de 1987

Prólogo (a la tercera edición)

Esta tercera edición surge de la propuesta de Pearson Educación de hacer una revisión del libro *Álgebra y Geometría* que publicó por primera vez en 1987 la Universidad Autónoma de Madrid en su Colección de Estudios y fue luego reimpresa en 1994 en la colección de libros de texto que pusieron en marcha la editorial Addison-Wesley Iberoamericana y la Universidad Autónoma de Madrid. Se ha aprovechado la experiencia educativa de los autores acumulada durante los últimos años para mejorar la presentación de algunos temas y añadir otros que se han considerado relevantes.

La obra ha pasado a llamarse *Álgebra lineal y Geometría*, reordenando los capítulos para poner juntos los que pertenecen al Álgebra lineal (Capítulos 1 a 6) y dejar para el final los que tratan de Geometría (Capítulos 7 a 13). El primer grupo de ejercicios de repaso, que en la segunda edición estaban después del capítulo 7, se incluyen ahora después del capítulo 6, al finalizar los temas propios de Álgebra lineal.

Tanto en las secciones remodeladas, como en las nuevas, se ha seguido el mismo esquema de presentación que impregnaba las dos ediciones anteriores: numerosos ejemplos ayudan a conjeturar resultados y allanan el camino de su demostración. El lector encontrará también muchos ejemplos para evaluar sus conocimientos sobre las teorías desarrolladas. Asimismo, en los capítulos dedicados a la Geometría se ha reforzado la presentación puramente geométrica, cuando ello no ha requerido alargarla en exceso.

En el Capítulo 2 se incluye la factorización LU de una matriz y se explica como usarla para resolver sistemas de ecuaciones lineales de gran tamaño. En el Capítulo 4 se ha incluido una sección detallada sobre el espacio vectorial cociente. En el Capítulo 5 se ha remodelado la sección de espacio dual de un espacio vectorial.

Una mayor reestructuración ha tenido lugar en el Capítulo 6; manteniendo todos los ejemplos, la presentación de la forma de Jordan de una matriz se hace utilizando como base el polinomio característico de la matriz. Esperamos que esta nueva presentación sea del agrado del lector.

En el Capítulo 8, dedicado al estudio de los espacios euclídeos y sus transformaciones, se ha añadido una sección dedicada a la descomposición de una matriz en valores singulares. Hoy en

día estas técnicas son utilizadas en dominios tan diversos como la compresión de imágenes, la recuperación de información e incluso en el análisis de la expresión de genes interactuando con diversas técnicas estadísticas.

La segunda edición contenía un estudio geométrico de los movimientos en el plano y un estudio analítico de estos y de los correspondientes en el espacio. Se ha añadido en el capítulo 10 un teorema de estructura de los movimientos en el espacio, para completar una visión más geométrica de estos movimientos.

Los capítulos 11 y 13, que tratan de las secciones cónicas y de las superficies de segundo grado respectivamente, han sido revisados añadiendo ejemplos y mejorando las figuras, además de mejorar la presentación de su clasificación.

La implantación de los nuevos planes de estudio en las universidades europeas ha puesto énfasis en la necesidad de una participación activa y continua del estudiante en el proceso de aprendizaje. La estructura de este libro, con numerosos ejemplos previos y posteriores a los desarrollos teóricos, así como la gran cantidad de ejercicios que se proponen al final de cada sección y los que se añaden como ejercicios de repaso, se adapta perfectamente a este nuevo paradigma del aprendizaje. Esperamos que esta tercera edición tenga tan buena acogida como la han tenido las ediciones anteriores.

Cantoblanco, Madrid
Marzo de 2012

EUGENIO HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ
MARÍA JESÚS VÁZQUEZ GALLO
MARÍA ÁNGELES ZURRO MORO

Las autoras quisieran explícitamente agradecer al profesor Eugenio Hernández su invitación a colaborar en la nueva edición de este libro.

MARÍA JESÚS VÁZQUEZ GALLO
MARÍA ÁNGELES ZURRO MORO

Capítulo 1

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Operaciones con matrices.

1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: método de eliminación de Gauss-Jordan.

1.2. Rango de una matriz. Estructura de las soluciones de un sistema.

1.3. Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y operaciones con matrices.

1.4. Inversa de una aplicación e inversa de una matriz.

Introducción

Este capítulo está dedicado a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; el problema geométrico más sencillo en el cual surge la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales es el de conocer la intersección de dos rectas en el plano. Así, por ejemplo, los números que satisfacen el sistema

$$\left.\begin{array}{r} +y=2 \\ 3\ -y=2 \end{array}\right\}$$

determinan el punto de intersección de las rectas $+y=2$ y $3\ -y=2$, representadas en la figura 1.1.

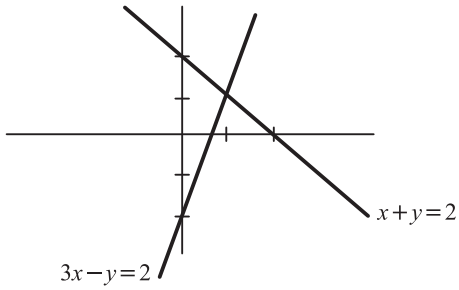


Figura 1.1

Es posible que el lector esté familiarizado con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales como el anterior utilizando uno de los siguientes métodos:

1) *to o e elimina i n*, que consiste en realizar «operaciones» con las ecuaciones dadas hasta eliminar una de las incógnitas.
2) *to o e tit i n*, que consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.
3) *to o e ramer o e lo eterminante* , que consiste en encontrar las soluciones del sistema anterior como un cociente de dos determinantes.

De todos estos métodos el que resulta menos engorroso cuando se trata de resolver sistemas de un gran número de incógnitas es el método de *elimina i n*, que recibe el nombre de *m to o e elimina i n e Ga or an.*

Comenzaremos exponiendo este método seguidamente.

1.1. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

EJEMPLO A. Tratemos de resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas; una solución de este sistema es un par de números reales (a, b) que satisface las dos ecuaciones simultáneamente. El primer paso es multiplicar por 3 la primera ecuación y restarla de la segunda para obtener el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ -4y &= -4 \end{aligned}\right\}.$$

A continuación dividimos entre -4 (o bien multiplicamos por $-1/4$) la segunda ecuación para obtener el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

que nos permite obtener fácilmente el par de números reales (1, 1), que es solución del sistema dado.

Nota. Observar que $x = 1, y = 1$ satisfacen ambas ecuaciones; el lector puede comprobar siempre que el resultado obtenido es correcto sustituyendo los valores encontrados en el sistema dado.

EJEMPLO B. Tratemos de resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Comenzamos eliminando x_1 de las ecuaciones segunda y tercera; esto se consigue multiplicando por 3 la primera ecuación y restándola de la segunda y multiplicando por 2 la primera ecuación y restándola de la tercera. Realizando estas operaciones, el sistema anterior se transforma en

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -3 \\ x_3 &= 2 \\ -7x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned}\right\}.$$

Intercambiando las ecuaciones segunda y tercera se obtiene:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 + 3x_2 + x_3 = & -3 \\ -7x_2 - x_3 = & 12 \\ x_3 = & 2 \end{array}\right\}.$$

A continuación, eliminamos x_3 de la primera y la segunda de las ecuaciones restando la tercera de la primera y sumando la tercera y la segunda. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 + 3x_2 = & -5 \\ -7x_2 = & 14 \\ x_3 = & 2 \end{array}\right\}.$$

Multiplicando por $-1/7$ la segunda ecuación se obtiene:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 + 3x_2 = & -5 \\ x_2 = & -2 \\ x_3 = & 2 \end{array}\right\}.$$

Finalmente, eliminamos x_2 de la primera ecuación multiplicando por 3 la segunda y restándola de la primera; obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 = & 1 \\ x_2 = & -2 \\ x_3 = & 2 \end{array}\right\}$$

que nos da la solución $(1, -2, 2)$ del sistema.

Comprobación. $1 - 6 + 2 = -3$; $3 - 18 + 8 = -7$; $2 + 2 + 2 = 6$.

* * *

El lector se preguntará por qué el método utilizado produce la solución del sistema. La respuesta es que las «operaciones» realizadas con las ecuaciones transforman un sistema en otro *equivalente*, es decir, que tiene las mismas soluciones. Recapitulemos las operaciones realizadas en los ejemplos anteriores que, de ahora en adelante, serán llamadas *operaciones elementales*:

i) Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
ii) Intercambiar dos ecuaciones.
iii) Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.

No resulta complicado comprobar que las operaciones elementales transforman un sistema en otro equivalente. Por ejemplo, si $(a, b, \ )$ es solución de $x_1 + 3x_2 + x_3 = -3$, también es solución de $3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -9$, ya que

$$3a + 9b + 3\ = 3(a + 3b + \ ) = 3(-3) = -9.$$

De manera similar, si $(a, b, \ )$ es también solución de $3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -7$, cinco veces la ecuación $x_1 + 3x_2 + x_3 = -3$ más la ecuación $3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -7$ nos da

$$8x_1 + 24x_2 + 9x_3 = -22$$

que tiene $(a, b, \ )$ como solución, ya que

$$8a + 24b + 9\ = (5a + 15b + 5\ ) + (3a + 9b + 4\ ) = 5(-3) - 7 = -22.$$

Resumiendo, podemos decir que el método de *elimina i n e Ga or an* consiste en reducir un sistema dado a otro equivalente, más sencillo, mediante operaciones elementales.

Puede observarse que la repetición de las incógnitas y de los signos + en los ejemplos anteriores es innecesaria. Si eliminamos estos símbolos en el ejemplo B, el sistema queda reducido a la siguiente ordenación rectangular, que llamaremos *matri* :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de *matri e lo oe i iente el i tema* y la matriz anterior recibe el nombre de *matri am lia a el i tema*. En ésta, la línea vertical separa la matriz de los coeficientes de los términos independientes.

Utilizando la matriz ampliada del sistema e indicando con *i*), *ii*) o *iii*) las operaciones elementales que se realizan sobre las filas de la matriz, de acuerdo con las operaciones elementales que se realizan sobre las ecuaciones, el ejemplo B puede resumirse de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[{}_{2}-3\,{}_{1} \\ {}_{3}-2\,{}_{1}]{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{ii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[{}_{2}+\,{}_{3}]{iii)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{7}\,{}_{2}]{i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[{}_{1}-3\,{}_{2}]{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

La última matriz es la matriz del sistema

$$\left.\begin{array}{l} {}_{1} = 1 \\ {}_{2} = -2 \\ {}_{3} = 2 \end{array}\right\}$$

que nos da las soluciones.

EJEMPLO C. Para resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrl} {}_{1} + 3\,{}_{2} - & {}_{3} + & {}_{4} & = & 1 \\ -2\,{}_{1} + & {}_{2} + 2\,{}_{3} & & = & 7 \\ & {}_{2} & - \; {}_{4} & = & 0 \end{array}\right\}$$

de tres ecuaciones con cuatro incógnitas escribimos la matriz del sistema y la reducimos a una forma más sencilla mediante operaciones elementales. El lector no tendrá dificultad en seguir los pasos realizados.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[{}_2+2\ {}_1]{iii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{ii)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[{}_3-7\ {}_2]{iii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{9}\ {}_3]{i)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{{}_2+\ {}_3 \\ {}_1-\ {}_3}]{iii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[{}_1-3\ {}_2]{iii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Esta última matriz corresponde al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} {}_1 \quad - \quad {}_3 & = & -3 \\ {}_2 & = & 1 \\ {}_4 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Claramente ${}_2 = 1$ y ${}_4 = 1$, pero de la primera ecuación no pueden determinarse de manera única ${}_1$ y ${}_3$; simplemente, dando un valor, , a ${}_3$ se obtiene un valor ${}_1 = -3 +$ para ${}_1$ y las soluciones del sistema son:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1 = -3 + \\ {}_2 = 1 \\ {}_3 = \\ {}_4 = 1 \end{array}\right\}$$

o bien $(-3 + , 1, , 1)$, para todo número real . Este sistema tiene *in inita* soluciones que se obtienen dando valores a . ¡Realizar la comprobación!

* * *

Las dos matrices finales de los ejemplos B y C pueden escribirse de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Estas dos matrices tienen en común que por ellas puede trazarse una «escalera descendente» tal que:

1) Cada peldaño tiene altura uno.
2) Debajo de la escalera todos los elementos de la matriz son cero.
3) En cada esquina de un peldaño aparece el número 1.
4) Toda columna que contiene un 1 en una esquina de un peldaño tiene todos los demás elementos nulos.

Toda matriz que posee estas propiedades será denominada una *matri e alona a re i a.* El *m to o e elimina i n e Ga or an* consiste entonces en reducir la matriz de un sistema dado a una matriz escalonada reducida mediante operaciones elementales.

EJEMPLO D. Para resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

escribimos su matriz ampliada y la transformamos mediante operaciones elementales hasta reducirla a una matriz escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1}]{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1+F_2]{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1-\frac{1}{3}F_3 \\ F_2+\frac{2}{3}F_3}]{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right).$$

Esta última matriz corresponde al sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + (2/3)\,x_3 &= 0 \\ x_2 - (1/3)\,x_3 &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

que, obviamente, *no tiene solución*, ya que $0 \neq 1$.

* * *

Observación. El proceso que se ha seguido al aplicar a un sistema particular el método de eliminación de Gauss-Jordan no es único, como el lector habrá podido comprobar si ha intentado realizar por su cuenta alguno de los ejemplos C o D. Sin embargo, la matriz escalonada reducida de un sistema dado es única. La demostración completa de este resultado no es sencilla.

* * *

A continuación damos algunas definiciones relativas a los sistemas hasta ahora estudiados. Una expresión de la forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

donde los a_i son números reales, se denomina un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y coeficientes reales*. Una solución de (1.1) son n números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que al sustituir x_i por x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene una igualdad en todas las ecuaciones del sistema.

Si el sistema posee al menos una solución se dice que es *om atible* y si no posee ninguna solución se dice que es *in om atible*; si un sistema es compatible y tiene una única solución se dice que es *etermina o* y si tiene más de una solución se dice que es *in etermina o*.

Los sistemas de los ejemplos A, B y C son compatibles, mientras que el del ejemplo D es incompatible. En los casos de compatibilidad, el del ejemplo C es indeterminado y los sistemas de los ejemplos A y B son determinados.

Los distintos casos que pueden presentarse en un sistema quedan caracterizados por la matriz escalonada reducida que se obtiene en cada sistema. Recordemos que

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina la *matri e lo oe i iente el i tema*, y

$$- = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

es la *matri am lia a el i tema*. Las matrices escalonadas reducidas de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada de los sistemas de los ejemplos B, C y D se muestran en el siguiente cuadro.

	Matriz escalonada reducida de la matriz de los coeficientes	**Matriz escalonada reducida de la matriz ampliada**
Ejemplo B	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$
Ejemplo C	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$
Ejemplo D	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Si convenimos en escribir:

$= $ número de peldaños de una matriz escalonada reducida de $\_$,
$\bar{} = $ número de peldaños de una matriz escalonada reducida de $\bar{}$,
$n = $ número de incógnitas del sistema,

las diferencias, en cuanto a soluciones, de los ejemplos anteriores quedan plasmadas en el cuadro siguiente.

		p	$\bar{p}$	n
Ejemplo B	Sistema compatible determinado	3	3	3
Ejemplo C	Sistema compatible indeterminado	3	3	4
Ejemplo D	Sistema incompatible	2	3	3

La observación resumida en este cuadro sugiere el siguiente resultado:

Teorema 1.1.1 (Rouché-Frobenius)

1) Un sistema es *om atible etermina o* si y solo si $= \bar{} = n$.
2) Un sistema es *om atible in etermina o* si y solo si $= \bar{} < n$.
3) Un sistema es *in om atible* si y solo si $< \bar{}$.

Nota. Las definiciones de , $\bar{}$ y n pueden encontrarse entre los dos cuadros anteriores.

Demostración. Observemos en primer lugar que basta demostrar las implicaciones:

a) si $= \bar{} = n$, el sistema es compatible determinado,
b) si $= \bar{} < n$, el sistema es compatible indeterminado,
c) si $< \bar{}$, el sistema es incompatible,

ya que el resto de las implicaciones contenidas en el teorema se deducen de estas tres. Se anima al lector a que compruebe esta última afirmación.

a) Si $= \bar{} = n$, la matriz escalonada reducida $\bar{}$ de este sistema es de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ & 1 & 0 & & 0 & d_2 \\ & & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & 1 & d_n \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{columna } (n+1) \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } n \end{array}$$

Por tanto, $_1 = _1$, $_2 = _2$, ..., $_n = _n$ es su única solución y el sistema es compatible y determinado.

b) Si $= \bar{} < n$, la matriz escalonada $\bar{}$ de este sistema es de la forma

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ & 1 & 0 & & 0 & d_2 \\ & & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ & 0 & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & d_p \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } p \\ \end{array}$$

donde los rectángulos sombreados representan matrices. Si las columnas con 1 en una esquina de un peldaño corresponden a las incógnitas $_{n_1} =$ $_1$, $_{n_2}$, ..., $_n$ se tiene que

$$_{n_1} = \ _1, \ _{n_2} = \ _2, \ ..., \ _n = \ , \qquad = 0, \qquad \neq n_1, n_2, ..., n$$

es una solución del sistema. Por tanto, el sistema es compatible.

Falta demostrar que el sistema es indeterminado. Si todas las matrices sombreadas son nulas, el sistema es equivalente a

$$\left.\begin{array}{ll} _{n_1} = & _1 \\ _{n_2} = & _2 \\ \vdots & \\ _n = & \end{array}\right\}.$$

Puesto que $< n$, alguna incógnita, digamos , no aparece en el sistema anterior y, por tanto, puede tomar cualquier valor, con lo cual se obtienen infinitas soluciones del sistema.

Supongamos, entonces, que no todas las matrices sombreadas son nulas. Sea

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_l \end{pmatrix}$$

una columna no nula de una de estas matrices correspondiente a la incógnita . Dando al resto de las incógnitas distintas de $_n$, $= 1, 2, ...,$, y de , el valor cero, tenemos:

$$_{n_1} + e_1 \ = \ _1; \quad _{n_2} + e_2 \ = \ _2; \quad ...; \quad _{n_l} + e_l \ = \ _l; \quad _{n_{l+1}} = \ _{l+1}; \quad ...; \quad _n =$$

lo cual nos da infinitas soluciones del sistema dando valores a . El sistema, por tanto, es indeterminado.

c) Si $< \bar{}$, la matriz escalonada $\bar{}$ de este sistema es de la forma

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & 0 & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & 1 & & & \leftarrow \text{fila } p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & \vdots & & \end{array}\right)$$

La (+ 1)-ésima fila de $\bar{}$ nos da la ecuación $0 = 1$ y, entonces, el sistema es incompatible. ■

* * *

Finalmente, el sistema (1.1) se dice que es *omog neo* si todos los $b = 0$ y *no omog neo* si al menos uno de los b es distinto de cero.

Al realizar operaciones elementales con la matriz ampliada

$$-=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

de un sistema homogéneo, la última columna está siempre formada por ceros; por tanto, nunca puede tener más peldaños que la matriz escalonada de . Así pues, para un sistema *omog neo* $= \bar{}$ y por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es siempre *om atible*.

Este resultado puede demostrarse más fácilmente observando que $_1 = 0$, $_2 = 0$, ..., $_n = 0$ es siempre solución de un sistema homogéneo; esta solución se denomina la *ol i n trivial*. Si un sistema homogéneo posee soluciones distintas de la trivial es indeterminado, y para esto es necesario y suficiente, según el teorema de Rouché-Frobenius, que $= \bar{} < n$.

EJEMPLO E. Queremos demostrar que el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} {}_1 + {}_2 - {}_3 - {}_4 = 0 \\ 2\,{}_1 - {}_2 + {}_3 - 2\,{}_4 = 0 \end{array}\right\}$$

es indeterminado. Realizando operaciones elementales con su matriz ampliada se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[ii)]{i)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como $2 = = \bar{} < n = 4$, se obtiene el resultado deseado.

Sus soluciones se obtienen escribiendo el sistema correspondiente a la matriz escalonada reducida:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1 \qquad - {}_4 = 0 \\ {}_2 - {}_3 \qquad = 0 \end{array}\right\}.$$

Haciendo $_3 = {}_1$, $_4 = {}_2$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1 = {}_2 \\ {}_2 = {}_1 \\ {}_3 = {}_1 \\ {}_4 = {}_2 \end{array}\right\}$$

donde $_1$ y $_2$ son números reales cualesquiera.

* * *

El *m to o e elimina i n e Ga or an* para resolver sistemas de ecuaciones lineales se resume en los siguientes pasos:

1) Se localiza la columna que no conste completamente de ceros y que esté más a la izquierda.

2) Se intercambia la fila superior con otra, para llevar un elemento diferente de cero a la parte superior de la columna que se encontró en el paso 1.
3) Si el elemento que está ahora en la parte superior de la columna encontrada en el paso 1 es a, se multiplica la primera fila por $1/a$, para introducir el 1 principal.
4) Se suman múltiplos apropiados de la fila superior a las filas de abajo, de manera que todos los elementos debajo del 1 principal se conviertan en ceros.
5) Se cubre ahora la fila superior de la matriz y se empieza nuevamente con el paso 1 aplicado a la submatriz que queda. Se continúa de esta manera hasta que la matriz completa quede en forma escalonada en las filas.
6) Empezando con la última fila diferente de cero y yendo hacia arriba, se suman múltiplos adecuados de cada fila a las de arriba, para introducir ceros sobre los 1 principales.

EJERCICIOS 1.1

1. Encontrar todas las soluciones (si existen) de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan:

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$.

2. Utilizar operaciones elementales para reducir las matrices dadas a su matriz escalonada reducida.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Resolver los siguientes sistemas mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan:

a) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$ **d)** $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 7 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 1 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 11x_4 + 13 &= 0 \end{aligned}\right\}$ **f)** $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0 \end{array}\right\}$.

4. Utilizar el teorema de Rouché-Frobenius para realizar un estudio del número de soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}\right\}$.

5. Demostrar que el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

es compatible indeterminado si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

1.2. RANGO DE UNA MATRIZ. ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA

En la sección anterior se observó que el número de peldaños de la matriz escalonada reducida de un sistema es importante para determinar la compatibilidad o incompatibilidad de un sistema. En esta sección se relacionará este número con el importante concepto de *rango de una matriz*. Además, se estudiará la estructura de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

En los ejemplos de la sección anterior se ha observado que las soluciones de un sistema pueden escribirse de la forma

$$(a_1, a_2, ..., a_n),$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales. Un elemento de esta forma recibe el nombre de *vector* y se denota por

$$\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Los números reales a_i, $i = 1, 2, ..., n$, reciben el nombre de *componente* del vector $\vec{a}$; a_1 se denomina *primera componente*, a_2 *segunda componente*, y así sucesivamente. El vector $\vec{0}$ es aquel cuyas componentes son todas nulas. Dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ son iguales, y escribiremos $\vec{a} = \vec{b}$, cuando $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Los vectores no solo aparecen como soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, sino que también aparecen en las filas o en las columnas de una matriz, en cuyo caso reciben el nombre de vectores fila o vectores columna de la matriz. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como vectores fila

$$\vec{a} = (1, 2, 0, 1), \quad \vec{b} = (2, 1, 3, 0), \quad \vec{} = (-1, 2, -1, 1)$$

y como vectores columna:

$$\vec{} = (1, 2, -1), \quad \vec{e} = (2, 1, 2), \quad \vec{} = (0, 3, -1), \quad \vec{g} = (1, 0, 1).$$

Nota. A veces, los vectores columna de una matriz se escriben en notación vertical de la forma:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Las definiciones que daremos con vectores no dependen de la notación que se utilice para representarlos. En este texto aparecerán las dos notaciones indistintamente.

Al resolver un sistema por el método de eliminación de Gauss-Jordan se han realizado ciertas operaciones con los vectores fila de su matriz ampliada, que recibían el nombre de operaciones elementales. Estas operaciones son la *ma e ve tore* :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

y la *m lti li a i n e n ve tor or n n mero real* :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Las operaciones con vectores poseen las siguientes propiedades, que se dejan como ejercicio para el lector:

(S_1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (conmutativa)
(S_2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{})$ (asociativa)
(S_3) $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
(S_4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = 0$, donde $(-\vec{a}) = (-1)\vec{a}$
(M_1) $(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$
(M_2) $(+)\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$
(M_3) $(\vec{a}) = ( )\vec{a}$
(M_4) $1\vec{a} = \vec{a}$

Nota. El vector $(-\vec{a}) = (-1)\vec{a}$ se denomina *o e to* de $\vec{a}$.

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}\}$, una expresión de la forma

$$_1\vec{a}_1 + \ _2\vec{a}_2 + \cdots + \ \vec{a}$$

donde los , = 1, ..., , son números reales, se dice que es una *ombina i n lineal* de los vectores dados.

Un vector $\vec{a}$ se dice que es *ombina i n lineal* de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}$, si existen números reales $_1, _2, ..., $, tales que

$$\vec{a} = {}_1\vec{a}_1 + {}_2\vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}\ .$$

El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores, ya que basta tomar todos los = 0. La expresión anterior puede escribirse de la forma

$${}_1\vec{a}_1 + {}_2\vec{a}_2 + \cdots + \vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$$

donde no todos los coeficientes de los vectores son nulos (el coeficiente de $\vec{a}$ es -1).

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1.2.1

i) Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}\}$ es **linealmente dependiente** si existen números $_1, _2, ...,$, no todos nulos, tales que:

$${}_1\vec{a}_1 + {}_2\vec{a}_2 + \cdots + \vec{a} = \vec{0}.$$

ii) Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}\}$ se dice **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir, cualquier expresión del tipo

$${}_1\vec{a}_1 + {}_2\vec{a}_2 + \cdots + \vec{a} = \vec{0}$$

implica necesariamente que $_1 = {}_2 = \cdots = = 0$.

EJEMPLO A. Queremos estudiar si los vectores $\vec{a}_1 = (2, 1)$ y $\vec{a}_2 = (1, 1)$ son linealmente dependientes o independientes; para ello, tratemos de encontrar dos números $_1$ y $_2$ tales que:

$${}_1(2, 1) + {}_2(1, 1) = (0, 0).$$

Puesto que dos vectores son iguales si y solo si sus componentes correspondientes coinciden, la igualdad anterior puede escribirse de la forma

$$\left.\begin{aligned} 2\,{}_1 + {}_2 &= 0 \\ {}_1 + {}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Realizando operaciones elementales con la matriz de este sistema se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{ii)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{i)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Como = ¯ = 2 = número de incógnitas y el sistema es homogéneo, solo tiene la solución trivial $_1 = {}_2 = 0$. Esto implica que los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ son linealmente independientes.

* * *

EJEMPLO B. Para estudiar si los vectores $\bar{a}_1 = (1, 1, 3)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 2)$ y $\bar{a}_3 = (1, 2, 5)$ son linealmente dependientes o independientes formamos la expresión

$$_1(1, 1, 3) + \ _2(0, 1, 2) + \ _3(1, 2, 5) = (0, 0, 0)$$

que puede escribirse de la forma:

$$\left.\begin{array}{rrrr} _1 & & + & _3 = 0 \\ _1 + & & _2 + 2 & _3 = 0 \\ 3 \ _1 + 2 & & _2 + 5 & _3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Puesto que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se tiene que $\quad = \bar{} = 2 < 3 =$ número de incógnitas y, por tanto, el sistema posee soluciones no triviales: los vectores dados son linealmente dependientes.

Si queremos encontrar una combinación lineal de los vectores anteriores, basta resolver el sistema anterior; dicho sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{rrr} _1 & + & _3 = 0 \\ & _2 + & _3 = 0 \end{array}\right\}$$

de acuerdo con las operaciones elementales anteriormente realizadas. Haciendo $_3 = \ $, se tiene $_1 = - \ , \ _2 = - \ .$ Como caso particular de $\ $ podemos tomar $\ = -1$, con lo cual $_1 = 1$, $_2 = 1$, y se tiene:

$$1(1, 1, 3) + 1(0, 1, 2) - 1(1, 2, 5) = (0, 0, 0)$$

como se puede comprobar fácilmente.

* * *

En los ejemplos anteriores, se habrá observado que únicamente es necesario escribir la matriz cuyas columnas son los vectores dados y realizar en ella operaciones elementales para estudiar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores. Si el número de peldaños coincide con el número de columnas, los vectores columna son linealmente independientes y, en caso contrario, son linealmente dependientes.

Definición 1.2.2

i) Se denomina **rango de un conjunto de vectores** al mayor número de ellos que son linealmente independientes.

ii) Se denomina **rango de una matriz *A*,** y se denota por *r*( ), al rango de sus vectores columna.

El rango de los vectores del ejemplo A es 2, ya que son linealmente independientes. El rango de los vectores del ejemplo B es menor que 3, ya que son linealmente dependientes.

En estos momentos, es conveniente resaltar la forma de calcular el rango de una matriz. Dada la matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se consideran los vectores

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

de entre los cuales hay que determinar el mayor número de ellos que sean linealmente independientes.

En primer lugar, es necesario estudiar si los n vectores son linealmente independientes, es decir, si el sistema homogéneo

$$_1\vec{a}_1 + \ _2\vec{a}_2 + \cdots + \ _n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{2.1}$$

posee únicamente la solución nula. En caso de que posea únicamente la solución nula, el rango de la matriz es n. Observar que para determinar si (2.1) posee soluciones no nulas únicamente es necesario reducir la matriz a su forma escalonada reducida.

Si los n vectores son linealmente dependientes, es necesario estudiar si alguno de los posibles subconjuntos de $n - 1$ vectores de entre los n anteriores es linealmente independiente.

Si estos subconjuntos de $n - 1$ vectores son todos linealmente dependientes es necesario estudiar todos los subconjuntos de $n - 2$ vectores. El proceso termina cuando encontremos por primera vez unos cuantos vectores de entre los anteriores que sean linealmente independientes.

En teoría, calcular el rango de una matriz puede parecer complicado y largo. En la práctica, sin embargo, resulta sencillo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO C. Para encontrar el rango de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

comenzamos resolviendo el sistema

$$_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \ _2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \ _3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ _4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{i)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el sistema posee soluciones no triviales. Por tanto, los cuatro vectores columna de la matriz son linealmente dependientes.

Si tomamos tres de ellos, por ejemplo, los tres primeros, la matriz escalonada reducida del sistema que forman es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que se obtiene realizando las mismas operaciones elementales que antes sobre las tres primeras columnas de la matriz. Estos tres vectores son, por tanto, linealmente dependientes.

El lector puede comprobar que cualesquiera tres vectores de entre los anteriores son linealmente dependientes

Finalmente, si tomamos los dos primeros vectores, el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene como matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, son linealmente independientes. Concluimos, entonces, que $r(\ ) = 2$.

* * *

El lector habrá podido observar en el ejemplo anterior que el rango de una matriz coincide con el número de peldaños de su matriz escalonada reducida. Este resultado se demuestra a continuación.

Teorema 1.2.3

El rango de una matriz coincide con el número de peldaños de su matriz escalonada reducida.

Demostración. Sea una matriz de la forma

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y denotemos por $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sus vectores columna. Sea el número de peldaños de una matriz escalonada reducida de . Esta matriz escalonada reducida es de la forma:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & & n_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow \text{fila } p$$

El sistema homogéneo

$$_1\vec{a}_{n_1} + \ _2\vec{a}_{n_2} + \cdots + \ \vec{a}_n = \vec{0}$$

correspondiente a las columnas no sombreadas de la matriz tiene únicamente la solución trivial, ya que su matriz escalonada reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & & 0 \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{columna } p \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } p \\ \\ \end{matrix}$$

Hemos demostrado, por tanto, que la matriz posee al menos vectores columna linealmente independientes.

El teorema quedará demostrado si probamos que no existen más de vectores columna de que sean linealmente independientes.

Tomemos vectores columna $\vec{a}_{m_1}, \vec{a}_{m_2}, ..., \vec{a}_m$ de , con $>$. El sistema

$$_1\vec{a}_{m_1} + \ _2\vec{a}_{m_2} + \cdots + \ \vec{a}_m = \vec{0} \tag{2.2}$$

posee una matriz escalonada reducida con peldaños como máximo, ya que la matriz escalonada reducida de tiene peldaños. Puesto que el sistema anterior tiene incógnitas y, es mayor que , (2.2) es indeterminado. Por tanto, los vectores dados son linealmente dependientes. ■

EJEMPLO D. Para calcular el rango de los vectores $\bar{a}_1=(1, 1, 3)$, $\bar{a}_2=(2, 2, 6)$ y $\bar{a}_3=(2, -1, 5)$ escribimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyas columnas son los vectores dados, y realizamos sobre ella operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} \\ \cline{3-3} 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Puesto que el número de peldaños de la matriz escalonada reducida es 2, del teorema anterior deducimos que el rango de los tres vectores dados es 2.

* * *

El Teorema 1.2.3 nos permite reescribir el *teorema e o robeni* (Teorema 1.1.1) utilizando el rango de una matriz, tal y como se hace en la mayor parte de la literatura matemática.

Teorema 1.2.4 (Rouché-Frobenius)

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, con matriz de coeficientes y matriz ampliada $\bar{}$, se tienen los siguientes resultados:

i) El sistema es *om atible etermina o* si y solo si

$$r(\ ) = r(\bar{}) = n.$$

ii) El sistema es *om atible in etermina o* si y solo si

$$r(\ ) = r(\bar{}) < n.$$

iii) El sistema es *in om atible* si y solo si

$$r(\ ) < r(\bar{}).$$

* * *

A continuación, se realiza el estudio de la estructura de las soluciones de un sistema. Comenzamos con un sistema homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas con coeficientes reales:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2 + \cdots + a_{1n}\ _n = 0 \\ a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2 + \cdots + a_{2n}\ _n = 0 \\ \\ a_{m1}\ _1 + a_{m2}\ _2 + \cdots + a_{mn}\ _n = 0 \end{array}\right\}. \tag{2.3}$$

Sabemos que todo sistema homogéneo posee la solución trivial $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$ y, por tanto, es compatible. Demostraremos a continuación que, si es indeterminado, ha de tener infinitas soluciones.

Proposición 1.2.5

i) Si $\vec{\ } = (\ _1, \ _2, ..., \ _n)$ es una solución del sistema homogéneo (2.3), $\vec{\ }$ es también solución del mismo sistema para todo número real .

ii) Si $\vec{\ } = (\ _1, \ _2, ..., \ _n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ son soluciones del sistema homogéneo (2.3), $\vec{\ } + \vec{v}$ también lo es.

Demostración. Si $\vec{\ }$ es solución de (2.3) se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2 + \cdots + a_{1n}\ _n &= 0 \\ a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2 + \cdots + a_{2n}\ _n &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}\ _1 + a_{m2}\ _2 + \cdots + a_{mn}\ _n &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por el número real cada una de estas igualdades se obtiene el resultado deseado.

Si, además, $\vec{v}$ es solución de (2.3) se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n &= 0 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n &= 0. \end{aligned}$$

Sumando las correspondientes igualdades se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{11}(\ _1 + v_1) + a_{12}(\ _2 + v_2) + \cdots + a_{1n}(\ _n + v_n) &= 0 \\ a_{21}(\ _1 + v_1) + a_{22}(\ _2 + v_2) + \cdots + a_{2n}(\ _n + v_n) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}(\ _1 + v_1) + a_{m2}(\ _2 + v_2) + \cdots + a_{mn}(\ _n + v_n) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\vec{\ } + \vec{v}$ es también solución del mismo sistema. ■

Proposición 1.2.6

Si el sistema homogéneo (2.3) es indeterminado, existen vectores, $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }$, linealmente independientes de manera que todas las soluciones de (2.3) son de la forma

$$\ _1\vec{\ }_1 + \ _2\vec{\ }_2 + \cdots + \ \vec{\ }$$

con los números reales. Además, $= n - r(\ )$, donde denota la matriz de los coeficientes del sistema (2.3).

Es conveniente ilustrar con un ejemplo el resultado de la Proposición 1.2.6.

EJEMPLO E. Tratemos de encontrar las soluciones del sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 - x_4 + 2\,x_5 = 0 \\ 3\,x_1 \quad - x_3 + x_4 \quad = 0 \\ x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 + 2\,x_4 - 2\,x_5 = 0 \end{array}\right\}.$$

Realizando operaciones elementales con las filas de la matriz de sus coeficientes se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & 5 & -5 & 6 \\ 0 & -9 & 5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5/9 & 5/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & -3 \\ \hline 0 & 1 & -5/9 & 5/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Haciendo $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$ y $x_5 = x_3$, se tiene que

$$x_1 = \frac{1}{3}\,x_1 - \frac{1}{3}\,x_2 + 3\,x_3$$

$$x_2 = \frac{5}{9}\,x_1 - \frac{5}{9}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_3.$$

Las soluciones de este sistema pueden escribirse de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{1}{3}\,x_1 - \frac{1}{3}\,x_2 + 3\,x_3, \frac{5}{9}\,x_1 - \frac{5}{9}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_3, x_1, x_2, x_3\right) =$$

$$= x_1\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, 1, 0, 0\right) + x_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}, 0, 1, 0\right) + x_3\left(3, -\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right).$$

Los vectores

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, 1, 0, 0\right), \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}, 0, 1, 0\right) \quad \text{y} \quad \vec{u}_3 = \left(3, -\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)$$

son linealmente independientes, ya que si tenemos

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0},$$

igualando las tres últimas componentes de la izquierda a cero se deduce que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Observar, finalmente, que el número de vectores linealmente independientes es $3 = n - r(\ )$.

* * *

Demostración de la Proposición 1.2.6. Supongamos, para simplificar, que la matriz escalonada reducida de este sistema es de la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & u_{21} & \cdots & u_{2k} \\ & & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & & & \\ & 0 & & & 1 & u_{p1} & \cdots & u_{pk} \\ & & & & & 0 & & \end{pmatrix}$$

columna $n = p + k$

← fila p

donde $\quad = r(\ )$. Tomemos

$$\begin{aligned} \vec{}_1 &= (-\ _{11}, -\ _{21}, \ldots, -\ _1, 1, 0, \ldots, 0) \\ \vec{}_2 &= (-\ _{12}, -\ _{22}, \ldots, -\ _2, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \vec{} &= (-\ _1, -\ _2, \ldots, -\ , 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Por un razonamiento análogo al del ejemplo E se concluye que toda solución de (2.3) es de la forma:

$$_1\vec{}_1 + \ _2\vec{}_2 + \cdots + \ \vec{}.$$

Además, los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, \ldots, \vec{}$ son linealmente independientes, ya que si tenemos una combinación lineal de ellos de la forma

$$_1\vec{}_1 + \ _2\vec{}_2 + \cdots + \ \vec{} = \vec{0}$$

las $n -$ últimas componentes de cada uno de ellos producen las igualdades $_1 = \ _2 = \cdots = \ = 0$. Por tanto, los vectores dados son linealmente independientes. ■

* * *

La estructura de las soluciones de un sistema no homogéneo se deduce de la estructura de las soluciones de un sistema homogéneo.

Sea

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2 + \cdots + a_{1n}\ _n &= b_1 \\ a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2 + \cdots + a_{2n}\ _n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}\ _1 + a_{m2}\ _2 + \cdots + a_{mn}\ _n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Se denomina *i tema omog neo a o ia o a* (2.4) al sistema que se obtiene sustituyendo los términos independientes b del sistema por ceros.

Proposición 1.2.7

Si $\vec{v}$ es una solución de (2.4), todas sus soluciones son de la forma $\vec{v} + \vec{}$, donde $\vec{}$ es solución de su sistema homogéneo asociado.

Demostración. Si $\vec{}$ es otra solución de (2.4) escribimos

$$\vec{} = \vec{v} + (\vec{} - \vec{v})$$

y observamos que $\vec{} = \vec{} - \vec{v}$ es una solución del sistema homogéneo asociado, ya que $\vec{}$ y $\vec{v}$ son ambas soluciones del sistema (2.4). ■

Las Proposiciones 1.2.6 y 1.2.7 nos permiten enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.2.8

Sea $\vec{v}$ una solución de (2.4). Existen vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$, linealmente independientes, tal que todas las soluciones de (2.4) son de la forma

$$\vec{v} + {}_1\vec{}_1 + {}_2\vec{}_2 + \cdots + \vec{}$$

donde los ${}_1, {}_2, ...,$ son números reales y $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$ son soluciones del sistema homogéneo asociado a (2.4).
Además, $= n - r(\ )$, donde es la matriz de los coeficientes del sistema.

Nota. La expresión $\vec{v} + {}_1\vec{}_1 + {}_2\vec{}_2 + \cdots + \vec{}$ se denomina *ol i n general el i te ma* y $\vec{v}$ se denomina una *ol i n arti lar* del sistema.

EJERCICIOS 1.2

1. Demostrar las propiedades (S_1), (S_2), (S_3) y (S_4), (M_1), (M_2), (M_3) y (M_4) de la suma de vectores y de la multiplicación de vectores por un número real.

2. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes y en caso de que sean linealmente dependientes, encontrar una combinación lineal entre ellos:

a) $\{(1, 2), (2, 4)\}$.

b) $\{(3, 5, 1), (2, 1, 3)\}$.

c) $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, -1, 1)\}$.

d) $\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 2, 4, 2)\}$.

3. Calcular el rango de los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5/4\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-2\\6\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\0\\1\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}5\\9\\1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\3\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$.

4. Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 7 & 4\\6 & -5 & -1 & 2\\7 & -2 & 6 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}4 & -3 & 2 & 5 & 7\\6 & -9 & 4 & 2 & 3\\-1 & 0 & 5 & 7 & 4\\0 & 1 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6\\0 & 1 & 4 & 7 & 3 & 2\\1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0\\3 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -4 & 2\\1 & 2 & 1 & -2 & 3\\2 & 3 & 0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5. Estudiar su compatibilidad y encontrar la solución general de los sistemas

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1\\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\\ x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 5\\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2\end{aligned}\right\}.$$

6. Demostrar que todo conjunto con $n + 1$ vectores de n componentes cada uno es linealmente dependiente.

1.3. APLICACIONES LINEALES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$ Y OPERACIONES CON MATRICES

En esta sección deduciremos las operaciones con matrices a partir de las operaciones que pueden realizarse con aplicaciones lineales. Tales operaciones con matrices serán necesarias para un estudio posterior de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Comenzaremos con el concepto de aplicación entre conjuntos.

Dados dos conjuntos y , toda ley que asocia a cada uno de los elementos de un elemento de como máximo se denomina una *a li a i n e en* . Si representamos esta ley con la letra , se acostumbra a escribir : → , lo cual se lee *e na a li a i n e en* . El elemento de asociado con el elemento de se escribe mediante ( ) y recibe el nombre de *imagen el elemento* .

EJEMPLO A

1) Si $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales, : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por ( ) = 3 , es decir, a cada número real le asocia su triple, es una aplicación.

2) Si $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales, 0, 1, 2, 3, ..., la ley $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que asocia a todo número natural n su cuadrado, es decir, $(n) = n^2$, es una aplicación.
3) Si $= \{1, 2, 3, 4\}$ y $= \{1, 2\}$ y definimos $(1) = 1$, $(2) = 1$, $(3) = 2$, $(4) = 2$ (obsérvese la figura 1.2), se tiene una aplicación de en .

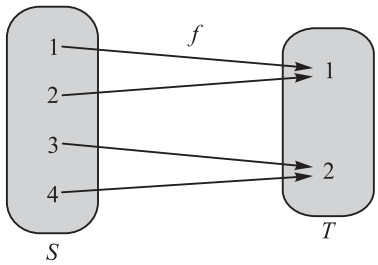


Figura 1.2

Nota. Cuando una aplicación está definida en un conjunto de números (naturales, enteros, racionales, reales, etc.) y sus imágenes están también en un conjunto de números, se suele utilizar la palabra *n i n* en lugar de «aplicación». En algunos casos, se suele utilizar la palabra *tran orma i n* en lugar de «aplicación».

Dada una aplicación : → se denomina *imagen e* , y se denota por Im( ) al conjunto de todas las imágenes de los elementos de , es decir:

$$\text{Im}(\ ) = \{\ (\ ) : \ \in \ \}.$$

En el ejemplo A.1), Im( ) = $\mathbb{R}$; en el A.2), Im( ) = {0, 1, 4, 9, 16, 25, ...}, y en el A.3), Im( ) = {1, 2}.

Cuando el conjunto Im( ) coincide con el conjunto final se dice que es una aplicación *raye tiva*; A.1) y A.3) son ejemplos de aplicaciones suprayectivas, mientras que A.2) no lo es. Otra forma de comprobar que es *raye tiva* es estudiando si todo elemento de es imagen de algún elemento de , es decir,

$$\text{«para todo } t \in \ \text{, existe } \ \in \ \text{, tal que } \ (\ ) = t\text{»}.$$

Una aplicación : → se denomina *inye tiva* si dos elementos distintos cualesquiera de tienen distintas imágenes, es decir, , $' \in$, $\neq$ $' \Rightarrow$ $(\ ) \neq (\ ')$. Otra forma de comprobar que es inyectiva es utilizando la negación de la implicación anterior, a saber:

$$\text{«}(\ ) = (\ ') \Rightarrow \ = \ '\text{»}.$$

La aplicación del ejemplo A.1) es inyectiva, ya que $(\ ) = (y) \Leftrightarrow 3 \ = 3y \Leftrightarrow \ = y$; la aplicación del ejemplo A.2) es también inyectiva, ya que $(n) = (m) \Leftrightarrow n^2 = m^2 \Leftrightarrow n = m$ (puesto que $n, m \in \mathbb{N}$); sin embargo, la aplicación del ejemplo A.3) *no* es inyectiva, ya que $(1) = (2)$ y $1 \neq 2$.

Una aplicación que es a la vez suprayectiva e inyectiva recibe el nombre de *biye tiva*. La aplicación del ejemplo A.1) es biyectiva, y no lo son ninguna de las aplicaciones de los ejemplos A.2) y A.3).

* * *

La operación básica con las funciones es la *om o i i n*. Dadas dos aplicaciones : → y g: → U, se denomina *om o i i n e y g*, y se denota por $g \circ$ al resultado de aplicar g a la imagen mediante de cualquier elemento de , es decir,

$$g \circ ( ) = g(( )).$$

EJEMPLO B. Si : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por ( ) = $^2 - 1$ y g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $g( ) =$ + 5, se tiene que

$$g \circ ( ) = g(( )) = ( ) + 5 = {}^2 - 1 + 5 = {}^2 + 4.$$

Para que la composición de y g pueda definirse es necesario que la imagen de , es decir, ( ), esté contenida en el conjunto de definición de g, es decir ; así pues, $\circ g$ no está definida a menos que $g( ) \subset$. En el caso en que $g \circ$ y $\circ g$ puedan definirse cabe preguntarse si ambas coinciden, es decir, si la composición de aplicaciones es *onm tativa*. La respuesta es, en general, negativa, ya que en el ejemplo B tenemos

$$\circ g( ) = (g( )) = [g( )]^2 - 1 = (+ 5)^2 - 1 = {}^2 + 10 + 24$$

que no coincide con $g \circ$.

Sin embargo, la composición de aplicaciones satisface la propiedad *a o iativa*, es decir:

$$(\circ g) \circ = \circ (g \circ)$$

si , g y son tres aplicaciones para las cuales tienen sentido las composiciones anteriores. Este resultado se deduce inmediatamente de la definición de composición, ya que

$$(\circ g) \circ ( ) = (\circ g)(( )) = (g(( ))) =$$
$$= (g \circ ( )) = \circ (g \circ)( ).$$

El comportamiento de la composición de aplicaciones con respecto a los tipos de aplicaciones citados anteriormente queda expuesto en las siguientes propiedades, que se dejan como ejercicio para el lector. Si : → y g: → U se tiene:

(C.1) y g inyectivas ⇒ $g \circ$ inyectiva.
(C.2) y g suprayectivas ⇒ $g \circ$ suprayectiva.
(C.3) y g biyectivas ⇒ $g \circ$ biyectiva.

* * *

Una forma de definir una aplicación es utilizando matrices. Sea, por ejemplo, la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{R}^2$ el conjunto de todos los vectores $\bar{} = (_1, _2)$ con dos componentes reales; podemos definir : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$(\bar{}) = (_1, _2) = (_1 - _2, 2 _1 + 3 _2).$$

Así, por ejemplo,

$$(1, 5) = (1 - 5, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5) = (-4, 17).$$

En general, definimos $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de los vectores $\vec{\ } = (\ _1,\ \ _2, ...,\ \ _n)$ de n componentes reales. Dada una matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

de m filas y n columnas, se denomina *a li a i n lineal a o ia a on* a la aplicación $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$(\vec{\ }) = (\ _1,\ \ _2, ...,\ \ _n) =$$

$$= (a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2 + \cdots + a_{1n}\ _n, a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2 + \cdots + a_{2n}\ _n, ..., a_{m1}\ _1 + a_{m2}\ _2 + \cdots + a_{mn}\ _n).$$

EJEMPLO C. La matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como aplicación lineal asociada $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(\ _1,\ \ _2) = (0\ _1 + 1\ _2, 1\ _1 + 0\ _2) = (\ _2,\ \ _1).$$

La aplicación intercambia las componentes de todo vector $\vec{\ } = (\ _1,\ \ _2)$ de $\mathbb{R}^2$. Geométricamente, refleja cada vector $\vec{\ } = (\ _1,\ \ _2)$ de $\mathbb{R}^2$ en la recta $_1 = \ _2$ (figura 1.3). (Esto es fácil de probar: ¡inténtalo!)

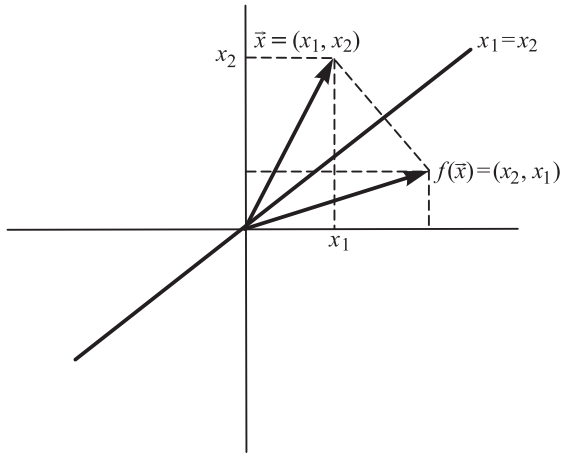


Figura 1.3

EJEMPLO D. La matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como aplicación lineal asociada $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\vec{\ }) = (\ _1,\ _2,\ _3) =$$
$$= 1 \cdot\ _1 + 0 \cdot\ _2 + 0 \cdot\ _3, 0 \cdot\ _1 + 1 \cdot\ _2 + 0 \cdot\ _3, 0 \cdot\ _1 + 0 \cdot\ _2 + 0 \cdot\ _3) = (\ _1,\ _2, 0).$$

Geométricamente, proyecta todo vector de $\mathbb{R}^3$ en un vector del plano $\ _1\ _2$ cuyas dos primeras componentes son las dos primeras componentes de $\vec{\ }$ y su tercera componente es nula (figura 1.4).

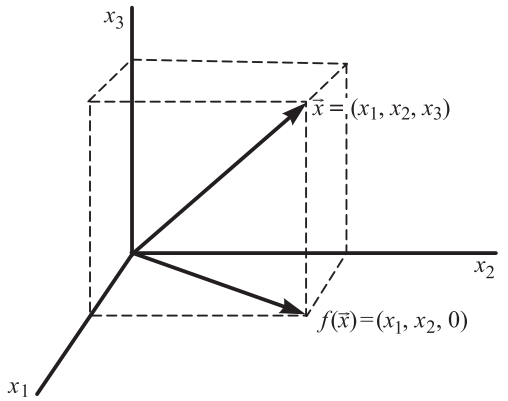


Figura 1.4

Las aplicaciones lineales tienen un buen comportamiento con respecto a la suma de vectores y a la multiplicación de estos por números reales:

Teorema 1.3.1

Sea $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal; para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y para todo número real r se tiene:

i) $(\vec{\ } + \vec{y}) = (\vec{\ }) + (\vec{y})$
ii) $(r\vec{\ }) = r\ (\vec{\ })$.

Demostración. Por simplicidad, haremos la demostración para una aplicación lineal $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, puesto que las ideas principales de la demostración en el caso general están incluidas en este caso particular. Sea, por tanto:

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}$$

la matriz de y $\vec{\ } = (\ _1,\ _2), \vec{y} = (y_1, y_2)$. Se tiene que

$$(\vec{\ } + \vec{y}) = (\ _1 + y_1,\ _2 + y_2) = (a(\ _1 + y_1) + b(\ _2 + y_2),\ (\ _1 + y_1) +$$
$$+\ (\ _2 + y_2)) = (a\ _1 + ay_1 + b\ _2 + by_2,\ \ _1 +\ y_1 +\ \ _2 +\ y_2) =$$
$$= (a\ _1 + b\ _2,\ \ _1 +\ \ _2) + (ay_1 + by_2,\ y_1 +\ y_2) =$$
$$= (\ _1,\ _2) +\ (y_1, y_2) = (\vec{\ }) + (\vec{y}).$$

Esto demuestra *i*). Para demostrar *ii*), sea $\vec{} = (\ _1,\ _2)$ y r un número real. Se tiene que

$$(r\vec{}) = \ (r\ _1, r\ _2) = (a(r\ _1) + b(r\ _2),\ \ (r\ _1,) + \ \ (r\ _2)) =$$
$$= r(a\ _1 + b\ _2,\ \ _1 + \ \ _2) = r\ \ (\vec{}).$$

Esto termina la demostración de *ii*) y, por tanto, la demostración del teorema. ■

Nota. Combinando *i*) y *ii*) del Teorema 1.3.1 se tiene que

$$(r\vec{} + \ \vec{y}) = r\ \ (\vec{}) + \ \ \ (\vec{y})$$

para todo $\vec{}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y para cualesquiera números reales r y .

El Teorema 1.3.1 se muestra gráficamente en las figuras 1.5 y 1.6.

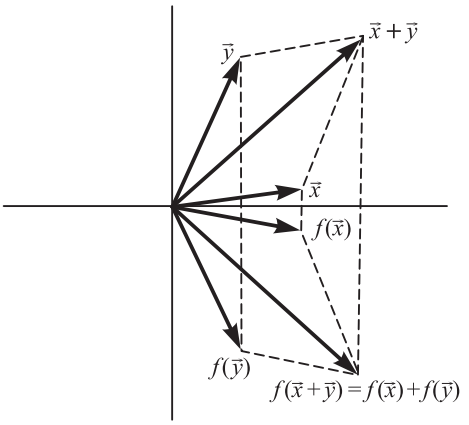


Figura 1.5

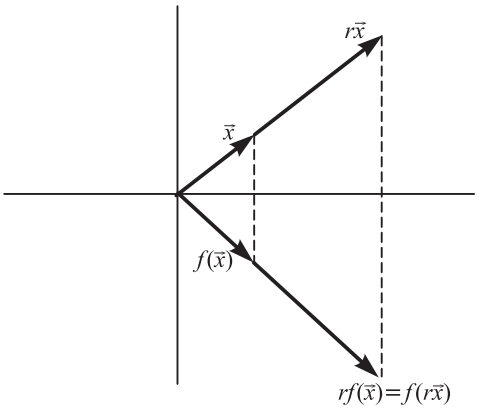


Figura 1.6

Este teorema permite demostrar que la imagen de una recta en $\mathbb{R}^n$ mediante una aplicación lineal es otra recta o un punto; en efecto, si $\vec{} + r\vec{v}$ es la ecuación de la recta que pasa por el extremo de $\vec{}$ en la dirección de $\vec{v}$ (figura 1.7) se tiene que

$$(\vec{} + r\vec{v}) = \ \ (\vec{}) + r\ \ (\vec{v})$$

debido al Teorema 1.3.1. Si $\ (\vec{v}) = \vec{0}$ se tiene el punto $\ (\vec{})$, y si $\ (\vec{v}) \neq \vec{0}$ se obtiene una recta que pasa por el extremo de $\ (\vec{})$ en la dirección de $\ (\vec{v})$.

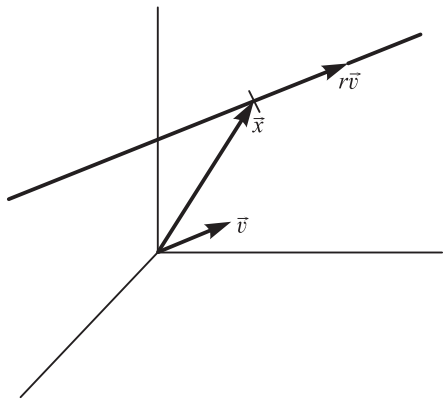


Figura 1.7

EJEMPLO E. Queremos hallar la imagen del cuadrado de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 1) y (1, 0) mediante la aplicación lineal dada por la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La recta (1) (véanse figuras 1.8 y 1.9) tiene por ecuación $\vec{0} + r\vec{e}_1$ y, por tanto, se transforma en la recta (1′), que tiene por ecuación

$$(\vec{0} + r\vec{e}_1) = (\vec{0}) + r\ (\vec{e}_1) = \vec{0} + r(2 \cdot 1 + 0,\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \vec{0} + r(2,\ 1).$$

Análogamente:

$$\begin{cases} (2):\ \vec{0} + r\vec{e}_2 \quad \text{se transforma en} \quad (2'):\ \vec{0} + r(1,\ 2) \\ (3):\ (1,\ 0) + r\vec{e}_2 \quad \text{se transforma en} \quad (3'):\ (2,\ 1) + r(1,\ 2) \\ (4):\ (0,\ 1) + r\vec{e}_1 \quad \text{se transforma en} \quad (4'):\ (1,\ 2) + r(2,\ 1). \end{cases}$$

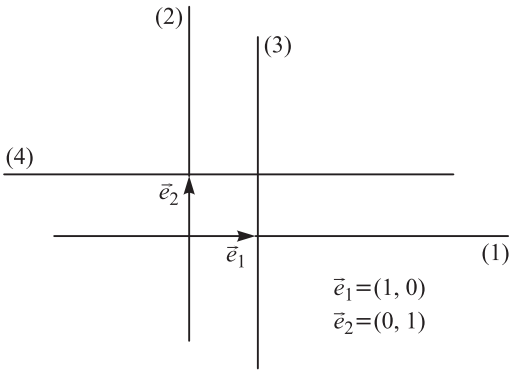


Figura 1.8

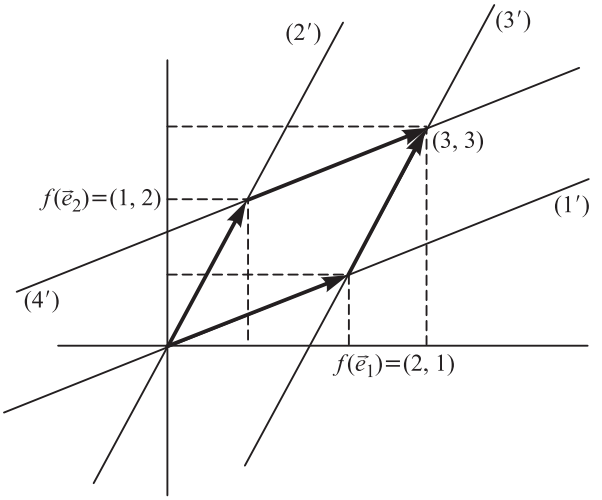


Figura 1.9

Con estos resultados se tiene que la imagen del cuadrado mediante es el paralelogramo limitado por las rectas (1′), (2′), (3′) y (4′), que tiene como vértices (0, 0), (2, 1), (3, 3) y (1, 2).

* * *

Las propiedades *i*) y *ii*) dadas en el Teorema 1.3.1 caracterizan a las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3.2

Sea : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface:

i) $(\bar{\ } + \bar{y}) = (\bar{\ }) + (\bar{y})$ para todo $\bar{\ }, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

ii) $(r\bar{\ }) = r\ (\bar{\ })$ para todo $\bar{\ } \in \mathbb{R}^n$ y todo número real r.

Entonces, es una aplicación ***lineal*** con matriz cuyas columnas vienen dadas por los vectores $(\vec{e}_1)$, $(\vec{e}_2)$, ..., $(\vec{e}_n)$, donde $\vec{e}$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ con todas sus componentes nulas, excepto la que ocupa el lugar , que es 1.

Demostración. Al igual que en la demostración del Teorema 1.3.1 vamos a suponer que $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; supongamos que $(\vec{e}_1) = (1, 0) = (a, b)$ y $(\vec{e}_2) = (0, 1) = (,)$. Utilizando *i*) y *ii*) se tiene que

$$\begin{aligned}(\vec{\ }) &= (_1, _2) = (_1(1, 0) + _2(0, 1)) = (_1\vec{e}_1 + _2\vec{e}_2) = \\ &= _1 (\vec{e}_1) + _2 (\vec{e}_2) = _1(a, b) + _2(,) = \\ &= (a _1 + _2, b _1 + _2).\end{aligned}$$

Por tanto, es una aplicación lineal que tiene como matriz

$$= \begin{pmatrix} a & \\ b & \end{pmatrix}.$$

Observar que la primera columna de es $(\vec{e}_1)$ y la segunda es $(\vec{e}_2)$. ■

EJEMPLO F. Tratemos de encontrar la matriz de un giro de 90º, g, en $\mathbb{R}^2$ (el giro se considera, salvo indicación contraria, que se realiza en sentido positivo, es decir, contrario al de las agujas del reloj) (figura 1.10). La aplicación g satisface *i*) y *ii*) del Teorema 1.3.2 (¡tratar de demostrarlo geométricamente!). Por el Teorema 1.3.2, g es una aplicación lineal y su matriz tiene como columnas

$$g(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 = (0, 1)$$
$$g(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 = (-1, 0).$$

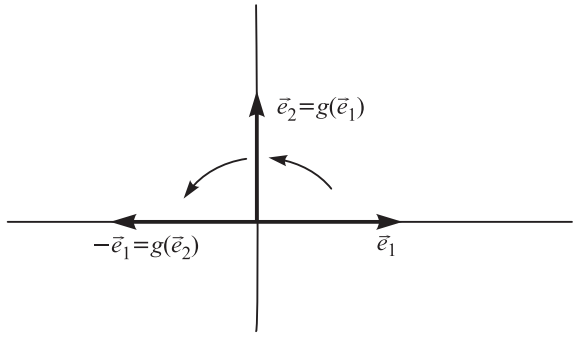


Figura 1.10

Por tanto,

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

* * *

Las aplicaciones lineales pueden sumarse y multiplicarse por números reales: dadas $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos aplicaciones lineales y un número real, definimos la *ma* de y g como la aplicación $+ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$(+ g)(\vec{\ }) = (\vec{\ }) + g(\vec{\ }), \quad \vec{\ } \in \mathbb{R}^n$$

y la *m lti li a i n e or* como la aplicación $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$(\quad)(\vec{\ }) = \ (\ (\vec{\ })), \qquad \vec{\ } \in \mathbb{R}^n.$$

EJEMPLO G. Dadas dos aplicaciones lineales $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$(\ _1, \ _2) = (\ _1, \ _1 + \ _2, 2 \ _2)$$

y

$$g(\ _1, \ _2) = (0, \ _1, \ _2)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}(\ - 2g)(\vec{\ }) &= (\ + (-2)g)(\ _1, \ _2) = \ (\ _1, \ _2) + (-2)g(\ _1, \ _2) = \\ &= (\ _1, \ _1 + \ _2, 2 \ _2) + (0, -2 \ _1, -2 \ _2) = (\ _1, \ _2 - \ _1, 0).\end{aligned}$$

* * *

La suma de dos aplicaciones lineales y g es una aplicación lineal, ya que

$$\begin{aligned}(\ + g)(\vec{\ } + \vec{y}) &= \ (\vec{\ } + \vec{y}) + g(\vec{\ } + \vec{y}) = \ (\vec{\ }) + \ (\vec{y}) + g(\vec{\ }) + g(\vec{y}) = \\ &= \ (\vec{\ }) + g(\vec{\ }) + \ (\vec{y}) + g(\vec{y}) = (\ + g)(\vec{\ }) + (\ + g)(\vec{y})\end{aligned}$$

y para todo número real r

$$(\ + g)(r\vec{\ }) = \ (r\vec{\ }) + g(r\vec{\ }) = r \ (\vec{\ }) + rg(\vec{\ }) = r(\ + g)(\vec{\ });$$

por el Teorema 1.3.2 esto basta para probar que $+ g$ es lineal.

De manera similar, puede comprobarse que es una aplicación lineal si lo es.

Si es la matriz de la aplicación lineal $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y es la matriz de la aplicación lineal $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $+ g$ tendrá una matriz cuya -ésima columna está dada por $(+ g)(\vec{e}\,)$, debido al Teorema 1.3.2. Puesto que $(+ g)(\vec{e}\,) = \ (\vec{e}\,) + g(\vec{e}\,)$ la -ésima columna de la matriz de $+ g$ es la suma de las -ésimas columnas de las matrices de y g. A la matriz de $+ g$ se le denomina *matri ma e y* , y, por tanto, si

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$+ \quad = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12}, & ..., & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22}, & ..., & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1}, & a_{m2} + b_{m2}, & ..., & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observar que para poder sumar matrices el número de filas de y debe coincidir, así como el número de columnas de ambas matrices. Una matriz con m filas y n columnas se dice que es una matriz de *or en m × n*, la cual corresponde a una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Por tanto, la suma de matrices solo es posible si ambas son del mismo orden.

Sea una matriz de orden $m \times n$ asociada con la aplicación lineal $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un número real. Puesto que es una aplicación lineal, tiene asociada una matriz, que se simboliza mediante —*m lti li a i n e or el n mero real* — cuya -ésima columna es ( )($\vec{e}$) = (($\vec{e}$)), es decir, veces la -ésima columna de :

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo G las matrices de y g son

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$-2 \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde a la aplicación lineal $-2g$ (¡comprobarlo!).

* * *

Estas operaciones que acabamos de definir con aplicaciones lineales y matrices tienen propiedades similares a las propiedades (S_1)-(S_4) y (M_1)-(M_4) de la suma de vectores y de la multiplicación de vectores por un número real (ver sección 1.2). Estas propiedades se enuncian en el siguiente cuadro y se dejan como ejercicio para el lector.

Suma de aplicaciones lineales	**Suma de matrices**
(S_1) $f + g = g + f$	(S_1) $A + B = B + A$ (conmutativa)
(S_2) $(f + g) + h = f + (g + h)$	(S_2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativa)
(S_3) $0 + f = f + 0 = f$, donde 0 es la aplicación nula	(S_3) $0 + A = A + 0 = A$, donde 0 es la matriz nula
(S_4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$, donde $-f = (-1)f$	(S_4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$, donde $-A = (-1)A$

Multiplicación de aplicaciones lineales por un número real	**Multiplicación de matrices por un número real**
(M_1) $c(f + g) = cf + cg$	(M_1) $c(A + B) = cA + cB$
(M_2) $(c + d)f = cf + df$	(M_2) $(c + d)A = cA + dA$
(M_3) $c(df) = (cd)f$	(M_3) $c(dA) = (cd)A$
(M_4) $1f = f$	(M_4) $1A = A$

* * *

El último resultado de esta sección es obtener una operación con matrices que corresponda a la composición de aplicaciones lineales. Comenzamos con el caso particular de aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ o matrices (cuadradas) de orden 2×2.

Sean

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

las matrices de , $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Tenemos que

$$g \circ (\vec{\ }) = g \circ (\ _1, \ _2) = g(\ (\ _1, \ _2)) = g(a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2, a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2) =$$

$$= \big(b_{11}(a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2) + b_{12}(a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2), b_{21}(a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2) + b_{22}(a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2)\big) =$$

$$= \big((b_{11}a_{11} + a_{21}b_{12})\ _1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\ _2, (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\ _1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\ _2\big).$$

Por tanto, $g \circ$ es una aplicación lineal que tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

que recibe el nombre de *ro to e or* .

EJEMPLO H. Dadas $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$^2 = \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que para que $g \circ$ tenga sentido es necesario que la imagen de esté contenida en el conjunto inicial de g. Por tanto,

$$: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad , \quad g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} .$$

Como la matriz de es de orden $m \times n$ y la matriz de g es de orden $\times m$, para poder calcular es necesario que el número de columnas de coincida con el número de filas de . Gráficamente:

$$\underset{p \times \boxed{m}}{B} \quad , \quad \underset{\boxed{m} \times n}{A} \quad \to \quad \underset{p \times n}{BA}$$

Dada una matriz el elemento que ocupa el lugar $(i, \ )$, es decir, la intersección de la i-ésima fila con la -ésima columna, se denota por a_i . Esto nos permite escribir una matriz abreviadamente como $(a_i)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ =1,\ldots,n}}$ si es de orden $m \times n$.

Definición 1.3.3

Dadas las matrices

$$= (b_i)_{\substack{i=1,\ldots,\\ =1,\ldots,m}} \qquad \text{y} \qquad = (a_i)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ =1,\ldots,n}}$$

de órdenes $\times m$ y $m \times n$, respectivamente, definimos **el producto de B por A** como la matriz de orden $\times n$ cuyo elemento que ocupa el lugar $(i, \ )$ está dado por

$$\sum_{=1}^{m} b_i\ a\ = b_{i1}a_1\ + b_{i2}a_2\ + \cdots + b_{im}a_m\ .$$

EJEMPLO I. Dadas las matrices

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos calcular , ya que $2 \times \boxed{3}\ \boxed{3} \times 3$, pero no , ya que $3 \times \boxed{3}\ \boxed{2} \times 3$. El elemento que aparece en el lugar (2, 1) de es

$$b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 1.$$

Además,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4(-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0(-2) & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

* * *

Como el lector puede suponer, el producto de matrices corresponde a la composición de las aplicaciones lineales que ellas determinan, en el orden adecuado.

Proposición 1.3.4

Si $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal que tiene a $= (a_i)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ =1,\ldots,n}}$ como matriz y $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es otra aplicación lineal que tiene a $= (b_i)_{\substack{i=1,\ldots,\\ =1,\ldots,m}}$ como matriz, $g \circ\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal que tiene como matriz .

Demostración. La -ésima columna de la matriz de $g \circ$ es

$$g \circ\ (\vec{e}\,) = g(\ \ (\vec{e}\,)) = g(a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + \cdots + a_m\,\vec{e}_m) =$$
$$= a_1\,g(\vec{e}_1) + a_2\,g(\vec{e}_2) + \cdots + a_m\,g(\vec{e}_m)$$

en donde se ha utilizado la linealidad de g. Por tanto,

$$\begin{aligned} g\circ(\vec{e}\,) &= a_1\,(b_{11}, b_{21}, ..., b_{\ 1}) + a_2\,(b_{12}, b_{22}, ..., b_{\ 2}) + \cdots + a_m\,(b_{1m}, b_{2m}, ..., b_{\ m}) = \\ &= (a_1\,b_{11} + a_2\,b_{12} + \cdots + a_m\,b_{1m},\ a_1\,b_{21} + a_2\,b_{22} + \cdots + a_m\,b_{2m},\ ..., \\ &\quad a_1\,b_{\ 1} + a_2\,b_{\ 2} + \cdots + a_m\,b_{\ m}) = \\ &= \left(\sum_{=1}^{m} b_1\ a\ ,\ \sum_{=1}^{m} b_2\ a\ ,\ ...,\ \sum_{=1}^{m} b\ \ a\ \right). \end{aligned}$$

De aquí se deduce que el elemento que ocupa el lugar $(i,\ )$ en es $\sum_{=1}^{m} b_i\ a\ $, que era lo que queríamos demostrar. La demostración de que $g\circ$ es una aplicación lineal se deja para el lector. ■

Para finalizar esta sección damos algunas propiedades de la composición de aplicaciones lineales y de la multiplicación de matrices. Ya sabemos que la propiedad *a o iativa* se cumple para la composición de aplicaciones y, por tanto, se cumple también para la multiplicación de matrices.

La propiedad conmutativa puede que no tenga sentido, como en el ejemplo I, en el que no puede calcularse , pero sí . Incluso si y pueden calcularse, la propiedad conmutativa no se cumple:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

La asociativa y otras propiedades de estas operaciones se resumen a continuación.

$(C_1)\ (h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$	$(C_1)\ (CB)A = C(BA)$
$(C_2)\ h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$	$(C_2)\ C(A+B) = CA + CB$
$(C_3)\ (h+g)\circ f = h\circ f + g\circ f$	$(C_3)\ (C+B)A = CA + BA$
$(C_4)\ (cg)\circ f = g\circ(cf) = c(g\circ f)$	$(C_4)\ (cB)A = B(cA) = c(BA)$

El producto de matrices nos permite escribir un sistema de ecuaciones lineales de una forma muy sencilla. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{11\ 1} + a_{12\ 2} + \cdots + a_{1n\ n} &= b_1\\ a_{21\ 1} + a_{22\ 2} + \cdots + a_{2n\ n} &= b_2\\ \vdots\qquad\ \ \vdots\qquad\qquad\ \ \vdots\ & \\ a_{m1\ 1} + a_{m2\ 2} + \cdots + a_{mn\ n} &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

de m ecuaciones lineales con n incógnitas, si escribimos

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\quad ,\quad {}^{\rightarrow} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ \cdots\\ n\end{pmatrix}\quad ,\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\vec{} = \vec{b}$$

es una forma abreviada de escribir (3.1).

EJEMPLO J. El sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2\ _1 + \ _2 - \ _3 = 1 \\ _1 \quad\quad + 2\ _3 = -2 \end{array}\right\}$$

se escribe con notación matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} _1 \\ _2 \\ _3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS 1.3

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son inyectivas, suprayectivas o biyectivas:

a) $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad ( ) = \ ^2$.

b) $g: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, g(n) = n^3 - n$.

c) $: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}, \quad ( ) = 2$, donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, ... y $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$.

2. Encontrar todas las biyecciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$ en sí mismo.

3. Dadas $: \to$ y $g: \to U$ demostrar que:

a) $, g$ inyectivas $\Rightarrow$ $g \circ$ inyectiva.

b) $, g$ suprayectivas $\Rightarrow$ $g \circ$ suprayectiva.

c) $, g$ biyectivas $\Rightarrow$ $g \circ$ biyectiva.

4. Dadas $( ) = \ ^2 + 7, g( ) = 3 \ - 5$ y $( ) =$ sen , funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, calcular:

a) $\circ g \circ$ **b)** $g \circ \ \circ g$ **c)** $g \circ \ \circ$.

5. Escribir las matrices de las siguientes aplicaciones:

a) $(_1, \ _2, \ _3) = (_1 + \ _2, 2\ _1 - \ _3)$.

b) $(_1, \ _2) = (_1 - \ _2, \ _1 + 2\ _2, 2\ _1 - 3\ _2)$.

c) $(_1, \ _2) = (_1, \ _2, \ _2, \ _1)$.

d) $(_1, \ _2, \ _3) = 3\ _1 - \ _2 + \ _3$.

6. Dada $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $(_1, \ _2) = (_1 + \ _2, 2\ _1 - \ _2)$, hallar la imagen mediante de las siguientes regiones:

a) $\{(_1, \ _2) : 1 \leqslant \ _1 \leqslant 2, 0 \leqslant \ _2 \leqslant 1\}$.

b) $\{(_1, \ _2) : -1 \leqslant \ _1 \leqslant 1, -1 \leqslant \ _2 \leqslant 1\}$.

7. Demostrar que $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$ *no* es lineal. Dibujar la imagen de la recta $t(1, 1)$ mediante .

8. Hallar la matriz de un giro de ángulo ϕ en sentido positivo en $\mathbb{R}^2$.

9. Hallar la matriz de la simetría con respecto al plano $= y$ en $\mathbb{R}^3$.

10. Dadas las matrices

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad = (3 \quad 2), \qquad = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcular:

a) $((\ +\ )\ )$ **b)** $(\ +\ )^2$ **c)** $((\ ^2 - G^2)\ )$ **d)** $(\ ^2 + \ ^2)3$

e) ^{2} **f)** $2\ (\ ^2 - G^2)$ **g)** G^5.

11. Dadas las aplicaciones lineales $(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, $g(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, 2x_1)$ y $(x_1, x_2) = (x_1, -x_2, x_1 - 3x_2)$, calcular:

a) $\circ(g +)$ **b)** $\circ g \circ g$ **c)** $\circ \circ g$.

12. Demostrar las propiedades (S_1), (S_2), (S_3) y (S_4) y (M_1), (M_2), (M_3) y (M_4) de la suma de aplicaciones y matrices y de la multiplicación de éstas por números reales.

13. Demostrar las propiedades (C_2), (C_3) y (C_4) de la composición de aplicaciones lineales y del producto de matrices.

14 Escribir en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + \ = 7 \\ -3y + 2 = 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x + 2 = 4 \\ 3y + 2x + \ = 1 \\ -7y = 3 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} a x + 3x - 2y = a^2 \\ 2x - ay + \ = 3 \\ y - x + a = a \end{array}\right\}$.

15. Desarrollar los siguientes sistemas escritos en forma matricial:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.4. INVERSA DE UNA APLICACIÓN E INVERSA DE UNA MATRIZ

Dada una aplicación $: \to$ decimos que $g: \to$ es *na inver a e* si:

a) $g \circ (\ ) = $, para todo $\in$, y

b) $\circ g(t) = t$, para todo $t \in$.

Si definimos ( ) = para todo ∈ e (*t*) = *t* para todo *t* ∈ (las cuales reciben el nombre de *a li a ione i enti a*) las condiciones anteriores **a)** y **b)** se escriben de la forma

$$g \circ \quad = \qquad \text{y} \qquad \circ g = \quad .$$

La inversa de una aplicación : → , si existe, es única. En efecto, si g_1, g_2 : → fueran dos inversas de , para todo *t* ∈ ,

$$g_1(t) = g_1 \circ \quad (t) = g_1 \circ (\quad \circ g_2)(t) = (g_1 \circ \quad)(g_2(t)) = \quad (g_2(t)) = g_2(t)$$

donde se ha usado la propiedad asociativa de la composición de funciones.

EJEMPLO A

1) Si ( ) = 2 + 3 es una aplicación de ℝ en ℝ, $g(\ ) = \frac{1}{2}\ - \frac{3}{2}$ es una inversa de , ya que

$$g \circ (\ ) = g(\ (\ )) = \frac{1}{2}\ (\ ) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(2\ + 3) - \frac{3}{2} =$$

y

$$\circ g(\ ) = \ (g(\ )) = 2g(\ ) + 3 = 2\left(\frac{1}{2}\ - \frac{3}{2}\right) + 3 = \quad .$$

2) Si : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la simetría con respecto a una recta, es su propia inversa, ya que

$$\circ \ = \ ^2 = \ _{\mathbb{R}^2}$$

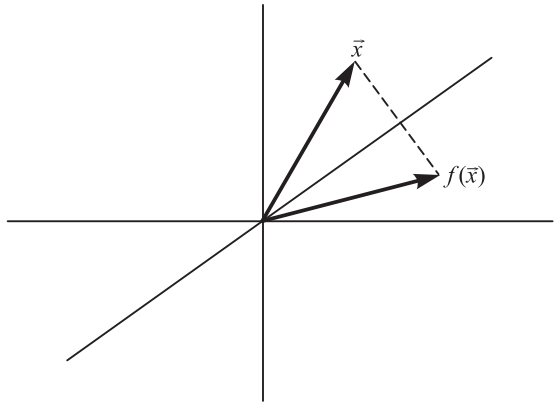


Figura 1.11

La inversa de una aplicación no siempre existe. Si : {1, 2, 3} → {1, 2} es la aplicación dada por (1) = (3) = 1, (2) = 2, no posee inversa. En efecto, si g : {1, 2} → {1, 2, 3} fuera una inversa de tendríamos que

$$1 = g \circ (1) = g \circ (3) = 3$$

lo cual es una contradicción.

Si existe la inversa de una aplicación se dice que es *invertible* y la inversa de se denota por $^{-1}$. Ya hemos probado que la inversa, si existe, es única.

A continuación damos una condición necesaria y suficiente para que exista la inversa de una aplicación.

Teorema 1.4.1

Sea : → una aplicación. La aplicación es invertible si y solo si es biyectiva.

Demostración. Supongamos, primero, que es invertible y sea g: → su inversa. Si ( ) = (′) tenemos que $g \circ$ ( ) = $g \circ$ (′) y, por tanto, = ′; esto prueba que es inyectiva. Para probar que es suprayectiva, sea $t \in$ y tomar = $g(t)$; entonces ( ) = ($g(t)$) = = ($\circ g$)(t) = t. Esto prueba que es biyectiva.

Supongamos ahora que es biyectiva. Dado $t \in$ definimos $g(t)$ = de manera que ( ) = t. La aplicación g es la inversa de , ya que

$$g \circ ( ) = g(( )) = g(t) =$$

y

$$\circ g(t) = (g(t)) = ( ) = t.$$

■

EJEMPLO B

1) Sea : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por ( ) = log (log denota logaritmo neperiano), donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los números reales positivos. Esta aplicación es inyectiva ya que log = log y ⇒ = y, y es suprayectiva ya que si $y \in \mathbb{R}$, tomamos = e^y y tenemos que log = log $e^y = y$. Por tanto, es invertible.

   Claramente, su inversa es la aplicación $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $g( ) = e$.

2) Sea : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por ( ) = 2 − 1. Esta aplicación es inyectiva ya que ( ) = (y) ⇔ 2 − 1 = 2y − 1, de donde se deduce que = y; es, además, suprayectiva ya que dado $y \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $\in \mathbb{R}$ tal que 2 − 1 = y; basta tomar = $\frac{1}{2}(y + 1)$. Por el Teorema 1.4.1, es invertible.

   Su inversa se ha encontrado en la demostración de la suprayectividad:

$$^{-1}( ) = \frac{1}{2}(+ 1).$$

* * *

Pasamos ahora a calcular la inversa de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$; comenzamos demostrando que si una aplicación lineal : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible, su inversa $^{-1}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es también una aplicación lineal.

Teorema 1.4.2

Si : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal invertible, $^{-1}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es también una aplicación lineal invertible y ($^{-1}$)$^{-1}$ = .

Demostración. Lo único que es necesario demostrar es que $^{-1}$ es lineal. Si $^{\rightarrow}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$(\ ^{-1}(^{\rightarrow} + \vec{y})) = \ \circ\ ^{-1}(^{\rightarrow} + \vec{y}) = {}^{\rightarrow} + \vec{y} = \ \circ\ ^{-1}(^{\rightarrow}) + \ \circ\ ^{-1}(\vec{y}) =$$
$$= (\ ^{-1}(^{\rightarrow})) + (\ ^{-1}(\vec{y})) = (\ ^{-1}(^{\rightarrow}) + \ ^{-1}(y)).$$

Puesto que es inyectiva por el Teorema 1.4.1,

$$^{-1}(^{\rightarrow} + \vec{y}) = \ ^{-1}(^{\rightarrow}) + \ ^{-1}(\vec{y}).$$

Finalmente, si $^{\rightarrow} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$,

$$(\ ^{-1}(r^{\rightarrow})) = \ \circ\ ^{-1}(r^{\rightarrow}) = r^{\rightarrow} = r\ \circ\ ^{-1}(^{\rightarrow}) = r\ (\ ^{-1}(^{\rightarrow})) = \ (r\ ^{-1}(^{\rightarrow}))$$

y de nuevo puesto que es inyectiva debido al Teorema 1.4.1 se tiene que

$$^{-1}(r^{\rightarrow}) = r\ ^{-1}(^{\rightarrow}).$$

Estas dos propiedades son suficientes para asegurar que $^{-1}$ es lineal debido al Teorema 1.3.2.

* * *

Si $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, su matriz asociada es de orden $n \times n$ y, por tanto, el número de filas coincide con el número de columnas. Estas matrices se denominan *a ra a* y se dicen de *or en n* en lugar de orden $n \times n$.

Si $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible, su inversa $^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es también una aplicación lineal y su matriz asociada es también cuadrada y del mismo orden que . La matriz recibe el nombre de *inver a e* y se denota mediante $= \ ^{-1}$. Como la inversa de una aplicación es única, la inversa de una matriz es también única.

Puesto que la matriz de $\circ\ ^{-1}$ es y la matriz de $^{-1} \circ$ es (ver los resultados obtenidos en la sección 1.3) se tiene que es la inversa de si y solo si

$$= {}_n \quad \text{y} \quad = {}_n$$

donde ${}_n$ es la matriz identidad de orden n, es decir, la matriz con *no* en la diagonal principal y *ero* en el resto:

$${}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO C. Intentamos calcular la inversa de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sea $= \begin{pmatrix} {}_1 & {}_2 \\ {}_3 & {}_4 \end{pmatrix}$ su inversa. Puesto que $= {}_2$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 & {}_2 \\ {}_3 & {}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\ {}_1 + \ {}_3 & 2\ {}_2 + \ {}_4 \\ 4\ {}_1 + 3\ {}_3 & 4\ {}_2 + 3\ {}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos de las matrices se tienen los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,{}_1 + \;\; {}_3 = 1 \\ 4\,{}_1 + 3\,{}_3 = 0 \end{array}\right\} (4.1) \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} 2\,{}_2 + \;\; {}_4 = 0 \\ 4\,{}_2 + 3\,{}_4 = 1 \end{array}\right\} (4.2).$$

Para resolver (4.1) escribimos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{i)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

de donde deducimos ${}_1 = 3/2$, ${}_3 = -2$.

Para resolver (4.2) escribimos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{i)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

de donde deducimos ${}_2 = -1/2$, ${}_4 = 1$.

Por tanto:

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que $= {}_2$:

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 3/2-3/2 \\ -4+4 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* * *

En el ejemplo anterior se observa que las operaciones elementales que se han realizado para resolver los sistemas (4.1) y (4.2) son las mismas. Esto sugiere que el cálculo de la inversa de podría haberse realizado a la vez con una matriz que incluyera las columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que es una matriz de orden 2×4 de la forma $(\;\; | \;\; {}_2)$. Realizando operaciones elementales en esta matriz se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{iii)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{i)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

es decir, $(\;{}_2 | \;\; {}^{-1})$.

Esta forma de proceder se puede generalizar para matrices $n \times n$. Veámoslo en un ejemplo 3×3.

EJEMPLO D. Para calcular la inversa de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

escribimos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array}\right).$$

Por tanto, es invertible y

$$^{-1} = \begin{pmatrix} -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

(Comprobarlo calculando $^{-1} \cdot$.)

EJEMPLO E. Tratamos de encontrar la inversa de la aplicación $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(_1, _2) = (3 _1 + 2 _2, _1 + 2 _2)$. Puesto que la matriz de es

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$(\mid _2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{array}\right).$$

Por tanto, $^{-1}$ tiene como matriz

$$^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix};$$

en consecuencia:

$$^{-1}(\ _1,\ _2) = \left(\frac{1}{2}\ _1 - \frac{1}{2}\ _2,\ -\frac{1}{4}\ _1 + \frac{3}{4}\ _2\right)$$

(¡comprobarlo!).

* * *

El lector se preguntará si existe alguna forma de determinar si una matriz cuadrada posee inversa sin necesidad de calcularla. La respuesta es afirmativa y la produce el teorema de Rouché-Frobenius (ver Teorema 1.2.4).

Supongamos que $= (a_i)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ =1,\ldots,n}}$ y $= (\ _i)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ =1,\ldots,n}}$ es la inversa de ; puesto que $\cdot = \ _n$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \cdots \\ \ _n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.3}$$

lo cual constituye n sistemas de n ecuaciones, cada uno con n incógnitas y todos con la misma matriz de coeficientes .

Si posee una inversa, como es única, cada uno de los n sistemas anteriores es compatible determinado. Por el teorema de Rouché-Frobenius se ha de tener que $r(\ ) = n$.

Recíprocamente, si $r(\ ) = n$, cada uno de los sistemas anteriores posee solución única, ya que

$$r(\ ) = r\left(\left|\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right.\right) = n.$$

Además, para calcular las columnas de la matriz tenemos que resolver cada sistema de (4.3) realizando las mismas operaciones elementales con las filas de la matriz . Es decir, basta aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz (| $_n$).

Por tanto, hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 1.4.3

Una matriz cuadrada de orden n es invertible si, y solo si, $r(\ ) = n$. En este caso, para calcular la inversa de se reduce la matriz (| $_n$) a la matriz ($_n$|) mediante operaciones elementales con sus filas, y entonces $^{-1} =$.

Como aplicación, observar que la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

no posee inversa, ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, $r(\ ) = 2 \neq 3$.

* * *

Proposición 1.4.4

Si $\ :\ \to\ $ y $g:\ \to U$ son invertibles, $g \circ\ :\ \to U$ es invertible y $(g \circ\ )^{-1} = {}^{-1} \circ g^{-1}$.

Nota. De la Proposición 1.4.4 se deduce que si y g son aplicaciones lineales con matrices y , respectivamente, $(\ )^{-1} = {}^{-1}\ {}^{-1}$, siempre que existan las inversas.

Demostración. Basta probar que $({}^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ\ ) =$ y $(g \circ\ ) \circ ({}^{-1} \circ g^{-1}) = {}_{U}$. Tenemos que si $\in$ se tiene

$$({}^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ\ )(\ ) = {}^{-1}(g^{-1}(g(\ (\ )))) = {}^{-1}(g^{-1} \circ g(\ (\ ))) = {}^{-1}(\ (\ )) =$$

y análogamente, si $\in U$ se tiene

$$(g \circ\ ) \circ ({}^{-1} \circ g^{-1})(\ ) = \ .$$

■

EJEMPLO F. Tratemos de calcular $(\ )^{-1}$, donde

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$${}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{(ejemplo C)} \quad \text{y} \quad {}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \text{(ejemplo E)}$$

tenemos que

$$(\ )^{-1} = {}^{-1}\ {}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1 & -1/4 - 1/2 \\ -3/8 - 6/4 & 1/8 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ -15/8 & 7/8 \end{pmatrix}.$$

* * *

Para finalizar esta sección aplicamos los conocimientos adquiridos para resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales.

Supongamos que es una matriz cuadrada de orden n e invertible y tratemos de resolver el sistema $\vec{} = \vec{b}$. Si $^{-1}$ denota la inversa de tenemos que

$$^{-1}(\vec{}) = {}^{-1}\vec{b}$$

y, por tanto, $\vec{} = {}^{-1}\vec{b}$.

EJEMPLO G. Tratemos de resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dado en forma matricial. La matriz de este sistema es invertible como se ha visto en el ejemplo D, en donde también se ha calculado su inversa. Por tanto:

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(¡comprobar el resultado!).

EJERCICIOS 1.4

1. Demostrar que las aplicaciones $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $({}_1, {}_2) = ({}_1 + {}_2, {}_1 + 2\,{}_2)$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g({}_1, {}_2) = (2\,{}_1 - {}_2, -{}_1 + {}_2)$ son inversas una de la otra.

2. Dadas $( ) = 3 - 2$ y $g( ) = \cos$, aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, calcular $g \circ {}^{-1}$ y ${}^{-1} \circ {}^{-1} \circ g$.

3. Se denomina **rango de una aplicación lineal** al rango de su matriz asociada. Calcular el rango de las siguientes aplicaciones lineales:

a) $({}_1, {}_2) = (0, {}_1, {}_2)$.

b) $({}_1, {}_2, {}_3) = ({}_1 + {}_2 + {}_3, {}_1 + 2\,{}_2 + 3\,{}_3, {}_1 - {}_2 - 3\,{}_3)$.

c) $({}_1, {}_2, {}_3) = ({}_1 + 2\,{}_2 + {}_3, -{}_1 + 2\,{}_2 + {}_3)$.

d) $({}_1, {}_2) = ({}_1 + {}_2, 0, {}_1 + {}_2)$.

e) $({}_1, {}_2, {}_3, {}_4) = ({}_1\,{}_1 + {}_2, {}_1 + {}_2 + {}_3, {}_1 + {}_2 + {}_3 + {}_4)$.

4. Encontrar, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Encontrar la inversa de cada una de las siguientes matrices de elementos reales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

6. Encontrar, si es posible, la inversa de las siguientes aplicaciones lineales:

a) $(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

b) $(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, $\in \mathbb{R}$.

7. Encontrar $^{-1}$ y resolver el sistema $^{\rightarrow} = \vec{b}$ para:

a) $= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix}$

c) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -2/6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Biografía

arl rie ri Ga na i el 30 de abril de 1777 en Brunswick, un pueblecito que actualmente pertenece a Alemania. Impresionados por su habilidad para las matemáticas y los idiomas, su madre y sus profesores le recomendaron al Duque de Brunswick, quien le proporcionó la ayuda económica necesaria para estudiar en la Universidad de Göttingen.

Cuando solamente tenía 19 años Gauss realizó uno de los descubrimientos más espectaculares de las matemáticas del siglo XVIII: fue el primer matemático que construyó un polígono regular de 17 lados utilizando solamente regla y compás. Euclides sabía como construir polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados, así como aquellos que se obtienen duplicando estos. Animado por su descubrimiento, Gauss logró encontrar una solución algebraica al problema de construir con regla y compás un polígono regular de n lados y desarrolló un criterio basado en la teoría de números con el cual puede decidirse si un polígono regular de un cierto número de lados puede construirse geométricamente.

En 1799 se le concedió el título de Doctor por la Universidad de Helmstedt (Alemania). En su tesis, Gauss dio una demostración del teorema fundamental del álgebra, en el que se muestra que toda ecuación algebraica con coeficientes complejos tiene soluciones complejas. Los números complejos, cuya formulación actual se debe, entre otros, a Gauss, se estudiarán en el Capítulo 3.

A los 24 años publicó una de las obras más completas de la historia de las matemáticas; se tituló *i i itione ritmeti ae* y en ella formuló conceptos y métodos de enorme importancia en el desarrollo posterior de la Teoría de Números.

El Duque de Brunswick financió tan generosamente sus investigaciones que en 1803 pudo renunciar a una oferta de profesor en la Academia de Ciencias de San Petersburgo. En 1807 fue

nombrado profesor de Astronomía y director del observatorio de la Universidad de Göttingen, en donde permaneció durante toda su vida.

En 1801, Gauss tuvo la oportunidad de aplicar su habilidad matemática y sus ideas en el campo de la astronomía. El primer día del año fue descubierto un asteroide, que posteriormente sería llamado Ceres. A pesar de que pudo ser observado durante 40 días, ningún astrónomo fue capaz de calcular su órbita. Con solamente tres observaciones, Gauss desarrolló una técnica para calcular su órbita de manera que Ceres pudo ser localizado fácilmente a finales de 1801 y comienzos de 1802. El método utilizado en sus cálculos fue publicado en 1809 en su libro *eoria ot or or m oele ti m*; este método continúa utilizándose actualmente, con ligeras modificaciones, en los cálculos que se realizan con ordenadores.

Carl Friedrich Gauss contribuyó de manera decisiva al desarrollo de varias ramas de la matemática durante el siglo XIX.

Murió el 23 de febrero de 1855 y poco después de su muerte se pusieron en circulación varias monedas en su honor.

Capítulo 2

Determinantes y sus aplicaciones.

2.1. Determinantes de matrices de orden 2 y de orden 3.

2.2. Definición general de determinante. Propiedades.

2.3. Determinante de un producto de matrices. Cálculo de determinantes de orden *n*.

2.4. Inversa de una matriz. Regla de Cramer.

2.5. Rango de una matriz. Resolución de sistemas compatibles e indeterminados.

2.6. La factorización *LU*. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.7. Determinantes y permutaciones.

Introducción

En el capítulo anterior se ha llegado a la conclusión de que un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$^{-} = \vec{b}$$

es muy fácil resolver si se conoce la inversa de la matriz . También allí se dio un método para calcular la inversa de una matriz, basado en la realización de operaciones elementales con sus filas.

En este capítulo introduciremos el concepto de *eterminante e na matri* , que nos permitirá obtener una fórmula para calcular la matriz inversa de una dada. Las propiedades de los determinantes, básicas en este capítulo y en muchos de los restantes, serán estudiadas minuciosamente.

En particular, estableceremos la relación entre el rango de una matriz y la anulación de ciertos determinantes, lo cual nos permitirá encontrar una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones compatibles.

2.1. DETERMINANTES DE MATRICES DE ORDEN 2 Y DE ORDEN 3

Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a\ _1 + b\ _2 = e_1 \\ \ _1 + \ \ _2 = e_2 \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas, intentamos buscar condiciones sobre los coeficientes del sistema para que posea solución única. Por el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) esto se cumple solamente cuando

$$r\begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix} = 2.$$

Realizando operaciones elementales con las filas de la matriz de los coeficientes, se tiene:

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix} \xrightarrow{1;a\ 2} \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{2-\ 1} \begin{pmatrix} a & & b \\ 0 & a & -b \end{pmatrix}.$$

Si $a\ -b$ es nulo, la matriz de los coeficientes del sistema tiene rango inferior a 2 y, por tanto, el sistema (1.1) no tiene solución única.

Bajo la condición de que el número $a\ -b$ sea *no* nulo, el sistema (1.1) tiene solución única. Multiplicando la primera ecuación por y la segunda por b y restándolas se obtiene

$$(a\ -b\ )\ _1 = e_1\ -e_2b.$$

Por tanto:

$$_1 = \frac{e_1\ -e_2b}{a\ -b}.$$

Multiplicando la primera ecuación por y la segunda por a y restando la primera de la segunda se obtiene

$$(a\ -b\ )\ _2 = ae_2 -\ e_1 .$$

Por tanto,

$$_2 = \frac{ae_2 -\ e_1}{a\ -b}.$$

Dada la matriz

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}$$

el número $a\ -b$, a ella asociado, recibe el nombre de *eterminante e* y se denota mediante | |. Por tanto, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1

El sistema (1.1) posee solución única si y solo si el determinante de la matriz de sus coeficientes es no nulo. Además, sus soluciones se calculan mediante las fórmulas

$$_1 = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & b \\ e_2 & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad _2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e_1 \\ & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix}}.$$

Las fórmulas anteriores reciben el nombre de *regla e ramer* para la resolución de sistemas compatibles determinados de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Observar que las soluciones se obtienen como fracciones que tienen como denominador el determinante de ; el numerador de la fracción de $_1$ es el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la primera columna de la matriz por el vector columna que aparece a la derecha del sistema (1.1); el numerador de la fracción que determina $_2$ es el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la segunda columna de la matriz por el vector columna que aparece a la derecha del sistema (1.1).

EJEMPLO A. El sistema

$$\left.\begin{aligned} 2\ _1 -\ \ _2 &= 1 \\ \ _1 + 3\ _2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tiene solución única ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 1 = 6 + 1 = 7.$$

Su solución es

$$_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{3}{7} \quad ; \quad _2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-1}{7}.$$

* * *

En el siguiente resultado se reunen propiedades importantes de los determinantes.

Teorema 2.1.2

i) $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ & \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ +\ ' & +\ ' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ ' & ' \end{vmatrix}$.

ii) Si es la matriz que se obtiene a partir de una matriz multiplicando una cualquiera de sus filas por un número real r se tiene que $|\ | = r|\ |$.

iii) Si es la matriz que se obtiene a partir de intercambiando dos de sus filas se tiene que $|\ | = -|\ |$.

iv) Si es la matriz que se obtiene a patir de sumando un múltiplo de una fila de a otra fila de se tiene que $|\ | = |\ |$.

v) El determinante de la matriz identidad es 1.

Nota. Las propiedades *i*) y *ii*) son las que determinan la linealidad por filas del determinante. Las propiedades *ii*), *iii*) y *iv*) nos muestran el comportamiento del determinante frente a las operaciones elementales con las filas de una matriz.

Demostración. Únicamente demostraremos la primera parte de *i*) dejando el resto de las demostraciones para el lector debido a su sencillez. Utilizando la definición de determinante se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ & \end{vmatrix} = (a+a') \ - \ (b+b') = a \ + a' \ - \ b - \ b' =$$

$$= (a \ - \ b) + (a' \ - \ b') = \begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ & \end{vmatrix}$$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Observación. El determinante de una matriz de orden 2 con dos filas iguales es nulo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

* * *

A continuación pasamos a estudiar una posible definición del determinante de una matriz de orden 3. Para ello supongamos que el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2 + a_{13}\ _3 &= b_1 \\ a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2 + a_{23}\ _3 &= b_2 \\ a_{31}\ _1 + a_{32}\ _2 + a_{33}\ _3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene solución única. Para encontrar esta solución multiplicamos la primera ecuación por

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

la segunda por

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y la tercera por

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

y las sumamos. Después de realizadas las simplificaciones adecuadas se obtiene:

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)_{1} =$$

$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Por analogía con el caso del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas denominamos *eterminante e la matri*

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a la expresión que multiplica a $_1$ en la fórmula anterior.

Una forma sencilla de recordar esta definición es haciendo uso de los conceptos de matriz *a nta* de un elemento y de *menor*. Dada una matriz $(a_i)_{i, \ = 1, 2, \ldots, n}$ se denomina *matri a n ta* del elemento que ocupa el lugar $(i, \ )$ a la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna de la matriz dada, y se denota por $_i$. El determinante de $_i$ se denomina *menor* del elemento que ocupa el lugar $(i, \ )$, es decir, a_i.

Por ejemplo, en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-2} \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & \boxed{-1} & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A_{12}| = 14 - 15 = -1$$

mientras que

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & -2 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{3} \\ 5 & \boxed{-1} & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A_{22}| = 7 + 10 = 17.$$

Con estas notaciones podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1.3 (Determinante de una matriz de orden 3)

Dada la matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definimos su **determinante** mediante la fórmula

$$| \ | = a_{11} | \ _{11}| - a_{21} | \ _{21}| + a_{31} | \ _{31}|.$$

EJEMPLO B

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{2} & 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{-1} & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 3 \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (4) + (-1) \cdot 6 = -15.$$

* * *

Si desarrollamos la expresión que nos da el determinante de una matriz de orden 3 se obtienen los siguientes seis productos:

$$\begin{aligned} | \ | &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + \\ &+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + \\ &+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Los términos positivos de esta expresión son los productos de los términos de la diagonal principal de y los productos de los términos que ocupan los vértices de los triángulos de la figura adjunta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (términos positivos).

Un resultado análogo se obtiene para los términos negativos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (términos negativos).

Esta regla nemotécnica puede emplearse para calcular determinantes, pero solo funciona con matrices de orden 3.

EJEMPLO C. Los términos positivos del determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-2)(-2)(-1) + 5 \cdot 1 \cdot 3 = 11$$

y los términos negativos son

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 5(-2) \cdot 1 = -12.$$

Por tanto, $|\ \ | = 11 - (-12) = 23$ (¡comprobar el resultado utilizando la definición!).

* * *

A continuación probamos que el determinante de una matriz de orden 3 tiene propiedades análogas a las enunciadas en el Teorema 2.1.2 para determinantes de matrices de orden 2. Concretamente:

Teorema 2.1.4

Las propiedades análogas a *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *v*) del Teorema 2.1.2 son ciertas para matrices de orden 3.

Demostración. *i*) Si la primera fila es suma de dos se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+a'_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} +$$

$$+ a'_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

en donde en la segunda igualdad se ha utilizado la propiedad *i*) del Teorema 2.1.2. Igualmente puede demostrarse cuando la suma aparece en las filas segunda o tercera.

ii) Si multiplicamos una fila de una matriz (por ejemplo, la segunda) por un número real r se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} ra_{22} & ra_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ra_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ ra_{22} & ra_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= ra_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ra_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + ra_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

en donde se ha utilizado la propiedad *ii*) del Teorema 2.1.2.

iii) Intercambiando, por ejemplo, la primera y la segunda fila de la matriz obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

iv) Tomemos

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ra_{11} & a_{32} + ra_{12} & a_{33} + ra_{13} \end{vmatrix}$$

que se ha obtenido de sumando a la tercera fila r veces la primera. Debido a las propiedades *i*) y *ii*) ya demostradas se tiene que

$$|\ \ | = |\ \ | + r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = |\ \ | + r\left[a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right] = |\ \ | + r\left[-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right] = |\ \ |$$

que era lo que se quería demostrar.

La propiedad *v*) es inmediata a partir de la definición. ■

Terminamos esta sección con un ejemplo que muestra cómo pueden utilizarse las propiedades *iii*), *iv*) y *v*) del Teorema 2.1.4 para calcular determinantes.

EJEMPLO D

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{iv)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{iv)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{iv)}{=\!=} (-3)(5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{iv)}{=} -15\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{iv)}{=} -15\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{v)}{=} -15\cdot 1 = -15$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo B.

EJERCICIOS 2.1

1. Calcular los siguientes determinantes de matrices de orden 2:

   a) $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}a & 1\\ a & b\end{vmatrix}$

   d) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{vmatrix}$.

2. Hallar la inversa de las matrices c) y d) anteriores.

3. Utilizar la regla de Cramer para resolver los sistemas $\bar{} = \vec{b}$, donde

   $$= \begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

   y

   a) $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix}\pi\\ \pi\end{pmatrix}$ c) $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

4. Utilizar la definición de determinante para calcular:

   a) $\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 7 & 0 & 7\\ 1 & 4 & -7\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ & y & \\ 2 & y^2 & 2\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

5. Calcular a) y b) anteriores utilizando la regla nemotécnica para calcular determinantes de orden 3.

6. Calcular el determinante de la matriz c) del ejercicio 4 realizando operaciones elementales en sus filas y utilizando las propiedades de los determinantes.

7. Calcular

   $$\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 1\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}.$$

8. Demostrar que si a, b y son números reales, las raíces de la ecuación

   $$\begin{vmatrix}a - & b\\ b & -\end{vmatrix} = 0$$

   son reales.

2.2. DEFINICIÓN GENERAL DE DETERMINANTE. PROPIEDADES

En esta sección daremos la definición de determinante de una matriz cuadrada de orden n de la forma

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esta definición es la generalización de la definición de determinante de matrices de orden 3 dada en la sección 2.1. Recordemos que $|\ _i|$ denota el determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna de la matriz ; $|\ _i|$ se denomina *menor* del elemento que ocupa el lugar $(i,\ )$ en .

Definición 2.2.1 (Determinante de una matriz de orden n)

Dada una matriz como arriba, su determinante se define de la forma

$$|\ | = a_{11}|\ _{11}| - a_{21}|\ _{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|\ _{n1}|.$$

Observación. En la definición que acabamos de dar el determinante de una matriz de orden n se reduce a calcular n determinantes de matrices de orden $n-1$; cada determinante de orden $n-1$ se reduce a calcular $n-1$ determinantes de orden $n-2$. Continuando este proceso se llega a obtener determinantes de orden 2, que son fáciles de calcular.

EJEMPLO A

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 12 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 2 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 18 + 2 = -4.$$

Por tanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 0 + 4 \cdot 2 - 2(-4) = 8 + 8 + 8 = 24 .$$

* * *

El cálculo de determinantes utilizando la definición dada resulta larguísimo cuando se trata de matrices de orden elevado. El estudio de las propiedades del determinante aliviará este problema.

Para demostrar estas propiedades utilizaremos un razonamiento denominado *m to o e in i n.*

Este método puede aplicarse cuando se trata de demostrar una propiedad (n) que depende de un número natural n. Para ello se procede como sigue:

1.º Se demuestra que (n) es cierta para un cierto número natural n_0, que generalmente es pequeño.

2.º Se acepta que la propiedad es cierta para todo número $> n_0$ e inferior a n (*i te i e in i n*) y utilizando esto se demuestra que también es cierta para n.

Estos dos resultados permiten concluir que la propiedad es cierta para todo $n \geqslant n_0$. En efecto, por 1.º es cierta para n_0; utilizando 2.º es también cierta para $n_0 + 1$; utilizando de nuevo 2.º, (n) es cierta para $n_0 + 2$, y este proceso puede continuarse hasta alcanzar cualquier número natural n por muy elevado que sea.

Mostraremos con un ejemplo sencillo cómo se aplica el método de inducción. Se trata de demostrar que *la ma e lo n rimero n mero im are e* n^2.

Sea $(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ la propiedad que queremos demostrar.

1.º $(1) = 1 = 1^2$ es cierta.

2.º Supongamos que $(\ )$ es cierta para todo $< n$, es decir se tiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \ - 1) = \ ^2, \qquad = 1, 2, 3, ..., n - 1.$$

Ahora,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) =$$

$$= (1 + 3 + 5 + \cdots + [2(n - 1) - 1]) + (2n - 1) \overset{(\ )}{=\!=} (n - 1)^2 + (2n - 1) =$$

$$= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$$

que era lo que queríamos demostrar. En la igualdad (*) es donde se ha utilizado la hipótesis de inducción, ya que se ha aplicado que $(n - 1)$ es cierta.

Algunos resultados que pueden probarse mediante el método de inducción se proponen como ejercicios al final de esta sección.

* * *

Propiedad 1 (P.1)

Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es nulo.

Demostración. Esta propiedad es fácilmente comprobable para matrices de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ & \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad - 0 \cdot \quad = 0.$$

Aceptemos que es cierta para toda matriz de orden $\leqslant n-1$ y tratemos de demostrarlo para una matriz de orden n con una fila de ceros. Supongamos que los ceros ocupan la fila i de la matriz, es decir:

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

De la definición de determinante deducimos

$$| \ | = a_{11} | \ _{11}| - \cdots + (-1)^i a_{i-1,1} | \ _{i-1,1}| + (-1)^{i+1} 0 | \ _{i,1}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n,1} | \ _{n1}|.$$

Todas las adjuntas $_1$ con $\neq i$ tienen una fila de ceros y, por tanto, $| \ _1| = 0$ por la hipótesis de inducción. Para $= i$, $| \ _{i1}|$ está multiplicado por 0 y, por tanto, todos los sumandos de la igualdad anterior son nulos. ■

Propiedad 2 (P.2)

$$| \ | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = | \ | + | \ |$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Demostración. Esta propiedad se ha demostrado para matrices de orden 2 y de orden 3 en la sección anterior. Aceptemos que es cierta para toda matriz de orden menor que n. Tenemos

$$| \ | = a_{11}| \ _{11}| - \cdots + (-1)^{i+1}[a_{i1} + b_{i1}]| \ _{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}| .$$

Cada adjunta $\ _i$ con $\ \neq i$ es una matriz de orden $n-1$ con una fila que es una suma; por tanto:

$$| \ _1| = | \ _1| + | \ _1|$$

donde $\ _1$ y $\ _1$ son adjuntas de $\ $ y $\ $, respectivamente. Sustituyendo este resultado en la igualdad anterior se tiene:

$$| \ | = a_{11}[| \ _{11}| + | \ _{11}|] - \cdots + (-1)^{i+1}[a_{i1} + b_{i1}]| \ _{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}[| \ _{n1}| + | \ _{n1}|] .$$

Puesto que $| \ _{i1}| = | \ _{i1}| = | \ _{i1}|$ se tiene que

$$\begin{aligned} | \ | &= a_{11}| \ _{11}| - \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}| \ _{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}| + \\ &+ a_{11}| \ _{11}| - \cdots + (-1)^{i+1}b_{i1}| \ _{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}| = | \ | + | \ |. \end{aligned}$$

■

Propiedad 3 (P.3)

Si $\ $ es la matriz que se obtiene a partir de una matriz $\ $ multiplicando por un número real r una de sus filas se tiene que $| \ | = r| \ |$.

Demostración. En la sección anterior se demostró que el resultado es cierto para matrices de orden 2 y de orden 3. Aceptemos la hipótesis de inducción y supongamos, para simplificar la demostración que

$$= \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$| \ | = ra_{11}| \ _{11}| - a_{21}| \ _{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}| .$$

La adjunta $\ _{11}$ coincide con $\ _{11}$ y, por tanto, $| \ _{11}| = | \ _{11}|$; las adjuntas $\ _1$ con $\ \neq 1$ tienen una fila que está multiplicada por r y, por tanto, $| \ _1| = r| \ _1|$ debido a la hipótesis de inducción. Sustituyendo estos resultados en la igualdad anterior obtenemos

$$| \ | = ra_{11}| \ _{11}| - ra_{21}| \ _{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}ra_{n-1}| \ _{n-1}| = r| \ |.$$

■

Propiedad 4 (P.4)

Si $\ $ es la matriz que se obtiene de $\ $ intercambiando dos de sus filas, se tiene que $| \ | = -| \ |$.

Demostración. Comenzaremos demostrando el resultado cuando las dos filas que se intercambian son consecutivas. Al igual que en las demostraciones anteriores utilizaremos el método de demostración por inducción. El resultado es cierto para matrices de orden 2 y de orden 3 puesto que se ha demostrado en la sección anterior. Sea, por tanto:

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz que se ha obtenido de intercambiando las filas i e $i+1$. Tenemos que

$$| \ | = a_{11}| \ _{11}| - \cdots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}| \ _{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i1}| \ _{i+1,1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}|.$$

Se tiene que

$$_{i1} = \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \ _{i+1,1} \quad \text{y} \quad \ _{i+1,1} = \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \ _{i1}.$$

Por otro lado, $_1$ con $\neq i, i+1$, es una matriz de orden $n-1$ con dos filas consecutivas intercambiadas con respecto a $_1$; por la hipótesis de inducción tenemos que $|\ _1| = -|\ _1|$.

Sustituyendo estos resultados en la igualdad anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} | \ | &= -a_{11}| \ _{11}| + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}| \ _{i+1,1}| + (-1)^{i+2}a_{i1}| \ _{i1}| + \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}| = \\ &= -\,[a_{11}| \ _{11}| - \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}| \ _{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i+1,1}| \ _{i+1,1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}| \ _{n1}|] \\ &= -|\ |. \end{aligned}$$

Hemos demostrado el resultado cuando se intercambian dos filas consecutivas. Supongamos ahora que se intercambian las filas i y $= i +$ de una matriz. Sea

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz que se obtiene de intercambiando las filas i y . La matriz puede obtenerse a partir de realizando varios intercambios de filas consecutivas. En primer lugar, la fila i de puede colocarse en la fila $= i +$ realizando intercambios de filas consecutivas; se obtiene así la matriz

$$^{-} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1} & \cdots & a_{n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } \quad = i + \\ \\ \end{matrix}$$

Para pasar de $^{-}$ a mediante intercambios de filas consecutivas es necesario intercambiar la fila $(a_1, ..., a_n)$ que ocupa el lugar $-1 = i + (-1)$, -1 veces para colocarla en la fila i. En definitiva, de se pasa a mediante $+ (-1) = 2 - 1$ intercambios de filas consecutivas. Cada uno de estos intercambios cambia de signo el determinante y puesto que se hacen un número impar de intercambios se tiene que

$$| \ | = (-1)^{2 \ -1} | \ | = - | \ |. \qquad \blacksquare$$

Propiedad 5 (P.5)

Si una matriz tiene dos filas iguales, su determinante es nulo.

Demostración. Sea

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

una matriz con dos filas iguales, a saber, las filas i y ; intercambiando estas filas se obtiene la misma matriz; sin embargo, por la propiedad 4, el determinante cambia de signo. Por tanto, $| \ | = - | \ |$; de aquí se deduce que $| \ | = 0$, que era lo que queríamos demostrar. $\blacksquare$

EJEMPLO B. La matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante nulo ya que su segunda y su cuarta fila coinciden.

Propiedad 6 (P.6)

Si es la matriz que se obtiene a partir de sumando un múltiplo de una fila de a otra fila de se tiene que | | = | |.

Demostración. Multipliquemos la fila i de por r y sumémosla a la fila para obtener ; por las propiedades 2 y 3:

$$|B| = |A| + r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } k \\ \\ \end{matrix}$$

La matriz cuyo determinante aparece el último en la igualdad anterior tiene dos filas iguales y, por tanto, es nulo por la propiedad 5. Este razonamiento demuestra el resultado. ■

Las propiedades 3 y 6 de los determinantes junto con

$$|\ _n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{2.1}$$

permiten calcular determinantes de una matriz cuadrada de cualquier orden. El siguiente ejemplo muestra este hecho.

En este ejemplo y en otros de cálculo de determinantes en los que se considere necesario, se utilizarán los siguientes símbolos aclaratorios de las igualdades que se escriben:

1) r significa que la -ésima fila de la matriz ha sido multiplicada por el número real r.
2) $+ r$ significa que a la -ésima fila de la matriz se le ha sumado r veces la fila .
3) La propiedad que utilicemos en cada caso se indicará bajo el signo de igualdad.

EJEMPLO B

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{{}_3-4\ {}_1 \\ {}_4-2\ {}_1 \\ \text{P.6}}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \end{vmatrix} \overset{\substack{{}_3+3\ {}_2 \\ {}_4+\ {}_2 \\ \text{P.6}}}{=\!=}$$

$$\overset{\substack{{}_4-\frac{1}{2}\ {}_3 \\ \text{P.6}}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{P.3}}{=\!=} 2\cdot(-6)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Aplicar varias veces P.6}}{=\!=\!=\!=} 2\cdot(-6)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2.1)}{=\!=} 24.$$

Observar que el resultado es el mismo que el obtenido en el ejemplo A.

* * *

Nota. En el ejemplo anterior solamente se han necesitado P.3, P.6 y (2.1) para calcular el determinante. Este es un hecho general, es decir, las propiedades P.3, P.6 y (2.1) determinan de manera única un número al cual se le denomina «determinante» y que satisface todas las propiedades y fórmulas que daremos aquí. El lector interesado puede encontrar una exposición de este tipo en el libro de A. G. Kurosch, *r o e lgebra erior*, Editorial Mir, 1977.

En el ejemplo B puede observarse que cuando tenemos que calcular el determinante de una matriz como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

el resultado se obtiene multiplicando los elementos de su diagonal principal, es decir, la diagonal de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

Este es un resultado general. Una matriz se dice *triang lar erior* si todos sus elementos por debajo de su diagonal principal son nulos.

Propiedad 7 (P.7)

El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de su diagonal.

Demostración. Sea

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz triangular superior. De la definición de determinante aplicada repetidas veces se tiene:

$$| \ | = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad \blacksquare$$

De la propiedad 7 se deduce que el determinante de una matriz diagonal, es decir, una matriz cuyos elementos son todos nulos excepto los de su diagonal principal, es el producto de los elementos de la diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Es conveniente que el ejercicio siguiente se realice en este momento y sin conocer más propiedades de los determinantes, puesto que más adelante resultará muy sencillo.

er i io. Una matriz *triang lar in erior* es una matriz que tiene todos sus términos nulos por encima de la diagonal principal. Demostrar que el determinante de una matriz triangular inferior es el producto de los elementos de la diagonal principal.

EJEMPLO C. Para calcular el determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & -4 \\ 6 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la reducimos a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales en sus filas y aplicamos las propiedades ya conocidas de los determinantes. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{4-2\ 1 \\ 5-2\ 3}}{\underset{\text{P.6}}{=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{1-\ 3}{\underset{\text{P.6}}{=\!=}}$$

$$\overset{3+3\ 1}{\underset{\text{P.6}}{=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 13 & 6 & -2 \\ 0 & -5 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{3-9\ 2 \\ 4+5\ 2 \\ 5+\ 2}}{\underset{\text{P.6}}{=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{3+5\ 5 \\ 4+3\ 5}}{\underset{\text{P.6}}{=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{3\leftrightarrow\ 5}{\underset{\text{P.4}}{=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -16 \end{vmatrix}$$

$$\overset{5^{-}8\ 4}{\underset{\text{P.6}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{P.7}}{=\!=\!=} -(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 0 = 0.$$

* * *

En la definición dada de determinante se ha utilizado la primera columna de la matriz y sus adjuntas. Nuestro próximo objetivo es demostrar que también puede calcularse el determinante mediante una fórmula que utilice cualquier otra columna o incluso cualquier fila de la matriz y sus adjuntas. Estos resultados serán de gran utilidad para simplificar el cálculo de determinantes.

Comenzaremos demostrando que puede utilizarse la primera fila de la matriz para calcular determinantes.

Teorema 2.2.2

Si

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz con todos los elementos de su primera fila nulos excepto el que ocupa el lugar , se tiene que

$$| \ | = (-1)^{\ +1} a_1 | \ _1 | .$$

Demostración. Procedemos por inducción en el orden de la matriz. Si es una matriz de orden 2 puede ser de la forma

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En el primer caso se tiene $| \ | = a_{11}a_{22} = a_{11}| \ _{11}|$ y en el segundo $| \ | = -a_{12}a_{21} = -a_{12}| \ _{12}|$, lo cual prueba que la fórmula es cierta en este caso.

Para que el lector pueda seguir mejor el caso general hacemos un caso particular de una matriz de orden 3. Sea

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$| \ | = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$= -a_{12}[a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}] = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Aceptemos ahora que el resultado es cierto para toda matriz de orden inferior a n y sea una matriz de orden n. Si el elemento no nulo ocupa el primer lugar de la primera fila se tiene

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

De la definición de determinante deducimos que

$$| \ | = a_{11} | \ _{11}| - a_{21} | \ _{21}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} | \ _{n1}| = a_{11} | \ _{11}|$$

ya que cada adjunta $\ _{1}$, con $\ > 1$, tiene una fila de ceros y, por tanto, su determinante es nulo (propiedad 1).

Supongamos ahora que el elemento no nulo de la primera fila ocupa el lugar $\ $, con $\ > 1$. Tenemos

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\ -1} & a_{2} & a_{2,\ +1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,\ -1} & a_{n,} & a_{n,\ +1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

De la definición de determinante deducimos que

$$| \ | = -a_{21} | \ _{21}| + a_{31} | \ _{31}| - \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} | \ _{n1}|.$$

La adjunta $\ _{i1}$, $i > 1$, de la fórmula anterior es de la forma

$$^{(i)} = \ _{i1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

y de orden $n - 1$; por la hipótesis de inducción su determinante es

$$| \ _{i1}| = (-1) \ a_{1} \ | \ ^{(i)}_{1,\ -1}|$$

donde $\ ^{(i)}_{1,\ -1}$ denota la matriz que se obtiene de $\ ^{(i)} = \ _{i1}$ suprimiendo la primera fila y la $(\ - 1)$-ésima columna. Por tanto:

$$| \ | = -a_{21}(-1) \ a_{1} \ | \ ^{(2)}_{1,\ -1}| + a_{31}(-1) \ a_{1} \ | \ ^{(3)}_{1,\ -1}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}(-1) \ a_{1} \ | \ ^{(n)}_{1,\ -1}| =$$

$$= (-1) \ ^{+1} a_{1} \ [a_{21} | \ ^{(2)}_{1,\ -1}| - a_{31} | \ ^{(3)}_{1,\ -1}| + \cdots + (-1)^{n} a_{n1} | \ ^{(n)}_{1,\ -1}|].$$

Solamente falta probar que la expresión entre paréntesis coincide con $|\ _1|$. Para la matriz de orden $n-1$

$$^{(\ )} = \ _1 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\ -1} & a_{2,\ +1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,\ -1} & a_{3,\ +1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,\ -1} & a_{n,\ +1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$|\ _1| = a_{21}|\ ^{(\ )}_{11}| - a_{31}|\ ^{(\ )}_{21}| + \cdots + (-1)^n a_{n1}|\ ^{(\ )}_{n-1,1}|.$$

En $^{(\ )}_{11}$ se han suprimido la primera fila y la primera columna de $_1$; y, por tanto, se han suprimido las dos primeras filas de y las columnas primera y -ésima de ; de la misma manera, en $^{(2)}_{1,\ -1}$ se han suprimido la primera fila y la -1 columna de $_{21}$ y, por tanto, se han suprimido las dos primeras filas y la primera fila y la -ésima columna de . Por tanto:

$$^{(\ )}_{11} = \ ^{(2)}_{1,\ -1}.$$

De manera similar se demuestra que $^{(\ )}_{21} = \ ^{(3)}_{1,\ -1}$, etc., lo cual demuestra el resultado. ■

EJEMPLO D. El determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$|\ | = (-1)^{3+1}(-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{P.6}}{=\!=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 11 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1\begin{vmatrix} -5 & 11 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)(20 + 33) = -159.$$

Teorema 2.2.3 (Desarrollo por la primera fila)

Si

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$|\ | = a_{11}|\ _{11}| - a_{12}|\ _{12}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}|\ _{1n}|.$$

Demostración. Escribimos

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{12} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si , = 1, 2, ..., *n*, es la matriz que tiene todas sus filas iguales a , excepto la primera, en la que todos sus elementos son nulos excepto el que ocupa el lugar que es a_1 , de la propiedad 2 de los determinantes aplicada reiteradas veces se tiene

$$| | = | _1| + | _2| + \cdots + | _n|.$$

Por el Teorema 2.2.2, | | = $(-1)^{+1} a_1$ | _1 |, lo cual prueba el resultado deseado. ■

EJEMPLO E. Para calcular el determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

utilizamos el Teorema 2.2.3 para obtener

$$| | = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1(3 + 1) - 1 \cdot 6 =$$
$$= -4 - 4 - 6 = -14.$$

* * *

Sea la matriz que se obtiene de $= (a_i)_{\substack{i = 1, \ldots, n \\ = 1, \ldots, n}}$ intercambiando las filas primera y segunda.

Por la propiedad 4 tenemos que | | = − | | y puesto que

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

utilizando el Teorema 2.2.3 para desarrollar el determinante de por su primera fila se tiene que

$$| | = - | | = -[a_{21}| _{11}| - a_{22}| _{12}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{2n}| _{1n}|].$$

Puesto que $_1$ = $_2$ para todo = 1, 2, ..., *n*, tenemos que

$$| | = -a_{21}| _{21}| + a_{22}| _{22}| + \cdots - (-1)^{n+1} a_{2n}| _{2n}|$$

lo cual nos da una fórmula para desarrollar el determinante de por la segunda fila. La principal diferencia con el Teorema 2.2.3 es que el primer término es negativo.

Si ahora intercambiamos la segunda y la tercera fila, el determinante cambia de signo por la propiedad 4 y, por tanto, se tendría una fórmula para desarrollar el determinante por la tercera fila, comenzando con un sumando positivo. Este razonamiento demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.2.4 (Desarrollo por la *i*-ésima fila)

Si $= (a_i)_{i,\ =1,2,\ldots,n}$ se tiene que

$$| \ | = (-1)^{i+1}a_{i1}| \ _{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}| \ _{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}| \ _{in}|.$$

No es de extrañar que exista un resultado análogo para calcular el determinante utilizando un desarrollo por cualquiera de las columnas. Para demostrarlo damos la definición de matriz *tra e ta* de una dada.

Si es una matriz de orden $m \times n$, se denomina matriz *tra e ta* de , y se denota por ^{t}, a la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene poniendo como *i*-ésima fila a la *i*-ésima columna de la matriz .

Por ejemplo, la matriz traspuesta de

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un resultado que relaciona la operación de trasposición con el producto de matrices es el siguiente:

$$(\ )^t = \ ^t \ ^t$$

siempre que las multiplicaciones anteriores tengan sentido (ver ejercicio 6 al final de esta sección).

Teorema 2.2.5

Si es una matriz cuadrada, $| \ | = | \ ^t|$.

Demostración. El resultado es cierto para matrices de orden 2 puesto que

$$| \ | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y

$$| \ ^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Supongamos que el resultado es cierto para matrices de orden inferior a n y sea $= (a_i)_{i,\ =1,2,\ldots,n}$ una matriz de orden n. Puesto que

$$= {}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

por el Teorema 2.2.3 se tiene que

$$|\ {}^t| = a_{11}|\ {}_{11}| - a_{21}|\ {}_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|\ {}_{1n}|.$$

Puesto que ${}_1 = (\ {}_1)^t$, $= 1, 2, ..., n$, utilizando la hipótesis de inducción se tiene que

$$|\ {}^t| = a_{11}|\ {}_{11}| - a_{21}|\ {}_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|\ {}_{n1}| = |\ |. \qquad \blacksquare$$

Los Teoremas 2.2.4 y 2.2.5 producen el siguiente resultado:

Teorema 2.2.6 (Desarrollo por la *j*-ésima columna)
Si $= (a_i)_{i,\ =1,2,\ldots,n}$, se tiene que

$$|\ | = (-1)^{\ +1}a_1|\ {}_1| + (-1)^{\ +2}a_2|\ {}_2| + \cdots + (-1)^{\ +n}a_n|\ {}_n|$$

EJEMPLO F. Para calcular el determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

desarrollamos por la segunda columna y a continuación por la primera fila para obtener

$$|\ | = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(-3)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(-3)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9(-13) = -117.$$

* * *

El Teorema 2.2.5 produce otro resultado interesante. En las propiedades 1 a 6 de los determinantes puede sustituirse la palabra «fila» por «columna» y los resultados siguen siendo válidos. Esto permite realizar operaciones elementales con columnas para calcular determinantes.

La verificación de estos resultados se deja para el lector.

En el ejemplo anterior se observa que el cálculo de determinantes se simplifica si desarrollamos por una fila o columna que presente el mayor número de ceros. Si una matriz no posee ningún elemento nulo es posible realizar operaciones elementales con sus filas o columnas, de manera que el determinante no cambie, pero que la nueva matriz posea varios ceros en alguna de sus filas o columnas.

El método combinado de realizar operaciones elementales y utilizar las fórmulas anteriores es el más utilizado para calcular determinantes, debido a que simplifica el número de operaciones a realizar.

EJEMPLO G. Sea

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por 2 la segunda columna y restándosela a la primera se tiene

$$| \; | \overset{\substack{1-2\\ \hline \text{P.6}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -9 & 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna se tiene

$$| \; | = -9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Para calcular el primero de estos determinantes restamos la primera fila de la segunda y de la tercera para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6.$$

Para calcular el segundo restamos la primera columna de la segunda y la tercera para obtener

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14.$$

Por tanto:

$$| \; | = -9 \cdot 6 + 5 \cdot (-14) = -54 - 70 = -124.$$

* * *

Es conveniente escribir una matriz con los signos que se asocian a cada elemento en el desarrollo de los Teoremas 2.2.4 y 2.2.6 con motivo de ayudar al lector a recordarlos. Esta matriz es

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO H. Tratemos de calcular el determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} & a & a \\ a & & a \\ a & a & \end{pmatrix}.$$

Las operaciones elementales que se realizan se indican adecuadamente encima del signo de igualdad:

$$| \ | = \begin{vmatrix} & a & a \\ a & & a \\ a & a & \end{vmatrix} \overset{3-2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} & a & a \\ a & & a \\ 0 & a- & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a- & a \\ -a & \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a \\ a- & -a \end{vmatrix} =$$

$$= [\ (\ -a) - a(a-\ )] - a[a(\ -a) - a(a-\ )] =$$

$$= (\ -a)[\ ^2 + \ a - a^2 - a^2] = (\ -a)(\ -a)(\ +2a).$$

EJERCICIOS 2.2

1. Calcular los siguientes determinantes mediante su desarrollo por la primera columna:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Calcular los siguientes determinantes reduciéndolos a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Calcular los siguientes determinantes usando sus propiedades y efectuando un número reducido de computaciones.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Demostrar, sin necesidad de calcularlos, que los siguientes determinantes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} & y & 2 & +3y \\ 4 & 3 & & 17 \\ & t & 2 & +3t \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \operatorname{sen}^2 & 1 & \cos^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$.

5. Sabiendo que los números 58.786, 30.628, 12.831, 80.743 y 16.016 son todos divisibles por 13, demostrar que el determinante de la siguiente matriz es también divisible por 13:

$$= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Demostrar que $(\quad)^t = \quad^t \; ^t$ siempre que las multiplicaciones anteriores tengan sentido.

7. a) Demostrar que si es una matriz cuadrada de orden n, y r es un número real $|r \quad| = r^n| \quad|$.

   b) Utilizar a) para decir cómo cambia el determinante de una matriz de orden n si los signos de todos sus elementos se cambian.

8. Una matriz cuadrada se dice *anti im tri a* si $= - ^{t}$.
   a) Dar un ejemplo de una matriz antisimétrica de orden 4.
   b) Demostrar que si es antisimétrica y de orden impar su determinante es nulo. (*ge ren ia*: utilizar 7.b)).
   c) ¿Es cierto el resultado de la parte b) si es de orden par?

9. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & & y \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $_1 = (a_1, b_1)$ y $_2 = (a_2, b_2)$.

Los siguientes ejercicios se refieren al método de demostración por inducción.

10. Demostrar la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}\, n.$$

11. Demostrar la fórmula

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

12. Un polígono se denomina *onve o* si las líneas que unen dos puntos cualesquiera de sus lados están en el interior del polígono. Demostrar, mediante el método de inducción, que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $180(n - 2)$.

13. Deducir una fórmula para calcular

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

y demostrarla mediante el método de inducción.

14. Si es una matriz triangular inferior de orden 3 cuyos elementos son números reales, todos los elementos de su diagonal principal son iguales y $^2 =$, demostrar que es ó $-$.

2.3. DETERMINANTE DE UN PRODUCTO DE MATRICES. CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN *n*

El primer resultado que queremos probar en esta sección es que el determinante de un producto de matrices cuadradas del mismo orden es el producto de los determinantes de cada una de ellas.

Para probar este resultado mostraremos primero que las operaciones elementales con las filas de una matriz pueden expresarse mediante multiplicación por matrices adecuadas.

Estudiaremos cada operación elemental por separado.

a) Si multiplicamos la fila i de la matriz $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ por un número real no nulo el resultado es el mismo que si multiplicamos la matriz por la izquierda por la matriz

$$E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & \longleftarrow & \text{fila } i \\ & 0 & & \uparrow & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

columna i

En efecto:

$$E_i(c)A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{fila } i$$

b) El resultado de intercambiar las filas i y de la matriz $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ es el mismo que si multiplicamos la matriz por la izquierda por la matriz

$$E_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \leftarrow \text{fila } i \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \leftarrow \text{fila } k \\ & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

columna i columna k

donde todos los elementos de la diagonal son 1 excepto los de las filas i y que son cero.

En efecto:

$$_{i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ 1} & a_{\ 2} & \cdots & a_{\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ 1} & a_{\ 2} & \cdots & a_{\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

c) El resultado de multiplicar por la fila i de la matriz $= (a_i)_{i,\ =1,\ 2,\ \ldots,\ n}$ y sumárselo a la fila es el mismo que si multiplicamos la matriz por la izquierda por la matriz

$$E_i^k(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \leftarrow \text{fila } i \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \leftarrow \text{fila } k \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

columna i columna k

En efecto:

$$_i(\ ) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & & \cdots & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ 1} & a_{\ 2} & \cdots & a_{\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{\ 1} & a_{i2}+a_{\ 2} & \cdots & a_{in}+a_{\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Las matrices que aparecen en cada uno de los casos anteriores reciben el nombre de *matri e elementale* . Observar que toda matriz elemental se obtiene a partir de la matriz identidad realizando la operación elemental correspondiente a su caso. Así, por ejemplo, la matriz elemental del caso b) se obtiene intercambiando las filas i y de la matriz identidad. Observar que las matrices $_i(\ )$ con $i <$ son triangulares inferiores y con $i >$ son triangulares superiores.

Son ejemplos de matrices elementales las siguientes:

$$_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad _1(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^1_3(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que toda matriz puede reducirse a una matriz escalonada reducida mediante una sucesión de operaciones elementales, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1

Toda matriz cuadrada puede reducirse mediante una sucesión de matrices elementales $_1$, $_2$, ..., a una matriz escalonada reducida tal que

$$\cdots \ _2 \ _1 = .$$

EJEMPLO A. La matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se transforma en la identidad mediante la siguiente sucesión de operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2-3\ 1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2\leftrightarrow3\ 3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&-5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{3+5\ 2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}\ 3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2-\ 3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{1-\ 3}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{1-2\ 2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos escribir la igualdad

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad=\ ,$$

que el lector puede comprobar.

EJEMPLO B. La matriz

$$=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$$

se transforma en una matriz escalonada reducida mediante la siguiente sucesión de operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{2-2\ 1}\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{1/2}\begin{pmatrix}1&1/2\\0&0\end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2\\0&0\end{pmatrix}.$$

* * *

Proposición 2.3.2

Toda matriz elemental posee una inversa, que es también una matriz elemental.

Demostración. La inversa de la matriz elemental $_i(\ )$ es $_i(1/\ )$. La inversa de la matriz elemental $_i$ es $_i$, ya que se vuelve a la identidad intercambiando de nuevo las mismas filas. La inversa de la matriz $_i(\ )$ es $_i(-\ )$ porque se vuelve a la identidad restando a la fila la fila *i* multiplicada por . ■

EJEMPLO C. La inversa de $= \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1/ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La inversa de $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es ella misma. La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. La comprobación se deja para el lector.

* * *

Proposición 2.3.3

Si es una matriz invertible, puede factorizarse como un producto de matrices elementales.

Demostración. Puesto que es invertible puede reducirse a la identidad mediante una sucesión de operaciones elementales; por la Proposición 2.3.1 existen matrices elementales $_1$, $_2$, ..., tales que

$$\cdots \; _2 \; _1 = .$$

Por tanto, $= \; _1^{-1} \; _2^{-1} \cdots \; ^{-1}$ y cada una de las matrices $^{-1}$ es una matriz elemental debido a la Proposición 2.3.2. ■

EJEMPLO D. Si es la matriz del ejemplo se tiene:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* * *

Teorema 2.3.4

Si y son matrices cuadradas del mismo orden,

$$| \quad | = | \; || \; |.$$

Demostración. La demostración la realizaremos en tres etapas.

ta a 1. Si es una matriz elemental el resultado es cierto. Para probarlo estudiaremos cada uno de los posibles casos de matrices elementales.

Si $= {}_i(\ )$, $|\ \ | = |\ {}_i(\ )\ | = |\ \ |$ por la propiedad 3 de la sección 2.2; por otro lado, $|\ {}_i(\ )| =$ y, por tanto, $|\ \ | = |\ \ | = |\ {}_i(\ )||\ \ | = |\ \ ||\ \ |$.

Si $= {}_i$, $|\ \ | = |\ {}_i\ \ | = -|\ \ |$ por la propiedad 4 de la sección 2.2; por otro lado, $|\ {}_i\ | = -1$ por la misma propiedad y, por tanto, $|\ \ | = -|\ \ | = |\ {}_i\ ||\ \ | = |\ \ ||\ \ |$.

Si $= {}_i(\ )$, $|\ \ | = |\ {}_i(\ )\ | = |\ \ |$ por la propiedad 6 de la sección 2.2; por otro lado, $|\ {}_i(\ )| = 1$ por la misma propiedad y, por tanto, $|\ \ | = |\ \ | = |\ {}_i(\ )||\ \ | = |\ \ ||\ \ |$ también en este caso.

ta a 2. Si es invertible, por la Proposición 2.3.3 podemos escribir $= {}_1\ {}_2\cdots$, donde cada es una matriz elemental. Aplicando repetidas veces el resultado obtenido en la etapa 1 se tiene:

$$|\ \ | = |\ {}_1\ {}_2\cdots\ \ | = |\ {}_1||\ {}_2\cdots\ \ | = \cdots = |\ {}_1||\ {}_2|\cdots|\ \ ||\ \ | =$$
$$= |\ {}_1\ {}_2||\ \ |\cdots|\ \ ||\ \ | = \cdots = |\ {}_1\ {}_2\cdots\ \ ||\ \ | = |\ \ ||\ \ |.$$

ta a 3. Si es de orden *n* y no invertible, el número de peldaños de su matriz escalonada reducida es inferior a *n*. Podemos escribir $= {}_1\ {}_2\cdots\ \ '$ donde las son matrices elementales y $'$ tiene al menos una fila de ceros, por las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2. Por tanto, $|\ '| = 0$ por la propiedad 1 de la sección 2.2 y usando el resultado de la Etapa 1 se deduce

$$|\ \ | = |\ {}_1||\ {}_2|\cdots|\ \ ||\ \ '| = 0.$$

Por otro lado, $'$ también tiene al menos una fila de ceros, por lo que $|\ '\ | = 0$. De nuevo por la etapa 1

$$|\ \ | = |\ {}_1\cdots\ \ '\ | = |\ {}_1|\cdots|\ \ ||\ \ '\ | = 0 = |\ \ ||\ \ |$$

ya que $|\ \ | = 0$. ■

* * *

EJEMPLO E. El teorema sobre el determinante de un producto es útil para calcular algunos determinantes. El determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} b^2 + {}^2 & ab & a \\ ab & {}^2 + a^2 & b \\ a & b & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

puede calcularse fácilmente escribiéndola como un producto de dos matrices de orden 3. En efecto:

$$= \begin{pmatrix} b & & 0 \\ a & 0 & \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ & 0 & a \\ 0 & & b \end{pmatrix}$$

y puesto que

$$\begin{vmatrix} b & & 0 \\ a & 0 & \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -2ab \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ & 0 & a \\ 0 & & b \end{vmatrix} = -2ab$$

se tiene que

$$|\ \ | = 4a^2b^2\ {}^2.$$

* * *

El resto de esta sección está dedicada a dar algunas sugerencias relativas al cálculo de determinantes de matrices cuadradas.

Comenzamos con el determinante de la matriz de orden n:

$$ {}_n = \begin{pmatrix} & a & a & \cdots & a \\ a & & a & \cdots & a \\ a & a & & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & \end{pmatrix}. $$

El desarrollo de $| \ {}_n|$ por una cualquiera de sus filas o columnas no conduce a ningún resultado positivo. Lo más adecuado es realizar operaciones elementales con sus filas o columnas y utilizar las propiedades de los determinantes estudiadas en la sección anterior, hasta convertirla en una matriz triangular.

Restando la primera fila de cada una de las restantes se tiene:

$$ | \ {}_n| = \begin{vmatrix} & a & a & \cdots & a \\ a - & -a & 0 & \cdots & 0 \\ a - & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a - & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix}. $$

Sumando a la primera columna todas las restantes se tiene:

$$ | \ {}_n| = \begin{vmatrix} +(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix} = (\ -a)^{n-1}[\ +(n-1)a]. $$

Nota. Ver el ejemplo H de la sección 2.2, donde se ha calculado este determinante para $n = 3$.

* * *

La demostración por inducción también puede usarse para calcular determinantes de matrices de orden n. Expondremos este método calculando el determinante de la matriz

$$ {}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \cdots & \binom{2}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n} \end{pmatrix} $$

que se conoce en la literatura matemática con el nombre de *eterminante e an ermon e*.

Multiplicando cada fila por $_1$ y restándosela a la siguiente se tiene:

$$_n(\ _1, ..., \ _n) = |\ _n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & {}_2 - {}_1 & {}_3 - {}_1 & \cdots & {}_n - {}_1 \\ 0 & {}_2(\ {}_2 - {}_1) & {}_3(\ {}_3 - {}_1) & \cdots & {}_n(\ {}_n - {}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {}_2^{n-2}(\ {}_2 - {}_1) & {}_3^{n-2}(\ {}_3 - {}_1) & \cdots & {}_n^{n-2}(\ {}_n - {}_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\ {}_2 - {}_1) \cdot (\ {}_3 - {}_1) \cdots (\ {}_n - {}_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ {}_2 & {}_3 & \cdots & {}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_2^{n-2} & {}_3^{n-2} & \cdots & {}_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\prod_{=2}^{n} (\ - \ _1) \right] \ _{n-1}(\ _2, \ _3, ..., \ _n)$$

donde el símbolo $\prod_{=2}^{n}$ significa el producto de todos los factores que aparecen variando de 2 a n.

De la misma manera se deduce la fórmula

$$_{n-1}(\ _2, \ _3, ..., \ _n) = \left[\prod_{=3}^{n} (\ - \ _2) \right] \ _{n-2}(\ _3, ..., \ _n).$$

Por tanto $_n(\ _1, \ _2, ..., \ _n)$ es el producto de todos los factores de la forma $(\ - \ )$ con $>$, es decir:

$$_n(\ _1, ..., \ _n) = \prod_{1 \leqslant < \leqslant n} (\ - \ ).$$

* * *

Finalmente mostramos un método para calcular determinantes de orden elevado siempre que se puedan relacionar con determinantes de orden inferior del mismo tipo. Por ejemplo, para calcular

$$_6 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

observamos que

$$_6 = 3\ _5 - 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\ _5 - 8\ _4 .$$

La fórmula $_6 = 3\ _5 - 8\ _4$ es una *rm la e re rren ia* y nos permite calcular $_6$ conociendo $_5$ y $_4$. La misma fórmula de recurrencia aplicada a $_5$ y $_4$ nos da:

$$_5 = 3\ _4 - 8\ _3, \qquad _4 = 3\ _3 - 8\ _2.$$

Por tanto:

$$_6 = 3(3\ _4 - 8\ _3) - 8(3\ _3 - 8\ _2) = 9\ _4 - 2\cdot 3\cdot 8\ _3 + 8^2\ _2.$$

Puesto que $_3 = 3\ _2 - 8\ _1$ se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} _6 &= 9(3\ _3 - 8\ _2) - 2\cdot 3\cdot 8\ _3 + 8^2\ _2 = 3^3(3\ _2 - 8\ _1) - 9\cdot 8\ _2 - \\ &\quad - 2\cdot 3\cdot 8(3\ _2 - 8\ _1) + 8^2\ _2 = (3^4 - 3^2\cdot 8 - 2\cdot 3^2\cdot 8 + 8^2)\ _2 + \\ &\quad + (-3^3 8\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 8^2)\ _1 = -71\ _2 + 168\ _1. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \qquad \text{y} \qquad _1 = 3.$$

Por tanto:

$$_6 = -71\cdot 1 + 168\cdot 3 = -71 + 504 = 433.$$

* * *

EJERCICIOS 2.3

1. Encontrar una sucesión de matrices elementales $_1$, $_2$, ..., tales que $\cdots\ _2\ _1$ sea una matriz escalonada reducida, donde:

a) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ c) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Expresar las matrices del ejercicio 1 que sean invertibles como un producto de matrices elementales.

3. Utilizar el Teorema 2.3.4 sobre el determinante de un producto para demostrar la fórmula

$$|\ ^{-1}| = \frac{1}{|\ |}$$

cuando es una matriz invertible.

4. Sean , y matrices cuadradas de orden *n* y formemos la matriz

$$= \begin{pmatrix} & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

de orden 2*n*.

a) Demostrar que

$$= \begin{pmatrix} & 0 \\ & {}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_n & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

b) Utilizar este resultado para demostrar que $| \ | = | \ || \ |$.

5. Calcular el determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} a & b & & \\ -b & a & & - \\ - & - & a & b \\ - & & -b & a \end{pmatrix}$$

hallando ^{t}.

6. Escribir la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 + {}_1y_1 & 1 + {}_1y_2 & 1 + {}_1y_3 \\ 1 + {}_2y_1 & 1 + {}_2y_2 & 1 + {}_2y_3 \\ 1 + {}_3y_1 & 1 + {}_3y_2 & 1 + {}_3y_3 \end{pmatrix}$$

como un producto de matrices y calcular su determinante.

7. Calcular los siguientes determinantes reduciéndolos al determinante de una matriz triangular (todas las matrices son de orden n).

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2- & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2- & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2- \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & +1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & +1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & +1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

8. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!$$

9. Encontrar una fórmula de recurrencia para calcular

$$_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

en función de $_{n-1}$ y $_{n-2}$. Utilizarla para calcular $_8$ y $_9$.

10. Una *e i n e ibona i* (Fibonacci fue un matemático italiano del siglo XIII) es una sucesión de números que comienza con 1 y 2 y en la que cada número es la suma de los dos inmediatamente anteriores. Es decir, 1, 2, 3, 5, 8, ... Demostrar que el *n*-ésimo término de la sucesión de Fibonacci coincide con

$$|\ _n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

donde $_n$ es una matriz de orden *n*.

11. Calcular

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

12. Calcular el determinante de la matriz de orden *n*, $= (a_i)$, donde $a_i = |i - |$. (Sugerencia: hacerlo para $n = 2, 3, 4$, e intentar deducir la fórmula general para demostrarla por inducción.)

13. Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & & ^2 & ^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}.$$

14. Sea $(\ ) = \begin{pmatrix} m_{11}(\ ) & m_{12}(\ ) \\ m_{21}(\ ) & m_{22}(\ ) \end{pmatrix}$ una matriz 2×2 cuyos elementos son funciones derivables $m_i(\ )$ con valores reales.

a) Dar un ejemplo de una matriz $(\ )$ para la que se tenga

$$— \begin{vmatrix} m_{11}(\ ) & m_{12}(\ ) \\ m_{21}(\ ) & m_{22}(\ ) \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} m'_{11}(\ ) & m'_{12}(\ ) \\ m'_{21}(\ ) & m'_{22}(\ ) \end{vmatrix}.$$

b) Demostrar que se cumple

$$— \begin{vmatrix} m_{11}(\ ) & m_{12}(\ ) \\ m_{21}(\ ) & m_{22}(\ ) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m'_{11}(\ ) & m_{12}(\ ) \\ m'_{21}(\ ) & m_{22}(\ ) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11}(\ ) & m'_{12}(\ ) \\ m_{21}(\ ) & m'_{22}(\ ) \end{vmatrix}.$$

2.4. INVERSA DE UNA MATRIZ. REGLA DE CRAMER

En esta sección comenzaremos dando una fórmula para calcular la inversa de una matriz utilizando la teoría de los determinantes. A continuación usaremos esta fórmula para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es invertible.

Comenzaremos dando una condición necesaria y suficiente para la invertibilidad de una matriz haciendo uso del concepto de determinante.

Teorema 2.4.1

Sea una matriz cuadrada de orden n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) es invertible.
2) Rango ( ) = n.
3) | | $\neq 0$.

Demostración. Ya sabemos que 1) y 2) son equivalentes por el Teorema 1.4.3. Basta demostrar, por tanto, que 1) y 3) son equivalentes.

Si es invertible, puede escribirse como un producto de matrices elementales de la forma = $_1\ _2\cdots$ debido a la Proposición 2.3.3 de la sección anterior. Puesto que el determinante de un producto es el producto de los determinantes (Teorema 2.3.4) se tiene que

$$| \ | = | \ _1 || \ _2 | \cdots | \ |.$$

La parte derecha de esta igualdad es no nula, ya que toda matriz elemental tiene determinante no nulo; por tanto, | | $\neq 0$. Esto prueba que 1) implica 3).

En la etapa 3 de la demostración del Teorema 2.3.4 de la sección anterior se ha probado que si no es invertible, | | = 0, esto prueba que 3) implica 1), ya que si | | es no nulo y no fuera invertible se tendría una contradicción. ■

Suponiendo que | | $\neq 0$, nos proponemos encontrar una fórmula para calcular $^{-1}$. Si = $(a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$, del desarrollo de su determinante por la fila i-ésima tenemos que

$$| \ | = (-1)^{i+1}a_{i1}| \ _{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}| \ _{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}| \ _{in}|.$$

El número $_i = (-1)^{i+}| \ _i|$, $i = 1, ..., n$, $= 1, ..., n$, se denomina *o a tor* del elemento que ocupa el lugar (i,) de la matriz . Con esta notación la fórmula anterior se escribe de la forma

$$| \ | = a_{i1}\ _{i1} + a_{i2}\ _{i2} + \cdots + a_{in}\ _{in}. \tag{4.1}$$

Sea

$$\text{cof}(\ ) = \quad = \begin{pmatrix} _{11} & _{12} & \cdots & _{1n} \\ _{21} & _{22} & \cdots & _{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ _{n1} & _{n2} & \cdots & _{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz de los cofactores de los elementos de , que se denomina *matri e o a tore e* .

Con esta notación, y debido a (4.1), se tiene que la matriz ^{t} tiene como valor $|\ |$ en todos los lugares de su diagonal principal. Es decir,

$$AC^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{i1} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{12} & \cdots & c_{i2} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{in} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & ? \\ & \ddots & & \\ & & |A| & \longleftarrow \text{fila } i \\ & & \uparrow & \ddots \\ ? & & \text{columna } i & & |A| \end{pmatrix}$$

Si logramos probar que los términos de ^{t} que no están en la diagonal principal son todos nulos, se tendría que

$$^t = |\ |_n$$

y, por tanto,

$$^{-1} = \frac{1}{|\ |}\ ^t$$

lo cual nos da una fórmula para calcular la inversa de la matriz .

La demostración completa de la fórmula anterior para calcular $^{-1}$ se da en el siguiente teorema:

Teorema 2.4.2

Si es una matriz invertible se tiene que

$$^{-1} = \frac{1}{|\ |}\ ^t$$

donde es la matriz de cofactores de .

Demostración. De la discusión precedente se deduce que la demostración se completa si probamos que los elementos de ^{t} que no están en su diagonal son nulos. Sea $i \neq$ e intentemos calcular

$$a_{i1}\ _1 + a_{i2}\ _2 + \cdots + a_{in}\ _n.$$

Esta expresión coincide con el desarrollo por la fila del determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \text{fila } i \\ \\ \longleftarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

que se obtiene de sustituyendo la fila por la i. Puesto que posee dos filas iguales, $|\ \ | = 0$ y, por tanto:

$$a_{i1}\ \ _1 + a_{i2}\ \ _2 + \cdots + a_{in}\ \ _n = 0$$

si $i \neq$, que era lo que queríamos demostrar. ■

EJEMPLO A. La matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es invertible puesto que

$$|\ \ | = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Para calcular su inversa comenzamos calculando la matriz de sus cofactores:

$$_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad _{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad _{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \quad ; \quad _{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad _{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \quad _{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad ; \quad _{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Por tanto:

$$= \text{cof}(\ \ ) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 2.4.2:

$$^{-1} = \frac{1}{|\ \ |}\ \ ^t = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -6/7 & 4/7 \\ 3/7 & 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & -1/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

(¡Comprobarlo!)

* * *

Nota. Una matriz con determinante nulo se dice que es una matriz *ing lar*, de manera que una matriz invertible también recibe el nombre de matriz *no ing lar*.

* * *

Utilizando el Teorema 2.4.2 pueden resolverse sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\ _1 + a_{12}\ _2 + \cdots + a_{1n}\ _n = b_1 \\ a_{21}\ _1 + a_{22}\ _2 + \cdots + a_{2n}\ _n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}\ _1 + a_{n2}\ _2 + \cdots + a_{nn}\ _n = b_n \end{array}\right\},$$

escrito $\ \vec{} = \vec{b}$ en notación matricial, siempre que sea no singular o invertible. En efecto, por el Teorema 2.4.2:

$$\vec{} = \ ^{-1}\vec{b} = \frac{1}{|\ |}\ ^{t}\vec{b} = \frac{1}{|\ |}\begin{pmatrix} {}_{11} & {}_{21} & \cdots & {}_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_{1} & {}_{2} & \cdots & {}_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_{1n} & {}_{2n} & \cdots & {}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\ |}\begin{pmatrix} b_1\ _{11} + & b_2\ _{21} & + \cdots + & b_n\ _{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1\ _{1} + & b_2\ _{2} & + \cdots + & b_n\ _{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1\ _{1n} + & b_2\ _{2n} & + \cdots + & b_n\ _{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{componente}$$

Por tanto, para todo $\ = 1, 2, ..., n$, se tiene que

$$= \frac{1}{|\ |}\,[b_1\ _1 + b_2\ _2 + \cdots + b_n\ _n].$$

La expresión entre paréntesis es el desarrollo del determinante de la matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
columna

por la columna .

Hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 2.4.3 (Regla de Cramer)

Si es una matriz invertible de orden n, el sistema de ecuaciones lineales $\ \vec{} = \vec{b}$ es compatible determinado y su solución se calcula mediante las fórmulas

$$= \frac{|\ |}{|\ |}, \qquad = 1, 2, ..., n,$$

donde es la matriz en la que se ha sustituido la columna por el vector $\vec{b}$.

EJEMPLO B. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 8 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & & - & x_4 & = 1 \\ x_1 & & & & + & x_4 & = 4 \end{array}\right\}$$

tiene solución única, ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0.$$

Por el Teorema 2.4.3:

$$x_1 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 13 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_4 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 + (3 - 16) = 3.$$

EJEMPLO C. Para determinar si el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & & = 0 \\ -x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

tiene soluciones no triviales basta calcular el determinante de la matriz de sus coeficientes. Si $|\ \ | \neq 0$ solamente posee la solución trivial y si $|\ \ | = 0$ posee soluciones no triviales, ya que en este caso $r(\ \ ) < n$ debido al Teorema 2.4.1.

Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{P.6}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{P.2}}{=\!=} 0$$

el sistema posee infinitas soluciones.

EJERCICIOS 2.4

1. Hallar las inversas de las siguientes matrices, calculando primero la matriz de cofactores (comprobar los resultados):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Demostrar que si $\quad = \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}$ con $|\ \ | \neq 0$, $\quad^{-1} = \dfrac{1}{a\ -\ b}\begin{pmatrix} & -b \\ - & a \end{pmatrix}$ utilizando el Teorema 2.4.2 sobre el cálculo de la inversa de una matriz.

3. Demostrar que $(\quad^{-1})^t = (\quad^t)^{-1}$.

4. Probar que $|\mathrm{cof}(\ \ )| = |\ \ |^{n-1}$.

5. Hallar la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1-1 & & & & 0 \\ & 1-1 & & & \\ & & 1-1 & & \\ & & & 1-1 & \\ & & & & 1-1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

6. Hallar la inversa de las siguientes matrices de orden n:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1+ & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+ & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+ & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+ \end{pmatrix}$.

7. Encontrar los valores de a y b para los que las matrices siguientes son invertibles:

a) $\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{pmatrix}$.

8. Dada la aplicación lineal $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$(, y,) = (+ 2y + , 3 + y + 2 , 3 + 2y + 2),$$

demostrar que es invertible y encontrar su inversa.

9. Sea una matriz invertible de orden n y triangular superior. Demostrar que $^{-1}$ es también triangular superior.

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

a) $\left.\begin{array}{l} {}_1 + 2\,{}_2 - {}_3 = 7 \\ 2\,{}_1 + {}_2 + {}_3 = 6 \\ {}_1 - {}_2 + 3\,{}_3 = -1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2\,{}_1 + 3\,{}_2 - 5\,{}_3 - 2 = 0 \\ 3\,{}_1 - {}_2 + 2\,{}_3 + 1 = 0 \\ 5\,{}_1 + 4\,{}_2 - 6\,{}_3 - 3 = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2\,{}_1 + {}_2 + 4\,{}_3 + 8\,{}_4 = -1 \\ {}_1 + 3\,{}_2 - 6\,{}_3 + 2\,{}_4 = 3 \\ 3\,{}_1 - 2\,{}_2 + 2\,{}_3 - 2\,{}_4 = 8 \\ 2\,{}_1 - {}_2 + 2\,{}_3 = 4 \end{array}\right\}$.

11. Hallar los valores de m para los que el siguiente sistema posee soluciones no triviales:

$$\left.\begin{array}{l} 2 - y + = 0 \\ + my - = 0 \\ + y + = 0 \end{array}\right\}.$$

12. Hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

* * *

Un polinomio de grado n con coeficientes reales es una expresión de la forma $( ) = a_0 + a_1 + a_2\,^2 + \cdots + a_n\,^n$, con $a \in \mathbb{R}$, $= 0, 1, ..., n$ y $a_n \neq 0$.

13. Encontrar un polinomio de grado 2 tal que $(1) = 2$, $(-1) = 4$ y $(3) = 16$.

14. Demostrar que $n + 1$ valores distintos de la variable determinan de manera única un polinomio de grado n. [*geren ia*: reducir el problema a demostrar que el determinante de una cierta matriz es no nulo y observar que esta matriz es la que origina el determinante de Vandermonde.]

15. Demostrar que si un polinomio de grado n tiene $n + 1$ soluciones reales distintas ha de ser el polinomio nulo. [*ota*: $_0 \in \mathbb{R}$ es solución de si $(_0) = 0$.]

16. Decir para qué valores de a es invertible la matriz $= (a_i)_{i, =1\cdots n}$, donde $a_i = i -$ si $i >$ y $a_i = a$ en el resto de los casos.

2.5. RANGO DE UNA MATRIZ. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS COMPATIBLES E INDETERMINADOS

En la sección 1.2 definimos el rango de una matriz como el mayor número de sus vectores columna que son linealmente independientes (ver Definición 1.2.2). En el Teorema 1.2.3 de la misma sección se demostró que el rango de una matriz coincide con el número de peldaños de su matriz escalonada reducida.

En esta sección utilizamos los determinantes para obtener el rango de una matriz. Demostraremos también el sorprendente resultado de que el rango de los vectores fila de una matriz coincide con el rango de sus vectores columna.

Dada una matriz de orden $m \times n$ se denomina *menor e or en e* al determinante de cualquier matriz de orden formada con los elementos de la intersección de cualesquiera de sus filas y cualesquiera de sus columnas.

EJEMPLO A. Dada

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

prescindiendo de una columna se obtiene un menor de orden 3, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 4 \\ -1 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

Menores de orden 2 son, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 & \boxed{4} \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & 4 \\ \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

* * *

Los menores de orden 1 de una matriz son sus elementos. Si es una matriz cuadrada de orden n solamente hay un menor de de orden n que coincide con $|\ |$.

Sea una matriz no nula; siempre podemos encontrar un único número que satisface las siguientes condiciones:

1) posee al menos un menor no nulo de orden .
2) Todo menor de de orden mayor que es nulo.

Cualquier menor de de orden que no es nulo se denomina *menor b i o*; las columnas de la matriz de las que proviene este menor básico se denominan *ol mna b i a* y a las filas se les denomina *ila b i a* .

EJEMPLO B. En la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

los menores de orden tres son:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

que son todos nulos. Sin embargo, el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

es no nulo y, por tanto, es un menor basico de ; sus columnas básicas son la primera y la tercera y sus filas básicas son la primera y la segunda.

Es fácil encontrar otros menores básicos de orden 2 de esta matriz.

* * *

El rango de la matriz del ejemplo es 2, ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que coincide con el número de la matriz .

Esto nos hace pensar en la certeza del siguiente resultado:

Teorema 2.5.1

Dada una matriz no nula, el número anteriormente definido coincide con su rango.

Demostración. El número anteriormente definido no se altera mediante transformaciones elementales de la matriz; la demostración de esta afirmación se deja como ejercicio para el lector (ver el ejercicio 7 al final de esta sección).

Así pues, el número para una matriz no nula coincide con el número para su matriz escalonada reducida . La matriz escalonada reducida es de la forma

$$B = \begin{pmatrix} \overset{n_1}{1} & \overset{n_2}{0} & \overset{n_3}{0} & \cdots & \overset{n_p}{0} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \multicolumn{2}{c}{0} & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } p = r(A) \\ m \times n \end{matrix}$$

donde las matrices sombreadas pueden ser no nulas. El número para la matriz no puede ser superior a , ya que cualquier menor de orden + 1 incluiría una fila de ceros.

Por otro lado, ha de ser igual a , puesto que podemos tomar las primeras filas y las columnas $n_1, n_2, n_3, \ldots, n$, para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por tanto, coincide con el número de peldaños de ; por el Teorema 1.2.3 este número coincide con el rango de la matriz. ■

EJEMPLO C. El rango de la matriz $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

$$* \quad * \quad *$$

Teorema 2.5.2 (Teorema del menor básico)

Sea una matriz no nula:

1) Cualquier columna de es combinación lineal de sus columnas básicas.
2) El mismo resultado es cierto para las filas de .

Demostración. Debido a las propiedades de los determinantes se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el menor básico ocupa las primeras filas y las primeras columnas de la matriz , donde $r(\ ) =$. Es decir:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & a_{1R} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & C & \vdots & & \vdots \\ a_{R1} & \cdots & a_{RR} & \cdots & a_{Rn} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mR} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

donde $|\ \ | \neq 0$. Sea $\vec{v}\,, \quad = 1, 2, ..., n$, el -ésimo vector columna de la matriz .

Para demostrar 1) basta probar que cualquier vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}$.

Si $= n$ todas las columnas son básicas y por tanto $\vec{v} = 0\vec{v}_1 + \cdots + 1\vec{v} + \cdots + 0\vec{v}_n$, por lo que el resultado es cierto.

Si $< n$ y $1 \leqslant \leqslant$, $\vec{v}$ es uno de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}$ y, por tanto, es combinación lineal de ellos. Si $< \leqslant n$, consideramos el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_1 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{\ 1} & \cdots & a & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_m & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

de m ecuaciones con $+ 1$ incógnitas. Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes de este sistema es , que es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. De todas estas soluciones siempre podemos elegir una de la forma

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

con $\neq 0$ ya que si todas las soluciones tuvieran $= 0$ el sistema (5.1) sería equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ 1} & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que únicamente posee la solución nula. Sustituyendo esta solución en (5.1) tenemos la igualdad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_1 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{\ 1} & \cdots & a & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_m & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad puede escribirse de la forma

$$ {}_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} $$

que coincide con ${}_1\vec{v}_1 + \cdots + \quad \vec{v} \quad + \quad \vec{v} \quad = \vec{0}$. Puesto que $\quad \neq 0$ se deduce que

$$ \vec{v} \quad = - \frac{1}{} \vec{v}_1 - \cdots - \frac{}{} \vec{v} \quad , $$

lo cual prueba que $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}$.

El resultado por filas se obtiene de considerar la matriz traspuesta ^{t} de , que ha de tener el mismo rango que debido al Teorema 2.2.5. ■

EJEMPLO D. La matriz

$$ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} $$

tiene rango 2 puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$. Por tanto, las filas tercera y cuarta son combinación lineal de sus filas primera y segunda. Estas combinaciones lineales se encuentran resolviendo los sistemas

$$ (1, 1) = \quad {}_1(2, 1) + \quad {}_2(3, 1) \qquad \text{y} \qquad (4, 0) = \quad {}_1(2, 1) + \quad {}_2(3, 1) $$

o equivalentemente:

$$ \left.\begin{array}{r} 2 \quad {}_1 + 3 \quad {}_2 = 1 \\ \quad {}_1 + \quad\ {}_2 = 1 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{r} 2 \quad {}_1 + 3 \quad {}_2 = 4 \\ \quad {}_1 + \quad\ {}_2 = 0 \end{array}\right\} $$

que es un buen ejercicio para que lo realice el lector.

* * *

Corolario 2.5.3

El número máximo de columnas linealmente independientes de una matriz es igual al número máximo de sus filas linealmente independientes.

Demostración. $r(\ ) = r({}^t)$.

Corolario 2.5.4

El determinante de una matriz cuadrada es nulo si, y solo si, una de sus filas (columna) es combinación lineal de las restantes filas (columnas) de la matriz.

Demostración. Si es una matriz cuadrada con $|\ \ | = 0$, $r(\ \ ) < n$ (Teorema 2.4.1); por el Teorema 2.5.2 se obtiene el resultado deseado.

Por otro lado, si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ son los vectores columna de y

$$\vec{v}_n = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\vec{v}_{n-1}$$

realizando las operaciones elementales:

$$_n - \alpha_1 \ _1 - \alpha_2 \ _2 - \cdots - \alpha_{n-1} \ _{n-1}$$

sobre sus columnas se tiene que

$$|\ \ | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO E. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es nulo, ya que su tercera columna es dos veces la primera menos la segunda. ¿Qué fila es combinación lineal de las restantes?

* * *

Los resultados que hemos obtenido sobre el rango de una matriz se aplican a continuación para resolver sistemas compatibles e indeterminados.

EJEMPLO F. Deseamos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \ _1 + 2 \ _2 \qquad\quad = 1 \\ 2 \ _1 + \ \ _2 + 3 \ _3 = 2 \\ 3 \ _1 + \ \ _2 + 5 \ _3 = 3 \end{array}\right\}. \tag{5.2}$$

Sea $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ la matriz de sus coeficientes y $^- = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $r(\ \ ) = 2$, y puesto que la cuarta columna de $^-$ coincide con la primera, $r(\ ^-) = 2$. Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible e indeterminado.

Puesto que $^-$ tiene como básicas sus dos primeras filas, por el Teorema 2.5.2 la tercera debe de ser combinación lineal de las dos restantes; por tanto, la tercera ecuación del sistema no introduce nuevas soluciones en (5.2).

Podemos suprimirla del sistema y tenemos el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{l} \ _1 + 2 \ _2 \qquad\quad = 1 \\ 2 \ _1 + \ \ _2 + 3 \ _3 = 2 \end{array}\right\}.$$

Poniendo a la derecha de las igualdades las incógnitas correspondientes a las columnas no básicas se tiene

$$\left.\begin{array}{l} {}_1 + 2\ {}_2 = 1 \\ 2\ {}_1 + \ {}_2 = 2 - 3\ {}_3 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo este sistema por la regla de Cramer en función de ${}_3$ se tiene:

$${}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 - 3\ {}_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 4 + 6\ {}_3}{-3} = 1 - 2\ {}_3$$

$${}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 - 3\ {}_3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2 - 3\ {}_3 - 2}{-3} = \ {}_3.$$

Haciendo ${}_3 =$ se tiene

$$({}_1,\ {}_2,\ {}_3) = (1 - 2\ ,\ ,\ ) = (1, 0, 0) + \ (-2, 1, 1).$$

EJEMPLO G. El sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2\ {}_1 - 3\ {}_2 + \ 5\ {}_3 + \ 7\ {}_4 = 1 \\ 4\ {}_1 - 6\ {}_2 + \ 2\ {}_3 + \ 3\ {}_4 = 2 \\ 2\ {}_1 - 3\ {}_2 - 11\ {}_3 - 15\ {}_4 = 1 \end{array}\right\}$$

es compatible e indeterminado, ya que $r(\ ) = 2 = r(\ \bar{}\ ) < 4 =$ número de incógnitas (¡comprobarlo!). Puesto que $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ podemos suprimir la tercera fila y pasar al segundo miembro de las igualdades las incógnitas ${}_1$ y ${}_2$ para obtener

$$\left.\begin{array}{l} 5\ {}_3 + 7\ {}_4 = 1 - 2\ {}_1 + 3\ {}_2 \\ 2\ {}_3 + 3\ {}_4 = 2 - 4\ {}_1 + 6\ {}_2 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer se tiene

$${}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 2\ {}_1 + 3\ {}_2 & 7 \\ 2 - 4\ {}_1 + 6\ {}_2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 3 - 6\ {}_1 + 9\ {}_2 - 14 + 28\ {}_1 - 42\ {}_2 =$$

$$= 22\ {}_1 - 33\ {}_2 - 11,$$

$${}_4 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 - 2\ {}_1 + 3\ {}_2 \\ 2 & 2 - 4\ {}_1 + 6\ {}_2 \end{vmatrix}}{1} = 10 - 20\ {}_1 + 30\ {}_2 - 2 + 4\ {}_1 - 6\ {}_2 =$$

$$= -16\ {}_1 + 24\ {}_2 + 8.$$

Haciendo $_1 = {}_1$, $_2 = {}_2$ se tiene:

$$({}_1, {}_2, {}_3, {}_4) = ({}_1, {}_2, 22\ {}_1 - 33\ {}_2 - 11, -16\ {}_1 + 24\ {}_2 + 8) =$$
$$= (0, 0, -11, 8) + {}_1(1, 0, 22, -16) + {}_2(0, 1, -33, 24).$$

* * *

Resumimos a continuación los pasos a seguir para resolver un sistema compatible e indeterminado:

1) Detectar un menor básico de .
2) Suprimir las ecuaciones que corresponden a filas no básicas de .
3) Poner a la derecha de las ecuaciones aquellas incógnitas que corresponden a columnas no básicas de .
4) Resolver por la regla de Cramer.

* * *

En la sección 1.2 se demostró que todo sistema homogéneo e indeterminado tiene $= n - r( )$ soluciones linealmente independientes de manera que cualquier otra solución del sistema es combinación lineal de las anteriores (véase la Proposición 1.2.6).

Para terminar esta sección daremos una nueva demostración de este resultado.

Sea $\bar{} = \bar{0}$ un sistema homogéneo y sea $= r( )$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que un menor básico de está en su parte superior izquierda. Resolviendo $\bar{} = \bar{0}$ con las reglas dadas para resolver sistemas compatibles e indeterminados se tiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\ {}_1 + \cdots + a_1 & = -a_{1,\ +1}\ {}_{+1} - \cdots - a_{1n}\ {}_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}\ {}_1 + \cdots + a_m & = -a_{m,\ +1}\ {}_{+1} - \cdots - a_{mn}\ {}_n \end{array}\right\}. \tag{5.3}$$

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v\ )$, $= 1, ..., n -$, la solución que se obtiene de (5.3) haciendo $_+ = 1$ y $_+ = 0$ si $\neq$, $= 1, 2, ..., n -$, en la parte derecha del sistema.

Los vectores

$$\vec{e} = (v_1, v_2, ..., v\ , 0, ..., 0, \overset{+}{1}, 0, ..., 0)$$

$= 1, ..., n -$, son linealmente independientes ya que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & ..., & v_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & ..., & v_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ v_{n-\ ,1} & v_{n-\ ,2} & \cdots & v_{n-\ ,} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Menor básico de orden } n -$$

es $n -$.

Falta demostrar que cualquier otra solución de $\bar{} = \vec{0}$ es combinación lineal de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n-}$. Sea

$$\vec{e} = ({}_1, {}_2, ..., \ , \ {}_{+1}, ..., {}_n)$$

otra solución de $\bar{} = \vec{0}$. Consideremos el vector

$$\vec{e}_0 = \vec{e} - \ {}_{+1}\vec{e}_1 - \cdots - \ {}_n\vec{e}_{n-} .$$

El vector $\vec{e}_0$ es de la forma

$$\vec{e}_0 = (\ _1,\ _2, ...,\ \ , 0, 0, ..., 0)$$

como fácilmente puede comprobarse. Además, $\vec{e}_0$ es solución de $\ \vec{} = \vec{0}$, ya que es combinación lineal de soluciones de este mismo sistema (Proposición 1.2.5).

Por tanto, $(\ _1,\ _2, ...,\ \ )$ es solución del sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}\ _1 & + \cdots + & a_1\ \ = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a\ _1\ _1 & + \cdots + & a\ \ = 0 \end{array}\right\}$$

que se ha obtenido de (5.3) poniendo $\ _{+1} = 0, ...,\ _n = 0$. Puesto que el determinante de la matriz de este sistema es no nulo (¿por qué?), el sistema solamente posee la solución trivial. Por tanto, $\vec{e}_0 = 0$ y tenemos

$$\vec{e} = \ \ _{+1}\vec{e}_1 + \cdots + \ _n\vec{e}_{n-}$$

que era lo que deseábamos demostrar. ■

EJERCICIOS 2.5

1. Encontrar, mediante menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Encontrar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

para los distintos valores del número real a.

3. Demostrar que $n + 1$ vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ son siempre linealmente dependientes.

4. Probar que los siguientes sistemas son compatibles e indeterminados y resolverlos.

a) $\left.\begin{array}{l} 3\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 3 \\ 6\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 + 5\,x_4 = 7 \\ 9\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3 + 10\,x_4 = 13 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 4\,x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 2 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_4 = -1 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 - 3\,x_4 = 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3\,x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + 6\,x_2 + 3\,x_3 = 3 \end{array}\right\}$.

5. Estudiar mediante menores y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ 3x + 2y = 1 \\ 5x + 7y + 6z = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ 4x - 6y = 2 \\ -2x + 12y + z = 7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 2x + 3z = 4 \\ 2y + 5t = 0 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} x + 5y + 2z = 3 \\ 2y + 5z + 3t = 2 \\ -2x + 4y + 2t = 1 \end{array}\right\}$.

6. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{array}\right\}$$

encontrar el mayor número de soluciones que sean linealmente independientes. Indicar uno de estos conjuntos linealmente independiente de soluciones.

7. a) Sea $E_i(\ )$ una matriz elemental de la forma

$$E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & c \leftarrow & \text{fila } i \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

demostrar que el número $\quad$ para $E_i(\ )$ coincide con el número $\quad$ para $\quad$.

b) Sea E_i una matriz elemental que se ha obtenido intercambiando las filas i y $\quad$ de la matriz identidad; demostrar que el número $\quad$ para E_i coincide con el número $\quad$ para $\quad$.

c) Sea $_i(\ )$ la matriz elemental de la forma

$$E_i^j(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \leftarrow \text{fila } i \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \leftarrow \text{fila } j \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

demostrar que el número para $_i(\ )$ coincide con el número para .

Notas. En este problema, es una matriz cuadrada. Las demostraciones de estos resultados deben realizarse sin utilizar el Teorema 2.5.1.

Este problema completa la demostración del Teorema 2.5.1 de esta sección.

2.6. LA FACTORIZACIÓN *LU*. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en el Capítulo 1 hemos usado *el m to o e elimi na i n e Ga or an* reduciendo un sistema dado a otro equivalente más sencillo, cuya matriz es escalonada reducida, mediante operaciones elementales.

En este capítulo, en la sección 2.4, hemos resuelto sistemas de ecuaciones lineales $\bar{} = \vec{b}$ cuya matriz de coeficientes es invertible, determinando $^{-1}$, la inversa de dicha matriz, y calculando $\bar{} = \ ^{-1}\vec{b}$. Hemos visto que este método conduce a la regla de Cramer. Además, en la sección 2.5 hemos utilizado la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles e indeterminados.

En muchas aplicaciones prácticas, es preciso resolver sistemas de ecuaciones lineales de gran tamãno. También es frecuente que sea necesario resolver una colección de sistemas que tienen la misma matriz de coeficientes y distintas columnas de términos independientes. En estos casos, el método de eliminación de Gauss-Jordan no resulta eficiente porque en la eliminación se trabaja con la matriz ampliada del sistema —que incluye como última columna a la de los términos independientes—.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales basada en la factorización *LU*, que estudiaremos a continuación, aprovecha parte del trabajo realizado en la eliminación de Gauss-Jordan, pero separa las eliminaciones de la matriz de coficientes del sistema de los cálculos realizados con la columna de términos independientes. De este modo, proporciona un método más eficiente en general para resolver dichos sistemas.

La factorización *LU* de una matriz consiste en su descomposición como producto de ciertas matrices triangulares.

Definición 2.6.1

Una matriz con elementos $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant \ \leqslant n}$ es triangular superior si los elementos a_i para $i >$ son nulos. Una matriz es triangular inferior si es la traspuesta de una matriz triangular superior.

Observa que en una matriz triangular superior son nulos todos los elementos que quedan por debajo de los a_{ii} para $i = 1, ..., m$, mientras que en una triangular inferior , son nulos todos los que están por encima de los a_{ii} para $i = 1, ..., m$.

La *e om o i i n LU* de una matriz consiste en factorizarla como producto $= LU$ de una matriz triangular inferior L por una matriz triangular superior U.

Conocida una descomposición $= LU$, cada solución $^{\rightarrow}$ de un sistema de ecuaciones lineales

$$^{\rightarrow} = \vec{b} \tag{6.1}$$

que ahora puede escribirse como $LU^{\rightarrow} = \vec{b}$, es una solución del sistema

$$U^{\rightarrow} = \vec{y} \tag{6.2}$$

para alguna solución $\vec{y}$ del sistema

$$L\vec{y} = \vec{b}. \tag{6.3}$$

En general, la resolución de estos dos sistemas es más eficiente computacionalmente que la resolución del sistema original, ya que cuando una matriz es triangular, inferior o superior, resolver un sistema que la tiene como matriz de coeficientes es particularmente sencillo, despejando las incógnitas hacia delante o hacia atrás, respectivamente.

Algunos algoritmos utilizados en programas de ordenador emplean la factorización *LU* para calcular la inversa de una matriz , cuando esta existe, descomponiendo primero $= LU$ y calculando entonces $^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

EJEMPLO A. Supongamos que queremos resolver el sistema de ecuaciones lineales $^{\rightarrow} = \vec{b}$ con

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

para distintas colecciones $\vec{b}$ de términos independientes y que conocemos una descomposición $= LU$ con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cada colección de términos independientes $\vec{b}$, resolviendo primero el sistema (6.3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

por sustitución hacia delante, y después el sistema (6.2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

por sustitución hacia atrás, se obtiene la solución del sistema original (6.1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, para $\vec{b} = (1, 2, -2)$, el sistema (6.3) resulta ser:

$$\left.\begin{array}{rrrr} y_1 & & & = 1 \\ 2y_1 + & y_2 & & = 2 \\ -y_1 - & 2y_2 & + y_3 & = -2 \end{array}\right\}$$

de donde se obtiene $\vec{y} = (1, 0, -1)$ despejando hacia delante, y entonces el sistema (6.2) es:

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2\ {}_1 + & {}_2 & + 3\ {}_3 & = 1 \\ & -3\ {}_2 & - 3\ {}_3 & = 0 \\ & & 2\ {}_3 & = -1 \end{array}\right\}$$

y de aquí, despejando hacia atrás, resulta $\vec{} = (1, 1/2, -1/2)$ como solución del sistema original.

* * *

Respecto al coste computacional que suponen los diferentes métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales $\vec{} = \vec{b}$, para una matriz cuadrada de orden n, con n relativamente grande, digamos $n \geqslant 30$, el cálculo de una factorización LU conlleva aproximadamente $n^3/3$ operaciones aritméticas elementales, mientras que la eliminación de Gauss-Jordan para la matriz ampliada del sistema supone $n^3/2$. Por otro lado, el cálculo de la matriz inversa $^{-1}$, como se ha descrito en el Teorema 1.4.3, requiere alrededor de $2n^3$ de tales operaciones. Finalmente, la resolución de los dos sistemas triangulares $U\vec{} = \vec{y}$ y $L\vec{y} = \vec{b}$ supone unas $2n^2$ operaciones aritméticas elementales, aproximadamente lo mismo que la multiplicación de $^{-1}$ por la columna $\vec{b}$.

En la siguiente tabla, se compara el número aproximado de operaciones aritméticas elementales que conllevan los distintos métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes cuadrada de orden n, para n relativamente grande[1].

LU	Gauss-Jordan	A^{-1}	Cramer
$n^3/3$	$n^3/2$	$2n^3$	$n!n^2$

Observa que al aplicar la regla de Cramer, es preciso calcular $n + 1$ determinantes de orden n además de n divisiones y que el cálculo de un determinante exige aproximadamente $n!n$ sumas y $n! - 1$ multiplicaciones.

* * *

[1] Ver K. E. Atkinson, W. Han, *lementary meri al naly i* , 3.ª ed. John Wiley and Sons, 2003.

Desafortunadamente, no todas las matrices poseen descomposición *LU*. Un ejemplo sencillo es la matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que al escribirla como producto de una matriz triangular inferior por otra triangular superior con incógnitas como elementos y resolver el sistema correspondiente, se obtiene una contradicción y por lo tanto no es posible encontrar una factorización *LU* para dicha matriz.

Si, mediante operaciones elementales que no incluyen intercambios de filas, una matriz puede transformarse en una matriz escalonada *U* (que no necesariamente tiene unos en las esquinas de sus peldaños), entonces la factorización *LU* existe, como prueba el siguiente resultado:

Teorema 2.6.2

Si una matriz de tamaño $m \times n$ se puede convertir en una matriz escalonada *U* mediante operaciones elementales sin realizar intercambios de filas, entonces:

$$= LU$$

con *L* matriz triangular inferior de orden *m* e invertible y *U* matriz triangular superior del mismo tamaño que y escalonada.

Demostración. Si no es necesario intercambiar filas para llegar a una forma escalonada de , entonces basta usar las matrices elementales $_i(\ )$ y $_i(\ )$ con $i <$, que son matrices triangulares inferiores (ver sección 2.3). Luego, por hipótesis, existen matrices elementales triangulares inferiores de orden *m*, $_1$, $_2$, ..., tales que:

$$U = (\quad \cdots \quad _2 \ _1)$$

de tamãno $m \times n$, es escalonada, y por tanto, triangular superior.

Entonces $= LU$, con *U* matriz triangular superior y $L = \ ^{-1}_1 \ ^{-1}_2 \cdots \ ^{-1}$, matriz triangular inferior, ya que es producto de matrices triangulares inferiores. Además *L* es invertible (por ser producto de matrices invertibles), lo que prueba el resultado. ■

Observación. El proceso por el cual realizando transformaciones elementales en una matriz se obtiene una matriz escalonada se conoce como eliminación de Gauss frente a la eliminación de Gauss-Jordan, que conduce a una matriz escalonada reducida (con unos en las esquinas de sus peldaños y ceros encima de estos unos).

EJEMPLO B. Encontremos la factorización *LU* para la matriz del ejemplo anterior,

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Con la notación introducida en la sección 2.3 para las matrices elementales:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 \\ \boxed{4} & -1 & 3 \\ \boxed{-2} & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1^3(1)]{E_1^2(-2)} \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & \boxed{6} & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2^3(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

De esta forma:

$$U = \ {}_2^3(2)\ {}_1^3(1)\ {}_1^2(-2)$$

es triangular superior y entonces $\quad = LU$ con

$$L = [\ {}_2^3(2)\ {}_1^3(1)\ {}_1^2(-2)]^{-1}.$$

Es decir

$$L = \ {}_1^2(2)\ {}_1^3(-1)\ {}_2^3(-2) = \ {}_1^2(2)\ {}_1^3(-1)\ {}_2^3(-2)$$

siendo $\quad$ la matriz identidad de orden 3.

Por tanto:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{{}_2^3(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{{}_1^3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{{}_1^2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

El lector puede comprobar que $\quad = LU$.

EJEMPLO C. Encontremos la factorización LU para la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Buscamos primero U:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & -2 & 0 & 2 \\ \boxed{3} & 9 & -3 & 3 & 1 \\ \boxed{-1} & -3 & 1 & -3 & 1 \\ \boxed{-2} & -6 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1^4(1)]{E_1^2(-3/2)\ E_1^3(1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-6} & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2^4(2)]{E_2^3(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

con lo cual:

$$U = \ {}^{4}_{2}(2)\ \ {}^{3}_{2}(1)\ \ {}^{4}_{1}(1)\ \ {}^{3}_{1}(1/2)\ \ {}^{2}_{1}(-3/2)$$

es triangular superior y entonces $\quad = LU$ con

$$L = [\ {}^{4}_{2}(2)\ \ {}^{3}_{2}(1)\ \ {}^{4}_{1}(1)\ \ {}^{3}_{1}(1/2)\ \ {}^{2}_{1}(-3/2)]^{-1} = \ {}^{2}_{1}(3/2)\ \ {}^{3}_{1}(-1/2)\ \ {}^{4}_{1}(-1)\ \ {}^{3}_{2}(-1)\ \ {}^{4}_{2}(-2)$$

que resulta ser:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz que es triangular inferior e invertible.

El procedimiento utilizado en los ejemplos B y C para encontrar la factorización *LU* de la matriz de tamãno $m \times n$ considerada se puede esquematizar del modo siguiente: se comienza con (|), siendo la matriz identidad de orden *m*, se hacen las transformaciones elementales sin intercambio de filas para obtener ($|U$) donde *U* es una forma escalonada de y entonces se tiene que $L = \ ^{-1}$.

Observar que en los ejemplos B y C, las columnas de la matriz triangular inferior *L*, se pueden ir obteniendo de izquierda a derecha: se van tomando las columnas recuadradas en la reducción de (*ol mna rin i ale*), y se divide cada una de ellas por el primer elemento del recuadro; agotadas las columnas principales (tantas como el rango de la matriz original), en el resto de columnas de *L* todos los elementos son nulos excepto los colocados en la diagonal de *L*, que son unos. Se puede comprobar que lo mismo sucede en general[2] cuando para obtener *U* solo se han realizado operaciones elementales de la forma $_i(\ )$ con $i <$. De esta forma, en la práctica se utilizan algoritmos de factorización *LU* que, en lugar de hacer cálculos con matrices elementales y sus inversas para construir *L*, van almacenando una a una sus columnas, obtenidas a partir de la reducción de .

* * *

Cuando una matriz no tiene factorización *LU* y por tanto, se requieren intercambios de filas para reducirla a una matriz escalonada, realizando todos esos intercambios de filas, se obtendría una matriz que ya no precisa dichos intercambios en la reducción a matriz escalonada con el método de eliminación de Gauss. Esta nueva matriz se puede expresar como con una *matri e inter ambio*, definida como el producto de las matrices elementales correspondientes a los intercambios de fila en el orden adecuado[2]. Entonces, de acuerdo con el Teorema 2.6.2, la matriz se puede descomponer como $= LU$ y, por tanto,

$$= \ ^{-1}LU$$

con $^{-1}$ matriz de intercambio, *L* matriz triangular inferior y *U* matriz triangular superior. Esta descomposición se llama *a tori a i n LU* y también puede utilizarse en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

---

[2] W. K. Nicholson, *Álgebra Lineal on a li a ione* , McGraw-Hill, 2003.

EJEMPLO D. Encontremos la factorización LU para la matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la matriz de intercambio es simplemente la correspondiente al intercambio de las dos filas de ,

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

que en este ejemplo ya es una matriz escalonada U, con lo cual $= LU$ con L la matriz identidad de orden 2 y finalmente, la descomposición LU de es:

$$= \ ^{-1}LU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO E. Encontremos la factorización LU para la matriz

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Realizamos la reducción a forma escalonada de ,

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U.$$

En este ejemplo, la matriz corresponde al intercambio de las filas segunda y tercera de , con lo cual

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

y la factorización LU de es:

$$= \ ^{-1}LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS 2.6

1. Encontrar una factorización *LU* de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Discutir y, en su caso, resolver el sistema de ecuaciones lineales $\vec{} = \vec{b}$ utilizando la descomposición *LU* para los siguientes sistemas:

a) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Hallar una descomposición *LU* de la matriz tridiagonal

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Dada la matriz tridiagonal

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

encontrar una descomposición LU de y usarla para resolver el sistema

$$\vec{} = \vec{b} \quad \text{con} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Hallar una matriz de intercambio y una factorización LU de para las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6. a) Encontrar dos factorizaciones LU distintas de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Es posible encontrar dos factorizaciones LU distintas para la matriz del apartado a) tales que L tenga unos en la diagonal?

7. Considerar una matriz cuadrada invertible que no requiere intercambios de filas para llegar a una forma escalonada U haciendo operaciones elementales con sus filas.

Considerar ahora una factorización LU de tal que L tiene unos en la diagonal.

Demostrar que dicha factorización es única.

(*n i a i n* Si $= L_1U_1 = L_2U_2$, comprobar que $U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$ y que $U_1U_2^{-1}$ es triangular superior, mientras que $L_1^{-1}L_2$ es triangular inferior. Deducir entonces el resultado.)

2.7. DETERMINANTES Y PERMUTACIONES

Presentaremos a continuación una nueva fórmula para calcular el determinante de una matriz cuadrada. Esta nueva fórmula requiere el concepto de *erm ta i n*.

Recibe el nombre de *erm ta i n* de los números naturales 1, 2, ..., n toda aplicación biyectiva del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ en sí mismo. Las permutaciones se representarán con las letras griegas α, β, γ, ...

EJEMPLO A. Las permutaciones de los números naturales 1 y 2 son $\alpha: \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ dada por $\alpha(1) = 1$ y $\alpha(2) = 2$, y $\beta: \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ dada por $\beta(1) = 2$ y $\beta(2) = 1$.

A continuación escribimos las permutaciones de los números naturales 1, 2 y 3:

$$\begin{aligned}
\alpha_1&: \quad \alpha_1(1)=1, \quad \alpha_1(2)=2, \quad \alpha_1(3)=3\\
\alpha_2&: \quad \alpha_2(1)=2, \quad \alpha_2(2)=1, \quad \alpha_2(3)=3\\
\alpha_3&: \quad \alpha_3(1)=3, \quad \alpha_3(2)=1, \quad \alpha_3(3)=2\\
\alpha_4&: \quad \alpha_4(1)=3, \quad \alpha_4(2)=2, \quad \alpha_4(3)=1\\
\alpha_5&: \quad \alpha_5(1)=2, \quad \alpha_5(2)=3, \quad \alpha_5(3)=1\\
\alpha_6&: \quad \alpha_6(1)=1, \quad \alpha_6(2)=3, \quad \alpha_6(3)=2.
\end{aligned}$$

Al lector se le ha pedido todas estas aplicaciones en el ejercicio 2 de la sección 1.3.

* * *

Para escribir una permutación no es necesario escribir los elementos del conjunto inicial; basta con escribir ordenadamente la imagen de los elementos en su orden natural. Así, por ejemplo:

$$\alpha_3 = (3 \quad 1 \quad 2)$$

y

$$\alpha_5 = (2 \quad 3 \quad 1)$$

donde α_3 y α_5 son como en el ejemplo .

Si llamamos $_n$ al conjunto de todas las permutaciones de los n primeros números naturales y $\alpha \in {}_n$ podemos escribir

$$\alpha = (\alpha(1) \quad \alpha(2) \quad \cdots \quad \alpha(n)).$$

Dada una permutación α de $_n$, diremos que en α se ha *reali a o na inver i n* si se han intercambiado entre sí dos elementos de su imagen. El resultado de realizar una inversión en una permutación es, de nuevo, una permutación.

EJEMPLO B. $\beta = (14325)$ es una permutación que se obtiene de $\alpha = (54321)$ realizando una inversión; a saber, se han invertido el 1 y el 5.

* * *

Sea $_\alpha$ el número de inversiones que es necesario realizar en la permutación α para transformarla en la permutación identidad; el número $_\alpha$ no es fijo para una permutación $\alpha \in {}_n$, sino que varía según el orden en que se realicen las inversiones. Sin embargo, si por un procedimiento se ha necesitado un número par (impar) de inversiones cualquier otro procedimiento debe necesitar un número par (impar) de inversiones.

Por tanto, el número

$$\operatorname{sig}(\alpha) = (-1)^{\alpha}$$

que recibe el nombre de *ignat ra e* α, no depende de la forma en que se realicen las inversiones[3].

Si $_\alpha$ es par, la signatura de α es $+1$ y entonces diremos que α es una permutación *ar*; si $_\alpha$ es impar, la signatura de α es -1 y entonces diremos que α es una permutación *im ar*.

[3] J. Dorronsoro, E. Hernández, *mero , gr o y anillo* , Addison Wesley/UAM, 1996.

EJEMPLO C. Dada la permutación $\alpha = (53142)$ podemos invertir el 1 y el 5 para obtener $\alpha_1 = (13542)$; a continuación invertimos el 2 y el 3 para obtener $\alpha_2 = (12543)$; finalmente invertimos el 3 y el 5 para obtener $\alpha_3 = (12345)$, que coincide con la permutación identidad. Por tanto,

$$\operatorname{sig}(\alpha) = (-1)^3 = -1.$$

El proceso que hemos seguido para hallar la signatura de α puede esquematizarse de la siguiente forma:

$$\alpha = (53142) \xrightarrow{5 \leftrightarrows 1} (13542) \xrightarrow{3 \leftrightarrows 2} (12543) \xrightarrow{5 \leftrightarrows 3} (12345).$$

* * *

Pasamos a continuación a dar una fórmula para el determinante, que utiliza el concepto de permutación. Si comenzamos con matrices de orden 3 sabemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Observar que esta «suma algebraica» posee 6 elementos y que cada uno de sus términos tiene 3 elementos, de manera que cada uno de estos tres elementos proviene de distinta fila y distinta columna que los restantes. Además, el subíndice de las filas está siempre ordenado, mientras que el subíndice de las columnas forma una permutación de los elementos 1, 2 y 3. Por tanto, los 6 términos anteriores pueden escribirse de la forma

$$a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}a_{3\alpha(3)}, \qquad \alpha \in \ _3,$$

afectados de un signo «positivo» o «negativo». Para determinar el signo de cada uno de estos sumandos observamos que los términos positivos corresponden a las permutaciones pares α_1, α_2 y α_3 del ejemplo A y los términos negativos corresponden a las permutaciones impares α_4, α_5 y α_6 del ejemplo A. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \in \ _3} (\operatorname{sig}(\alpha)) a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}a_{3\alpha(3)}.$$

Este resultado sugiere el siguiente:

Teorema 2.7.1

Sea $= (a_i)_{i, \ = 1, \ldots, n}$ una matriz de orden n; si definimos

$$\Delta(\ ) = \sum_{\alpha \in \ _n} (\operatorname{sig}(\alpha)) a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

se tiene que $|\ \ | = \Delta(\ )$.

Antes de demostrar el Teorema 2.7.1 necesitamos los siguientes resultados:

Lema 2.7.2

Si es una matriz $(a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ en la que la i-ésima fila es una suma de la forma $a_i = b_i + b'_i$, $= 1, 2, \ldots, n$ y escribimos

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad ' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b'_{i1} & b'_{i2} & \cdots & b'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\Delta(\ ) = \Delta(\ ) + \Delta(\ ').$$

Demostración. Por la definición de se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta(\ ) &= \sum_{\alpha \in\ _n} (\operatorname{sig}(\alpha)) a_{1\alpha(1)} \cdots a_{i\alpha(i)} \cdots a_{n\alpha(n)} = \\ &= \sum_{\alpha \in\ _n} (\operatorname{sig}(\alpha)) a_{1\alpha(1)} \cdots [b_{i\alpha(i)} + b'_{i\alpha(i)}] \cdots a_{n\alpha(n)} = \\ &= \sum_{\alpha \in\ _n} (\operatorname{sig}(\alpha)) a_{1\alpha(1)} \cdots b_{i\alpha(i)} \cdots a_{n\alpha(n)} + \sum_{\alpha \in\ _n} (\operatorname{sig}(\alpha)) a_{1\alpha(1)} \cdots b'_{i\alpha(i)} \cdots a_{n\alpha(n)} = \\ &= \Delta(\ ) + \Delta(\ '). \end{aligned}$$

■

Lema 2.7.3

Si $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ y denota la matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_i & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

que se obtiene de sustituyendo todos los elementos de la última fila por cero excepto el que ocupa la columna , se tiene que

$$\Delta(\ ) = (-1)^{n+}\, a_n\, \Delta(\ _n)$$

donde $_n$ denota la matriz adjunta del elemento que ocupa el lugar $(n,\ )$.

Demostración. Comenzamos observando que si es la matriz que se obtiene de intercambiando dos columnas se tiene que $\Delta(\ ) = -\Delta(\ )$; la demostración de este resultado se pide en el ejercicio 3 al final de esta sección.

Intercambiamos la columna de con todas las columnas posteriores a ella hasta llevarla a la última columna de la matriz; se obtiene así la matriz

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,\ -1} & b_1 & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2,\ -1} & b_2 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\ -1} & a_{1,\ +1} & \cdots & a_{1,n} & a_i \\ a_{21} & \cdots & a_{2,\ -1} & a_{2,\ +1} & \cdots & a_{2,n} & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Puesto que la columna se ha intercambiado $n -$ veces para llevarla a la última columna, se tiene que

$$\Delta(\quad) = (-1)^{n-}\,\Delta(\quad).$$

Observando que $(-1)^{-n} = (-1)^n$ se tiene que

$$\Delta(\quad) = (-1)^{-n+}\,\Delta(\quad) = (-1)^{n+}\,\Delta(\quad). \tag{7.1}$$

Para calcular $\Delta(\quad)$ utilizamos la definición de Δ y se obtiene:

$$\Delta(\quad) = \sum_{\substack{\alpha \in \ _n \\ \alpha(n) = n}} (\operatorname{sig}\alpha) b_{1\alpha(1)} \cdots b_{n-1,\,\alpha(n-1)} \cdot b_{n\alpha(n)}$$

ya que si $\alpha(n) \neq n$, $b_{n\alpha(n)} = 0$. Toda permutación $\alpha \in \ _n$ que satisface $\alpha(n) = n$ puede interpretarse como una permutación $\beta \in \ _{n-1}$ sin más que definir $\beta(\ ) = \alpha(\ )$, $1 \leqslant 1 \leqslant n - 1$; recíprocamente, si $\beta \in \ _{n-1}$ podemos definir $\alpha \in \ _n$ tal que $\alpha(\ )$, $1 \leqslant \ \leqslant n - 1$ y $\alpha(n) = n$; además, $\operatorname{sig}(\alpha) = \operatorname{sig}(\beta)$. Por tanto:

$$\Delta(\quad) = b_{nn}\left[\sum_{\beta \in \ _{n-1}} (\operatorname{sig}\beta) b_{1\alpha(1)} \cdots b_{n-1,\,\beta(n-1)}\right] = b_{nn}\Delta(\ _{nn}).$$

Puesto que $b_{nn} = a_n$ y $\ _{nn} = \ _n$, se tiene que

$$\Delta(\quad) = a_n\,\Delta(\ _n).$$

Sustituyendo este resultado en la fórmula (7.1) se obtiene el resultado deseado. ■

Demostración del Teorema 2.7.1. Realizaremos la demostración mediante el método de inducción. Si es de orden 3 ya hemos comprobado anteriormente que el resultado es cierto; el lector puede comprobar que el resultado es también cierto si es de orden 2.

Supongamos que el teorema es cierto para toda matriz de orden inferior a n y sea $= (a_i)_{i,\,i=1,\ldots,n}$ una matriz de orden n. La matriz puede escribirse de la forma

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{n2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aplicando repetidamente el Lema 2.7.2 se tiene que

$$\Delta(\ ) = \Delta(\ _1) + \Delta(\ _2) + \cdots + \Delta(\ ) + \cdots + \Delta(\ _n)$$

donde , = 1, 2, ..., n, es la matriz que se obtiene sustituyendo la última fila de por ceros, excepto el lugar en el que se deja a_n . Por el Lema 2.7.3 se tiene que

$$\Delta(\ ) = (-1)^{n+1}a_{n1}\Delta(\ _{n1}) + \cdots + (-1)^{n+}\ a_n\,\Delta(\ _n) + \cdots + (-1)^{2n}a_{nn}\Delta(\ _{nn}).$$

Puesto que las matrices $_n$, = 1, 2, ..., n, son de orden $n - 1$, por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\Delta(\ ) = (-1)^{n+1}a_{n1}|\ _{n1}| + \cdots + (-1)^{n+}\ a_n|\ _n| + \cdots + (-1)^{2n}a_{nn}|\ _{nn}| = |\ |$$

donde la última igualdad se debe al Teorema 2.2.4 (desarrollo del determinante por la última fila). Esto termina la demostración. ■

La fórmula del determinante resulta engorrosa cuando se trata de matrices de orden superior a tres si queremos utilizarla en el cálculo práctico. Por otro lado, es bastante eficiente para realizar algunas de las demostraciones de las propiedades de los determinantes, que se expusieron en la sección 2 de este mismo capítulo.

Por ejemplo, la propiedad 1, que expresa que si una matriz tiene una fila (columna) de ceros su determinante es nulo, es fácil de demostrar. Basta observar que en todos los términos de $\Delta(\ )$ aparece un elemento nulo y, por tanto, $|\ | = \Delta(\ ) = 0$. Las demostraciones de otras propiedades se piden en los ejercicios al final de esta sección.

EJERCICIOS 2.7

1. Dadas las permutaciones

$$\alpha = (23154) \quad , \quad \beta = (13245) \quad , \quad \gamma = (53412)$$
$$\lambda = (31856472) \quad , \quad \delta = (4321)$$

calcular la signatura de cada una de ellas y la signatura de $\beta \circ \alpha$, β^{-1} y $\gamma \circ \beta^{-1}$.

2. Indicar el signo de los términos $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ y $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ en el desarrollo del determinante de una matriz de orden 4.

3. a) Demostrar que si β es la permutación que se obtiene de α intercambiando $\alpha(i)$ y $\alpha(\ )$, $i \neq$, se tiene que $\text{sig}\,(\beta) = -\,\text{sig}\,(\alpha)$.

b) Demostrar que si es la matriz que se obtiene de intercambiando dos columnas se tiene que $\Delta(\ ) = -\Delta(\ )$.

4. Demostrar que si es la matriz que se obtiene de multiplicando una de sus filas por r se tiene que $\Delta(\ ) = r\Delta(\ )$.

5. Utilizar el problema 3 para demostrar que si es una matriz con dos filas idénticas se tiene $\Delta(\ ) = 0$.

6. Si $(\ )$ es una matriz $n \times n$ cuyos elementos son funciones derivables $m_i(\ )$, $\in \mathbb{R}$, con valores reales, demostrar que

$$— | \quad (\ )| = \sum_{=1}^{n} | \quad (\ )|$$

donde $(\ )$ es la matriz que se obtiene derivando la ésima columna de $(\ )$.

Capítulo 3

Los números complejos.

3.1. Los números complejos y sus propiedades.

3.2. Formas trigonométrica y polar de un número complejo.

3.3. Raíces de números complejos.

3.4. Resolución de ecuaciones algebraicas.

3.5. Ejercicios de álgebra lineal con números complejos.

Introducción

Las sucesivas ampliaciones de los sistemas de números se han realizado para acomodar resultados sorprendentes en los sistemas de números conocidos. Estos resultados sorprendentes provienen, en la mayor parte de los casos, de la resolución de ecuaciones algebraicas.

Por ejemplo, la ecuación $+ 7 = 5$, en la que solamente aparecen números naturales, no posee ningún número natural como solución; su solución es el número negativo -2. Los números naturales, junto con los números negativos, forman el sistema de los números enteros. Este sistema de números es insuficiente para resolver todas las ecuaciones algebraicas; la ecuación $3 = 5$ no posee como solución ningún número entero; su solución es el número fraccionario 5/3. Los números enteros, junto con los números fraccionarios, forman el conjunto de los números racionales. Estos números resultan insuficientes para resolver ecuaciones cuadráticas; por ejemplo, la ecuación $^2 = 2$ no tiene un número racional como solución; sus soluciones son los números irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Los números racionales, junto con los irracionales, forman el sistema de los números reales.

En todos estos sistemas de números están definidas las operaciones de suma y multiplicación, que generalizan las operaciones con números naturales.

Los números reales no son, sin embargo, suficientes para acoger en su seno las soluciones de toda ecuación cuadrática. La ecuación $^2 = -1$ carece de toda solución real, ya que el cuadrado de un número real no nulo es siempre un número positivo. Nos vemos en la necesidad de ampliar el concepto de número para incluir aquellos que permitan resolver esta ecuación. La idea más sencilla, y a la vez genial, es definir un «nuevo» número, i, de manera que satisfaga la relación fundamental $i^2 = -1$. El nuevo sistema de números que se obtiene añadiendo este y sus combinaciones a los números reales recibe el nombre de *i tema e n mero om le o* . Las operaciones que con ellos se realicen deben ser una generalización de las correspondientes operaciones con números reales. Este capítulo está dedicado al estudio de los números complejos.

3.1. LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y SUS PROPIEDADES

Un número complejo es toda expresión de la forma

$$= a + bi$$

donde a y b son números reales e i es un número que satisface $i^2 = -1$. El número real a recibe el nombre de *arte real* del número complejo , y se representa mediante Re( ), y el número real b recibe el nombre de *arte imaginaria* de y se representa mediante Im( ).

La *ma e o n mero om le o* es otro número complejo, que tiene como parte real la suma de las partes reales de cada uno de ellos, y como parte imaginaria la suma de las partes imaginarias de cada uno de ellos; así pues, si

$$= a + bi \quad , \quad ' = \quad + \quad i$$

se tiene que

$$+ \ ' = (a + \ ) + (b + \ )i.$$

El *producto de números complejos* es otro número complejo que se obtiene multiplicando los números complejos como si fueran polinomios en la variable i y sustituyendo i^2 por -1 siempre que aparezca. Tenemos, entonces, que

$$\cdot \prime = (a + bi)(+ i) = a + a\, i + b\, i + b\, i^2 = (a - b\ ) + (a + b\ )i.$$

EJEMPLO A. Queremos calcular $[(3 + 2i)^3 + (1 - i)]^2$; podemos utilizar el binomio de Newton para calcular el cubo de $(3 + 2i)$ y obtenemos

$$(3 + 2i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2i + 3 \cdot 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i.$$

Por tanto:

$$[(3 + 2i)^3 + (1 - i)]^2 = [(-9 + 46i) + (1 - i)]^2 = (-8 + 45i)^2 = (-8)^2 - 45^2 +$$
$$+ 2 \cdot (-8) \cdot 45i = -1961 - 720i.$$

EJEMPLO B. Puesto que $i^2 = -1$, tenemos que $i^4 = (-1)^2 = 1$; por tanto, si n es un número natural que al dividirlo entre 4 da de resto r, $0 \leqslant r < 4$, es decir, $n = 4l + r$, donde l es un número natural, se tiene que

$$i^n = i^{4l} i^r = i^r.$$

Así, por ejemplo, $i^{431} = i^3$, ya que $431 = 4 \times 107 + 3$; puesto que $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, se tiene que $i^{431} = -i$.

* * *

El *cociente entre números complejos*, de los cuales el divisor es no nulo, es otro número complejo; si deseamos hallar el cociente entre los números complejos $= a + bi$ y $\prime = + i \neq 0$, escribimos

$$\frac{}{\prime} = \frac{a + bi}{+ i} = + iy.$$

El número complejo $+ iy$ es el cociente entre y $\prime$ si se cumple que

$$(+ i)(+ iy) = a + bi.$$

Utilizando la definición de producto de números complejos e igualando las partes reales e imaginarias se tiene que

$$\left.\begin{aligned} - y &= a \\ + y &= b \end{aligned}\right\}.$$

Como $^2 + {}^2 \neq 0$ por ser $\prime \neq 0$, el sistema tiene solución única. Esta es

$$= \frac{a + b}{^2 + {}^2}, \qquad y = \frac{b - a}{^2 + {}^2}.$$

Por tanto:

$$\frac{a + bi}{+ i} = \frac{a + b}{^2 + {}^2} + i\,\frac{b - a}{^2 + {}^2}.$$

La fórmula para calcular el cociente de dos números complejos no es muy dificil de recordar; sin embargo, es mucho más fácil calcular el cociente de dos números complejos utilizando la noción de conjugado. Se denomina *on ga o* del número complejo $' = + i$ al número complejo

$$\overline{'} = - i$$

que posee la misma parte real que $'$, y su parte imaginaria se ha cambiado de signo.

Al multiplicar un número complejo $' = + i$ por su conjugado se tiene

$$' \cdot \overline{'} = (+ i)(- i) = ^2 + ^2$$

que coincide con el denominador de las partes real e imaginaria del cociente entre y $'$. Esto sugiere que para calcular el cociente entre dos números complejos hasta multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. En efecto, este cálculo proporciona el resultado adecuado, ya que

$$\frac{a + bi}{+ i} = \frac{a + bi}{+ i} \cdot \frac{- i}{- i} = \frac{(a + b) + i(b - a)}{^2 + ^2} = \frac{a + b}{^2 + ^2} + i\,\frac{b - a}{^2 + ^2}. \qquad (1.1)$$

EJEMPLO C. Queremos expresar el número complejo

$$\frac{(1 - i)(1 + 2i)}{1 + i}$$

en la forma $a + bi$; el numerador da como resultado

$$(1 - i)(1 + 2i) = 1 + 2i - i - 2i^2 = 1 + 2 + i = 3 + i.$$

Multiplicando numerador y denominador por $1 - i$ se tiene

$$\frac{(1 - i)(1 + 2i)}{1 + i} = \frac{3 + i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i + i - i^2}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i.$$

* * *

La suma de números complejos cumple las siguientes propiedades, que son semejantes a las propiedades de la suma de números reales:

(S1) Asociativa:

$$(a + bi) + [(+ i) + (e + i)] = [(a + bi) + (+ i)] + (e + i).$$

(S2) Conmutativa:

$$(a + bi) + (+ i) = (+ i) + (a + bi).$$

(S3) Existencia de elemento neutro: el número complejo $0 = 0 + 0i$ satisface

$$(a + bi) + 0 = 0 + (a + bi) = a + bi.$$

(S4) Existencia de elemento opuesto: el opuesto de $a + bi$ es $-a - bi$.

El producto de números complejos tiene propiedades análogas a las de la suma; son las siguientes:

(P1) Asociativa:

$$(a + bi)[(\ \ +\ \ i)(e +\ \ i)] = [(a + bi)(\ \ +\ \ i)](e +\ \ i).$$

(P2) Conmutativa:

$$(a + bi)(\ \ +\ \ i) = (\ \ +\ \ i)(a + bi).$$

(P3) Existencia de elemento unidad: el número complejo $1 = 1 + 0i$ satisface

$$(a + bi)1 = 1(a + bi) = a + bi.$$

(P4) Existe el inverso de todo número complejo distinto de cero: el inverso de un número complejo $\ \ = a + bi$, no nulo, es otro número complejo $\ \ + yi$ tal que

$$(a + bi)(\ \ + yi) = 1.$$

Por tanto,

$$+ yi = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{(-b)}{a^2 + b^2}$$

según vimos en (1.1).

Finalmente, la suma y el producto de números complejos están relacionadas mediante la siguiente propiedad:

(D1) Distributiva:

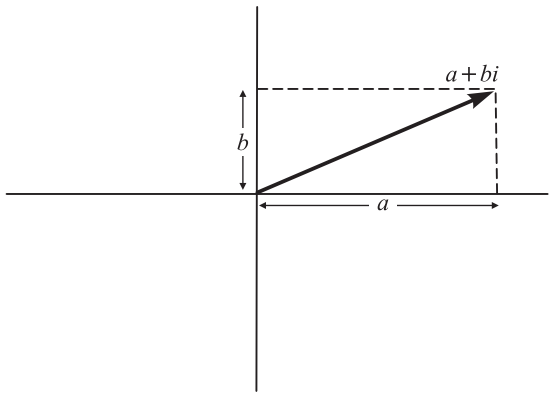
$$(a + bi)[(\ \ +\ \ i) + (e +\ \ i)] = (a + bi)(\ \ +\ \ i) + (a + bi)(e +\ \ i).$$

El lector no tendrá gran dificultad en comprobar las propiedades anteriormente expuestas. Cuando un sistema de números con operaciones en él definidas satisface las propiedades anteriores recibe el nombre de $\ \ er\ \ o$. Podemos hablar, entonces, del cuerpo de los números complejos que denotaremos por $\mathbb{C}$.

* * *

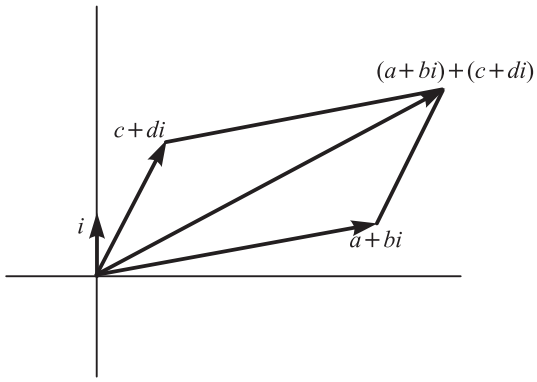
La validez de las operaciones con números complejos era cuestionada por varios matemáticos anteriores al siglo XIX. El nombre de «imaginarios» que aún se da a los números complejos cuya parte real es nula es un vestigio de este escepticismo. Sin embargo, a comienzos del siglo XIX una sencilla interpretación geométrica de las operaciones con números complejos hizo desaparecer estas sospechas. Esta interpretación geométrica fue encontrada simultáneamente por Wessel (1745-1818), Argand (1768-1822) y Gauss (1777-1855).

Esta interpretación geométrica consiste en colocar la parte real de un número complejo en un eje y su parte imaginaria en otro eje perpendicular al primero. El primero de estos ejes se denomina *e e real* y el segundo *e e imaginario*. De esta forma todo número complejo queda representado en un plano mediante un vector, como puede apreciarse en la figura 3.1.



i ra 3.1

La suma de dos números complejos es un número complejo cuya representación gráfica coincide con la diagonal del paralelogramo que se obtiene con los dos vectores dados (véase figura 3.2).



i ra 3.2

Para poder interpretar geométricamente la multiplicación de números complejos es necesario recurrir a una nueva forma de escribirlos. Esto se hará en la próxima sección.

EJERCICIOS 3.1

1. Calcular:

   a) $[(2 - 3i)^3 - i)]^2$ **b)** $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ **c)** $[(2 + i)(2 - i)]^2$.

2. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$:

   a) $\frac{1 - i}{1 + i}$ **b)** $\frac{(3 - i)(2 + i)}{3 + i}$ **c)** $\frac{(2 - i)^2}{(3 - i)^2}$.

3. Encontrar las partes reales e imaginarias de

$$^2, \quad \frac{1}{-2} \quad \text{y} \quad \frac{+1}{-1}$$

donde $= a + bi$.

4. Encontrar dos números complejos tales que su cuadrado sea $8 - 6i$.

5. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\overline{_1 + _2} = \overline{_1} + \overline{_2}$ **b)** $\overline{_1 _2} = \overline{_1}\,\overline{_2}$

donde $_1$ y $_2$ son dos números complejos cualesquiera.

3.2. FORMAS TRIGONOMÉTRICA Y POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Se denomina *m lo* de un número complejo $= a + bi$ a la longitud r del vector que lo representa, y se escribe de la forma $| |$. Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$r = | | = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Todo número complejo posee un módulo positivo, excepto el número complejo $= 0$, que posee módulo nulo.

El ángulo que forma la dirección positiva del eje real con el vector que representa al número complejo se denomina *arg mento* de y se representa mediante

$$\alpha = \arg( ).$$

El argumento de un número complejo no está determinado unívocamente, sino que puede variar en un múltiplo de $360^\circ = 2\pi$ radianes. En cualquier caso, la trigonometría elemental nos permite obtener:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

siempre que a sea no nulo.

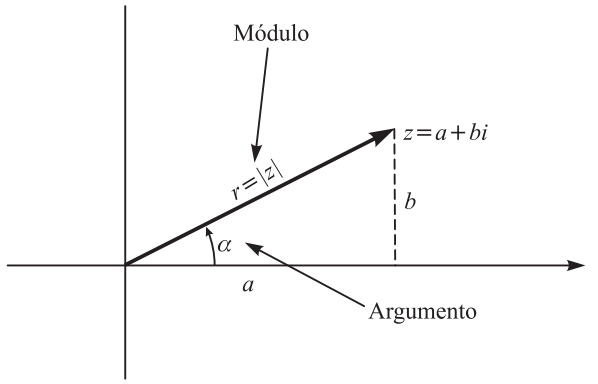
En el triángulo de la figura 3.3 puede observarse que

$$a = r\cos\alpha \quad \text{y} \quad b = r\,\text{sen}\,\alpha$$

y, por tanto:

$$= r\,[\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha]$$

que recibe el nombre de *orma trigonom tri a* del número complejo .



i ra 3.3

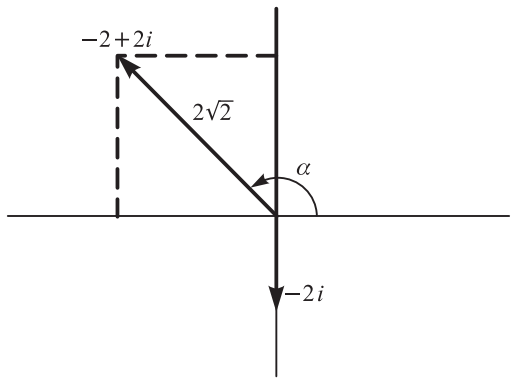
EJEMPLO A. Queremos escribir el número complejo $= -2 + 2i$ en forma trigonométrica; su módulo es $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ y su argumento α satisface $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{2}{2} = -1$; por tanto, como el número complejo está en el segundo cuadrante, se tiene $\alpha = 135^{\text{o}}$. Así pues,

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}\,[\cos 135^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 135^{\text{o}}].$$

El lector puede también comprobar que

$$-2i = 2[\cos 270^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 270^{\text{o}}]$$

obteniéndose así la forma trigonométrica del número complejo $= -2i$.



i ra 3.4

* * *

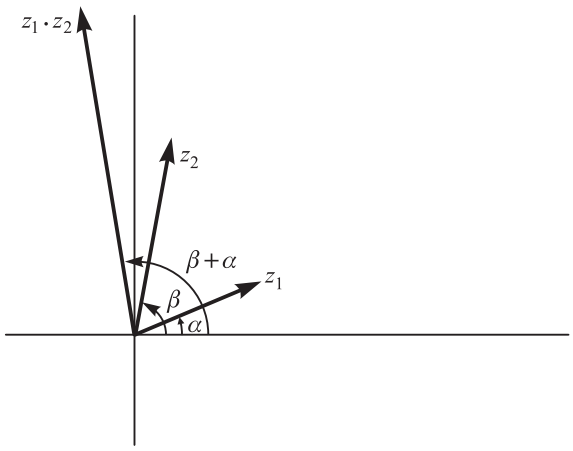
Dados los números complejos $_1 = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ y $_2 = (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ en su forma trigonométrica, su producto es

$$_1 \cdot\ _2 = r\,[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)].$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas para el coseno y el seno de una suma de ángulos se tiene que

$$_1 \cdot \ _2 = r\ [\cos(\alpha + \beta) + i\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta)]. \tag{2.1}$$

De aquí se deduce que el módulo de un producto de números complejos es el producto de los módulos de cada uno de ellos y que su argumento es la suma de los argumentos de cada uno de ellos. Esta afirmación tiene una representación geométrica sencilla que puede observarse en la figura 3.5.



i ra 3.5

Para interpretar geométricamente el cociente $_1/\ _2$, donde $_2$ es no nulo, calculamos primero el inverso de $_2$. Si escribimos

$$_2 = \ (\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

se tiene que

$$\frac{1}{\ _2} = \frac{1}{(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)} = \frac{(\cos\beta - i\,\mathrm{sen}\,\beta)}{} = \frac{1}{-}\,[\cos(-\beta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\beta)].$$

Por tanto,

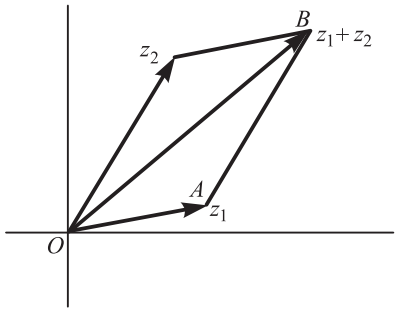
$$\frac{_1}{\ _2} = \ _1 \cdot \frac{1}{\ _2} = \frac{r}{-}\,[\cos(\alpha - \beta) + i\,\mathrm{sen}\,(\alpha - \beta)].$$

De aquí se deduce que el módulo de un cociente de números complejos es el cociente de los módulos de cada uno de ellos y que su argumento se obtiene restando del argumento del numerador el argumento del denominador.

Hemos probado que el módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos de cada uno de ellos. El módulo de la suma es, sin embargo, menor o igual que la suma de los módulos de cada uno de ellos, es decir:

$$|\ _1 + \ _2| \leqslant |\ _1| + |\ _2|,$$

dándose la igualdad únicamente en algunos casos particulares. La desigualdad anterior es una consecuencia inmediata de aplicar la desigualdad triangular al triángulo .



i ra 3.6

Particularmente interesantes son algunos resultados que se obtienen utilizando el conjugado de un número complejo $= a + bi$. Se tiene que

$$+ \bar{} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(\ )$$
$$- \bar{} = (a + bi) - (a - bi) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(\ ),$$

y también

$$\cdot \bar{} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |\ |^2.$$

* * *

Finalizamos esta sección dando una nueva forma de escribir un número complejo. En cualquier libro de análisis matemático puede encontrarse la fórmula siguiente para la función exponencial:

$$e\ = 1 + \ + \frac{\ ^2}{2!} + \frac{\ ^3}{3!} + \cdots + \frac{\ ^n}{n!} + \cdots, \qquad \in \mathbb{R},$$

lo cual es una aplicación del teorema de Taylor para funciones de una variable. De la misma manera puede demostrarse que

$$\cos\ = 1 - \frac{\ ^2}{2!} + \frac{\ ^4}{4!} - \frac{\ ^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\ ^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

y

$$\mathrm{sen}\ = \ - \frac{\ ^3}{3!} + \frac{\ ^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{\ ^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Por tanto:

$$r[\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha] = r\left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots\right)\right] =$$

$$= r\left[1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \frac{(i\alpha)^5}{5!} + \cdots\right].$$

La similitud de esta última expresión entre corchetes, con la fórmula para la función exponencial anteriormente dada, nos lleva a dar la siguiente definición:

$$re^{i\alpha} = r[\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha],$$

que recibe el nombre de *rm la e ler*.

La expresión $re^{i\alpha}$ se denomina *orma olar* de un número complejo; en ella está contenida toda la información necesaria para que el número complejo quede determinado: están dados su módulo y su argumento.

EJERCICIOS 3.2

1. Calcular su módulo, su argumento y expresar los siguientes números complejos en sus formas trigonométrica y polar:

$$1 + i, \qquad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i, \qquad -2 - 2i.$$

2. Calcular $e^{\pi i}$, $e^{2\pi i}$, $e^{\frac{\pi i}{4}}$ y $e^{-\frac{\pi i}{4}}$.

3. Hallar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, sin realizar las operaciones indicadas:

$$(1 + i)(1 - i), \qquad \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}, \qquad i^{431}(3 - 3i).$$

4. Si $_1$ y $_2$ son dos números complejos, demostrar que:
   a) $|\ _1| - |\ _2| \leqslant |\ _1 - \ _2|$
   b) $||\ _1| - |\ _2|| \leqslant |\ _1 - \ _2|$

5. Probar, sin efectuar cálculos, que si $a - bi$ es no nulo, $(a + bi)/(a - bi)$ tiene siempre módulo 1.

6. Demostrar que

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

utilizando la fórmula de Euler.

3.3. RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Tratemos ahora de encontrar la *raí n ima e n n mero om le o*; este problema tiene una solución sencilla si el número complejo está escrito en forma trigonométrica.

Observemos, primero, que si deseamos calcular la potencia n-ésima del número complejo

$$= r[\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha]$$

se tiene que

$$^{n} = r^{n}[\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha].$$

Esta fórmula, que recibe el nombre de *rm la e e oivre* (matemático inglés, 1667-1754), se deduce del hecho de que al multiplicar dos números complejos, el módulo es el producto de cada uno de sus módulos y su argumento es la suma de cada uno de sus argumentos. Este resultado fue demostrado en la sección anterior (véase (2.1)).

Demostraremos a continuación que todo número complejo no nulo posee n raíces n-ésimas que son también números complejos. Dado el número complejo no nulo

$$\omega = \quad [\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta]$$

una raíz n-ésima de ω es cualquier número complejo que satisface $^{n} = \omega$. Para encontrar escribimos

$$= r[\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha]$$

e imponemos la condición de que su potencia n-ésima sea ω; utilizando la fórmula de De Moivre se deduce que

$$r^{n}[\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha] = \quad [\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta].$$

Igualando los módulos y los argumentos de estos dos números complejos se tiene que

$$r^{n} =$$

y

$$n\alpha = \beta + 2 \ \pi, \qquad = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

en donde se ha tenido en cuenta que dos números complejos iguales poseen argumentos que pueden diferir en un múltiplo entero de $360^{\circ} = 2\pi$ radianes.

Puesto que r y son números reales positivos se tiene que

$$r = \sqrt[n]{\ }$$

donde $\sqrt[n]{\ }$ denota la única raíz real positiva del número real positivo . Además,

$$\alpha = \frac{\beta}{n} + \frac{2 \ \pi}{n}, \qquad = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Por tanto, los números complejos

$$\omega \ = \sqrt[n]{\ }\left[\cos\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2 \ \pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2 \ \pi}{n}\right)\right], \qquad = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

son raíces n-ésimas de ω.

En la colección de números complejos $\{\omega\ \}$ hay una cantidad finita de ellos que se repiten infinitas veces. Observar, por ejemplo, que si $= n + r, \quad \geqslant n, 0 \leqslant r \leqslant n - 1$, se tiene que

$$\cos\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2 \ \pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{n} + 2 \ \pi + \frac{2r\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2r\pi}{n}\right)$$

y, análogamente,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{n}+\frac{2\ \pi}{n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{n}+2\ \pi+\frac{2r\pi}{n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{n}+\frac{2r\pi}{n}\right).$$

Por tanto, $\omega\ =\omega_r$. De manera similar puede demostrarse que si es un entero negativo, ω coincide con algún ω_r, con $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Además, todos los ω_r, con $r \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ son distintos, como puede comprobarse fácilmente. Así pues, ω posee n-raíces complejas que escritas en forma polar son

$$\omega\ =\sqrt[n]{\ }\cdot e^{i(\beta+2\ \pi)/n},\qquad =0, 1, 2, ..., n-1.$$

EJEMPLO A. Queremos calcular las raíces cúbicas del número complejo $8i$; puesto que

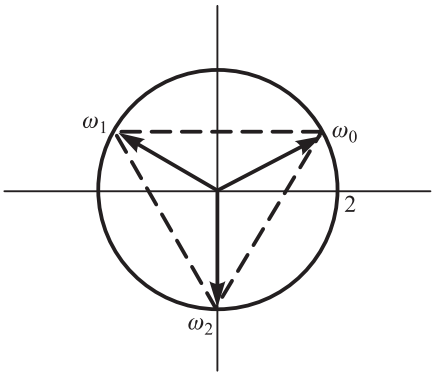
$$8i=8\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

las tres raíces cúbicas de i son:

$$\omega_0=2\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right]=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]$$

$$\omega_1=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]\right.$$

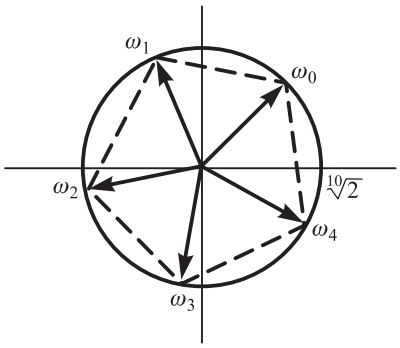
$$\omega_2=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=-2i.$$



i ra 3.7

EJEMPLO B. Calculamos a continuación las raíces quintas del número complejo $=-1-i$; puesto que

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$



i ra 3.8

se tiene que las raíces pedidas son:

$$\omega_0 = \sqrt[10]{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt[10]{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\omega_1 = \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}\right)\right] = \sqrt[10]{2}\,[\cos 117^\circ + i\,\mathrm{sen}\,117^\circ]$$

$$\omega_2 = \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{5}\right)\right] = \sqrt[10]{2}\,[\cos 189^\circ + i\,\mathrm{sen}\,189^\circ]$$

$$\omega_3 = \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{5}\right)\right] = \sqrt[10]{2}\,[\cos 261^\circ + i\,\mathrm{sen}\,261^\circ]$$

$$\omega_4 = \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{5}\right)\right] = \sqrt[10]{2}\,[\cos 333^\circ + i\,\mathrm{sen}\,333^\circ].$$

* * *

De la fórmula para calcular las raíces *n*-ésimas de un número complejo de módulo *r* se deduce que todas ellas tienen el mismo módulo, a saber, $\sqrt[n]{r}$, y sus argumentos difieren en múltiplos de $2\pi/n$ radianes; por tanto, los extremos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$. Este comportamiento puede observarse en los ejemplos anteriores.

Un caso particular interesante es calcular las races *n*-ésimas de 1, las cuales se denominan *raí e n ima e la ni a* . Puesto que 1 es un número complejo que tiene módulo 1, de la observación anterior se deduce que los extremos de las raíces *n*-ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio 1.

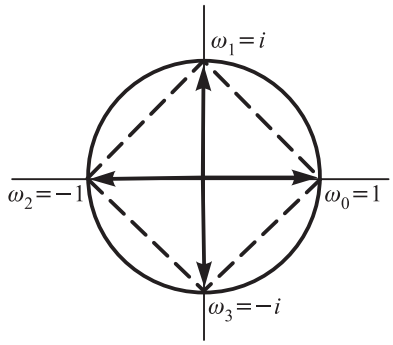
Claramente, una raíz *n*-ésima de la unidad es 1; el resto pueden calcularse con la fórmula anterior. Por ejemplo, las raíces cuartas de la unidad son:

$$\omega_0 = 1[\cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ] = 1$$

$$\omega_1 = 1\left[\cos\frac{2\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}\right] = i$$

$$\omega_2 = 1\left[\cos\frac{4\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{4}\right] = -1$$

$$\omega_3 = 1\left[\cos\frac{6\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{6\pi}{4}\right] = -i.$$



i ra 3.9

* * *

EJERCICIOS 3.3

1. Calcular los diferentes valores de

$$\sqrt{1-i},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[3]{-i},\ \sqrt[4]{16i},\ \sqrt{-9}.$$

2. Calcular las raíces sextas de la unidad.

3. Calcular las raíces cúbicas de la unidad. Sean estas $\omega_0 = 1$, ω_1 y ω_2; demostrar que ω_1 y ω_2 satisfacen la ecuación $^2 + \ + 1 = 0$ y ambas son números complejos conjugados.

3.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Una ecuación algebraica es una ecuación de la forma

$$a_n\ ^n + a_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + a_1\ \ + a_0 = 0 \tag{4.1}$$

donde los a son números complejos; en particular, si los a son números reales, la ecuación anterior se dice que es una ecuación con coeficientes reales.

Se denomina *ol i n* de la ecuación algebraica (4.1) a cualquier número complejo tal que al sustituir por en la parte izquierda de la ecuación y realizar las operaciones indicadas se obtiene 0 como resultado.

Inicialmente podría pensarse que toda ecuación algebraica con coeficientes reales posee soluciones reales. Nada más lejos de la verdad, puesto que ya sabemos que la ecuación $^2 + 1 = 0$ no posee soluciones reales. Sin embargo, posee las soluciones complejas i y $-i$. Esto nos lleva a pensar que toda ecuación algebraica posee soluciones complejas. Este resultado se conoce con el nombre de *eorema n amental el Álgebra*, y se enuncia así:

o a e a i n algebrai a e la orma o ee na ol i n e e n n mero om le o.

La primera demostración de este teorema es debida a C. F. Gauss; la demostración más sencilla requiere conocimientos relativos a funciones de variable compleja y se incluye en cualquier curso dedicado a este tema.

Si $_1$ es una solución de (4.1), existen números complejos b_0, b_1, ..., b_{n-1} tales que

$$a_n\ ^n + a_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + a_1\ + a_0 = (b_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + b_1\ + b_0)(\ -\ _1).$$

Para demostrar este resultado multiplicamos los polinomios de la parte derecha de esta igualdad e igualamos sus coeficientes con los del polinomio de la parte izquierda. Por este procedimiento se obtienen las siguientes igualdades:

$$a_n = b_{n-1};\ a_{n-1} = b_{n-2} -\ _1b_{n-1};\ a_{n-2} = b_{n-3} -\ _1b_{n-2};\ ...;\ a_1 = b_0 -\ _1b_1;\ a_0 = -\ _1b_0.$$

La primera igualdad nos permite hallar $b_{n-1}(= a_n)$; conocido b_{n-1} podemos hallar b_{n-2} por la segunda igualdad, ya que $b_{n-2} = a_{n-1} +\ _1b_{n-1} = a_{n-1} +\ _1a_n$; conocido b_{n-2} podemos hallar b_{n-3} a partir de la tercera igualdad, ya que

$$b_{n-3} = a_{n-2} +\ _1b_{n-2} = a_{n-2} +\ _1(a_{n-1} +\ _1a_n).$$

Este proceso continúa hasta que se ha calculado b_0 de la penúltima igualdad:

$$b_0 = a_1 +\ _1b_1 = a_1 +\ _1(a_2 +\ _1b_2) = \cdots = a_1 + a_2\ _1 + a_3\ _1^2 + \cdots + a_n\ _1^{n-1}.$$

Esta igualdad coincide con $a_0 = -\ _1b_0$, ya que $_1$ es solución de la ecuación (4.1). Este procedimiento para calcular el polinomio $b_{n-1}\ ^{n+1} + \cdots + b_1\ + b_0$ se conoce con el nombre de *regla e ini* y puede esquematizarse como sigue:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
$_1$		$_1a_n$	$_1b_{n-2}$	$\cdots$	$_1b_1$	$_1b_0$
	a_n	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	0

Recordando que $b_{n-1} = a_n$ y utilizando de nuevo el Teorema fundamental del álgebra para la ecuación $b_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + b_1\ + b_0 = 0$ se tiene otra solución compleja $_2$ de (4.1). Repitiendo este proceso n veces podemos escribir

$$a_n\ ^n + a_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + a_1\ + a_0 = a_n \cdot (\ -\ _1)(\ -\ _2)\cdots(\ -\ _n).$$

Algunas de las soluciones pueden repetirse, con lo cual en general podemos escribir

$$a_n\ ^n + a_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + a_1\ + a_0 = a_n \cdot (\ -\ _1)^{\ 1}(\ -\ _2)^{\ 2}\cdots(\ -\ )^{\ },$$

donde $_1$, $_2$, ..., son números complejos distintos.

El número se denomina *m lti li i a e la raí* , $= 1, 2, ...,$. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado:

o a e a i n algebrai a e la orma o ee n ol ione e on n mero om le o on e a a ol i n e t onta a el n mero e e e e in i a m lti li i a

Hallar las n soluciones de una ecuación algebraica es un problema complicado de resolver en general. Sin embargo, en algunos casos particulares, que aparecen con mucha frecuencia, es posible encontrar las soluciones.

Si la ecuación algebraica (4.1) es de grado 2, es decir, de la forma

$$a_2\ ^2 + a_1\ + a_0 = 0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C},$$

la conocida fórmula

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

nos permite obtener sus soluciones.

Si la ecuación algebraica es de grado 3 ó 4, también existen fórmulas para calcular sus soluciones; estas fórmulas resultan bastante complicadas. El lector interesado puede encontrarlas en el libro de A. G. Kurosch, *r o e lgebra erior* (Editorial Mir, 1977). Si el grado de la ecuación algebraica es mayor o igual a 5, no existe, en general, una fórmula de este estilo, es decir, con sumas, restas, multiplicaciones y raíces. Este resultado lo demostró N. H. Abel (1802-1829).

Ecuaciones algebraicas de la forma

$$^n - a = 0,$$

donde a es un número complejo, se han resuelto en la sección anterior, ya que simplemente se trata de calcular las raíces n-ésimas del número complejo a.

Otros casos particulares pueden verse en los ejercicios al final de esta sección.

Para finalizar es conveniente exponer un método para encontrar las soluciones racionales, en particular las enteras, de una ecuación algebraica con coeficientes enteros, si es que esta posee algunas soluciones del mencionado tipo.

Supongamos que la ecuación algebraica con coeficientes enteros

$$a_n\ ^n + a_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + a_1\ + a_0 = 0 \tag{4.2}$$

posee una solución racional de la forma $\ = \ / \ $; siempre podemos suponer que y son primos entre sí, ya que en caso contrario podemos eliminar los factores comunes en ambos. Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$a_n \frac{^n}{^n} + a_{n-1} \frac{^{n-1}}{^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{}{} + a_0 = 0$$

o bien

$$a_n\ ^n + a_{n-1}\ ^{n-1}\ + \cdots + a_1\ \ ^{n-1} + a_0\ ^n = 0. \tag{4.3}$$

La igualdad (4.3) puede escribirse de la forma

$$(a_n\ ^{n-1} + a_{n-1}\ ^{n-2}\ + \cdots + a_1\ ^{n-1})\ = -a_0\ ^n.$$

Por tanto, divide a $a_0\ ^n$; como y son primos entre sí, deducimos que ha de ser un divisor de a_0.

La igualdad (4.3) también puede escribirse de la forma

$$(a_{n-1}\ ^{n-1} + \cdots + a_1\ \ ^{n-2} + a_0\ ^{n-1}) = -a_n\ ^n.$$

De aquí se deduce que divide a a_n ^{n}; como y son primos entre sí, deducimos que ha de ser un divisor de a_n.

Resumiendo, *la ol ione ra ionale e la e a i n algebrai a on oe i iente entero e en entran entre a ello n mero ra ionale yo n mera or e n i i or e a y yo enomina or e n i i or e* a_n

EJEMPLO A. Para encontrar las soluciones de la ecuación

$$3\ ^3 - 14\ ^2 + 23\ - 10 = 0$$

intentamos averiguar si posee soluciones racionales. Los divisores de $a_0 = -10$ son

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 5,\ -5,\ 10\ \text{ y }\ -10.$$

Los divisores de $a_3 = 3$ son

$$1,\ -1,\ 3,\ -3.$$

Las posibles soluciones racionales de la ecuación son

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 5,\ -5,\ 10,\ -10$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{10}{3}\ \text{ y }\ -\frac{10}{3}.$$

Uno de estos números es solución si al sustituirlo en la parte izquierda de la ecuación y realizar las operaciones indicadas se obtiene cero como resultado. Por ejemplo, 2 no es solución, ya que

$$3\cdot 2^3 - 14\cdot 2^2 + 23\cdot 2 - 10 = 24 - 56 + 46 - 10 = 4 \neq 0.$$

Sin embargo, 2/3 es solución, ya que

$$3\cdot\frac{2^3}{3^3} - 14\,\frac{2^2}{3^2} + 23\cdot\frac{2}{3} - 10 = \frac{8}{9} - \frac{56}{9} + \frac{46}{3} - 10 = 0.$$

Haciendo uso de la regla de Ruffini o simplemente dividiendo el polinomio $3\ ^3 - 14\ ^2 + 23\ - 10$ entre $-2/3$ se tiene

$$3\ ^3 - 14\ ^2 + 23\ - 10 = 3(\ ^2 - 4\ + 5)\left(\ - \frac{2}{3}\right).$$

Por tanto, las otras dos soluciones de la ecuación son también solución de la ecuación $^2 - 4\ + 5 = 0$; estas pueden obtenerse mediante la fórmula cuadrática:

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i.$$

Así pues, $_1 = \dfrac{2}{3}$, $_2 = 2 + i$ y $_3 = 2 - i$ son las tres soluciones de la ecuación dada.

EJEMPLO B. Queremos encontrar las soluciones de la ecuación

$$^4 - ^3 - ^2 - - 2 = 0.$$

Si posee soluciones racionales, deben ser números enteros puesto que el denominador ha de ser ± 1 (observar que el coeficiente de ^{4} es 1). Estas posibles soluciones son los divisores de -2, es decir:

$$1, -1, 2 \quad \text{y} \quad -2.$$

Después de algunos intentos se concluye que $= -1$ y $= 2$ son soluciones de la ecuación dada; en efecto:

$$(-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$$

y

$$2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0.$$

Una vez dividido el polinomio $^4 - ^3 - ^2 - - 2$ entre $(+ 1)$ y $(- 2)$ se tiene como divisor al polinomio $^2 + 1$. Las soluciones de $^2 + 1 = 0$ son i y $-i$. Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son

$$_1 = -1, \ _2 = 2, \ _3 = i \quad \text{y} \quad _4 = -i.$$

EJERCICIOS 3.4

1. Resolver las siguientes ecuaciones algebraicas:
   a) $^4 - 10\ ^3 + 35\ ^2 - 50\ + 24 = 0.$
   b) $^4 + \ ^3 - \ - 1 = 0.$
   c) $^3 - \ ^2 - 3\ + 6 = 0.$
   d) $4\ ^3 - 4\ ^2 - 5\ + 3 = 0.$
   e) $^4 + 7\ ^2 - 144 = 0.$ [*geren ia*: hacer $^2 = t$.]

2. Demostrar la igualdad $(^4 + \ ^3 + \ ^2 + \ + 1)(\ - 1) = \ ^5 - 1$. Utilizar este resultado para encontrar las soluciones de la ecuación $^4 + \ ^3 + \ ^2 + \ + 1 = 0$.

3. Demostrar que si es una solución compleja de una ecuación algebraica con coeficientes reales, $\bar{}$ es también solución de la misma ecuación.

4. Encontrar las raíces de la ecuación $^2 + 2\ + 1 - 2i = 0$ completando cuadrados. ¿Contradice el resultado de este problema lo demostrado en el problema anterior?

3.5. EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL CON NÚMEROS COMPLEJOS

Todos los conceptos introducidos en los Capítulos 1 y 2, así como los resultados allí obtenidos, pueden ser generalizados a los números complejos. Por recordar algunos citaremos el método de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el concepto de

dependencia e independencia lineal de vectores, el determinante de una matriz y la regla de Cramer.

En esta sección proponemos ejercicios relativos a estos conceptos y resultados, en los cuales se utilizan números complejos. Estos ejercicios sirven, además, de repaso de los Capítulos 1 y 2.

En los ejercicios que siguen $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos. Por tanto, $\mathbb{C}^n$ es el conjunto de todos los elementos de la forma $(z_1, z_2, ..., z_n)$, donde cada $z_i \in \mathbb{C}$.

1. Utilizar el método de eliminación de Gauss para resolver, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes complejos:

a) $\left.\begin{aligned} z_1 - z_2 + i z_3 &= 1 \\ i z_2 - z_3 &= i \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} z_1 - i z_2 &= 2 \\ z_2 + i z_3 &= 1 + 2i \\ z_1 + z_2 &= 1 + i \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 1 \\ (i+1) z_2 &= 0 \\ z_1 + (1-i) z_2 &= i \end{aligned}\right\}$.

2. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes y en caso de que sean linealmente dependientes encontrar una combinación lineal entre ellos:

a) $\{(1, i), (-i, 1)\}$ b) $\{(2, i, 1+i), (i, -1, -2i)\}$

c) $\{(1, 1+i, 0, 1-i), (0, 1, i, 1+i), (1, 1, 1, 2-2i)\}$.

3. Escribir las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ tal que $f(z_1, z_2, z_3) = (i z_1 + z_2, z_2 + i z_3)$.

b) $g: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $g(z_1, z_2, z_3) = (i z_3, i z_2, i z_1)$.

c) $h: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $h(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - i z_2, z_1 + i z_2)$.

4. Si f, g y h son las aplicaciones del ejercicio 3, calcular:

a) $f \circ h$ b) $g \circ h$ c) g^{-1} d) $g^{-1} \circ f$.

5. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} e^{2i} & e^{3i} \\ 1 & e^{i} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1+i & i & 2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} i & i & i & \cdots & i \\ i & i-\alpha & i & \cdots & i \\ i & i & i-\alpha & \cdots & i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ i & i & i & \cdots & i-\alpha \end{vmatrix}_{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

6. Hallar las inversas de las siguientes matrices, calculando primero la matriz de los cofactores:

a) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1+i & 3 & i \\ 1 & 2 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Utilizar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes complejos:

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + i\,x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= -1 \\ x_2 - i\,x_3 &= i \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2i \end{aligned}\right\}$.

8. Encontrar el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ 2 & -2i & 0 \\ 0 & 1+i & 1+i \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ 1 & 0 \\ -3 & 2-i \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} i & -1 & -2i \\ -i & 1 & 2i \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix}$.

9. Encontrar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

para los distintos valores del número complejo $\quad$.

10. Estudiar la compatibilidad o incompatibilidad de los siguientes sistemas y resolverlos en el caso de que sean compatibles:

a) $\left.\begin{aligned} x_1 - i\,x_2 - x_3 &= i \\ x_2 - i\,x_3 &= 2 \\ i\,x_1 + 2\,x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2\,x_2 - 3\,x_3 &= 5i \\ x_1 + i\,x_2 &= -1 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} x_1 - i\,x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 - i\,x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$.

Capítulo 4

Espacios vectoriales.

4.1. Definición de espacio vectorial. Ejemplos.

4.2. Base y dimensión de un espacio vectorial.

4.3. Cambio de base.

4.4. Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios vectoriales.

4.5. El espacio vectorial cociente.

4.1. DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL. EJEMPLOS

El conjunto de los números reales y el conjunto de los números complejos, con los cuales se ha trabajado en los capítulos anteriores, tienen propiedades similares. En ambos pueden definirse dos operaciones $+$ y $\cdot$ que satisfacen ciertas propiedades; estas propiedades han sido enumeradas para los números complejos en la primera sección del Capítulo 3. Un conjunto en el que se han definido dos operaciones $+$ y $\cdot$ que satisfacen las propiedades (S1) a (S4), (P1) a (P4) y (D1), enunciadas en la sección 3.1 para los números complejos, recibe el nombre de *er o*. Observemos que todos los resultados obtenidos en los Capítulos 1 y 2 son ciertos en cualquier cuerpo, con tal que el cuerpo posea infinitos elementos.

Todos los resultados de los tres capítulos siguientes son ciertos en cuerpos similares a $\mathbb{R}$, que denota el cuerpo de los números reales, y a $\mathbb{C}$, que denota el cuerpo de los números complejos. Sin embargo, nosotros trabajaremos fundamentalmente con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, los cuales se denotarán por $\mathbb{K}$.

Al estudiar el conjunto de todos los *ve tore en el e a io* hemos definido la suma de vectores y la multiplicación por un número real y enunciado algunas propiedades que satisfacían (véase sección 1.2).

Otros conjuntos a los cuales se les puede dotar de una estructura similar a la del conjunto de todos los vectores en el espacio son los conjuntos formados por *matri e* . Si denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \equiv \mathcal{M}_{m\times n}$ al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$, se ha demostrado en la sección 1.3, que satisface las mismas propiedades que los vectores, al menos cuando $\mathbb{K}$ es el cuerpo de los números reales. Iguales resultados se obtienen si $\mathbb{K}$ coincide con $\mathbb{C}$.

En la misma sección en que se estudiaron las propiedades de las matrices se definieron operaciones con *a li a ione lineale e* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ y se estudiaron sus propiedades. Estas son análogas a las propiedades de las matrices. Por tanto, el conjunto $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ tiene la misma estructura que los vectores en el espacio y las matrices.

Cuando en varios conjuntos distintos aparecen estructuras similares es conveniente axiomatizar estas y dar un nombre al ente resultante. La principal ventaja que se obtiene es que estudiando esta estructura, quedan estudiadas todas las estructuras particulares que en ella se encuadran. Cuando en un conjunto se da una estructura similar a la de los ejemplos anteriores, se dice que se tiene un *e a io ve torial*.

Definición 4.1.1 (spacio ectorial)

Un conjunto , cuyos elementos se denotan mediante $\vec{}$, $\vec{v}$, $\vec{}$, ..., se dice que es un **espacio ectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, si en él se han definido dos operaciones: la **suma**, $+$, de manera que a cada par de elementos $\vec{}$ y $\vec{v}$ de se le hace corresponder el elemento $\vec{} + \vec{v}$ de , denominado suma de $\vec{}$ y $\vec{v}$, y la **multiplicaci n por escalares**, de manera que a todo elemento $\vec{}$ de y a todo elemento a de $\mathbb{K}$ se le hace corresponder el elemento $a\vec{}$ de , que satisfacen las siguientes propiedades:

(S1) (Conmutativa) $\vec{} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{}$ para todo $\vec{}$, $\vec{v}$ de .

(S2) (Asociativa) $\vec{} + (\vec{v} + \vec{}) = (\vec{} + \vec{v}) + \vec{}$, para todo $\vec{}$, $\vec{v}$ y $\vec{}$ de .

(S3) Existe un elemento de , designado por $\vec{0}$ y denominado *ne tro*, tal que $\vec{} + \vec{0} = \vec{}$ para todo $\vec{}$ de .

(S4) Para todo $\vec{}$ de existe un elemento, designado por $-\vec{}$ y denominado *o e to* de $\vec{}$, tal que $\vec{} + (-\vec{}) = \vec{0}$.

(M1) $1\vec{\ } = \vec{\ }$ para todo $\vec{\ }$ de , donde 1 denota el elemento *ni a* de $\mathbb{K}$.
(M2) $a(b\vec{\ }) = (ab)\vec{\ }$ para todo $\vec{\ }$ de y todo a, b de $\mathbb{K}$.
(M3) $(a + b)\vec{\ } = a\vec{\ } + b\vec{\ }$ para todo $\vec{\ }$ de y todo a, b de $\mathbb{K}$.
(M4) $a(\vec{\ } + \vec{v}) = a\vec{\ } + a\vec{v}$ para todo $\vec{\ }, \vec{v}$ de y todo a de $\mathbb{K}$.

Notas

1) Los elementos de un espacio vectorial reciben el nombre genérico de *ve tore* y en general se utiliza la notación indicada en la definición para denotarlos. Esto no es obstáculo para que en algunos casos particulares, por ejemplo, matrices o aplicaciones, se utilice la notación propia de cada caso. Los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman *e alare* .
2) Las propiedades de (S1) a (S4) se refieren a la suma, las propiedades (M1) y (M2) se refieren exclusivamente a la multiplicación por escalares y las propiedades (M3) y (M4) son las *i trib tiva* de una operación con respecto a la otra.
3) Si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ se dice que es un *e a io ve torial real* y si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ se dice que es un *e a io ve torial om le o.*
4) De (S3), (S4) y la propiedad conmutativa se deduce que $\vec{0} + \vec{\ } = \vec{0}$ y $(-\vec{\ }) + \vec{\ } = \vec{0}$.

EJEMPLO A

1) El conjunto $_2$ de los vectores en el plano o el conjunto $_3$ de los vectores en el espacio con las operaciones dadas en la sección 1.2 son espacios vectoriales reales.
2) El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \equiv \mathcal{M}_{m\times n}$ de todas las matrices de m filas y n columnas con elementos en $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

EJEMPLO B. El conjunto

$$\mathbb{K}^n = \{(\ _1,\ \ _2, ...,\ \ _n) :\quad \in \mathbb{K},\qquad = 1, 2, ..., n\}$$

con las operaciones

$$(\ _1,\ \ _2, ...,\ \ _n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (\ _1 + y_1,\ \ _2 + y_2, ...,\ \ _n + y_n)$$
$$a(\ _1,\ \ _2, ...,\ \ _n) = (a\ \ _1, a\ \ _2, ..., a\ \ _n)$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, como fácilmente puede comprobarse.

En particular, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real y $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial complejo.

EJEMPLO C. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el conjunto de todas las sucesiones de la forma $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ...)$, con $a \in \mathbb{R}$, con las operaciones

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad a(a_n)_{n=1}^{\infty} = (aa_n)_{n=1}^{\infty}\ , \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Se deja para el lector la comprobación de que este conjunto es un espacio vectorial real con las operaciones que acabamos de definir.

EJEMPLO D. Sea $_{\mathbb{K}}[\ ]$ el conjunto de todos los polinomios en la variable sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, es decir, todos los elementos de la forma

$$(\ ) = a_0 + a_1\ + \cdots + a_{n-1}\ ^{n-1} + a_n\ ^n = \sum_{=0}^{n} a\ \ ,\qquad a \in \mathbb{K}.$$

En él definimos las siguientes operaciones: dados

$$(\ ) = \sum_{=0}^{n} a \qquad \text{y} \qquad (\ ) = \sum_{=0}^{m} b$$

con $m \geqslant n$ su suma es

$$(\ ) + (\ ) = \sum_{=0}^{n} (a + b) + \sum_{=n+1}^{m} b \quad .$$

Dado $a \in \mathbb{K}$, definimos

$$a\ (\ ) = \sum_{=0}^{n} (aa) \quad .$$

Con estas operaciones $_{\mathbb{K}}[\ ]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Si denotamos por $^{(n)}_{\mathbb{K}}[\ ]$ al conjunto de todos los polinomios en la variable , de grado menor o igual que n, tenemos de nuevo un espacio vectorial, con las mismas operaciones que en $_{\mathbb{K}}[\ ]$.

Ejemplo E. Sea $([a, b])$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo real $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$. Con las operaciones

$$(\ + g)(\ ) = (\ ) + g(\ ) \qquad \text{y} \qquad (\lambda\ )(\ ) = \lambda(\ (\ )) \quad , \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R},$$

puede comprobarse que $([a, b])$ es un espacio vectorial real. El elemento neutro de este espacio vectorial es la aplicación nula.

Ejemplo F. Sea $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$; en la sección 1.3 se han definido operaciones en este conjunto y se ha visto que satisfacen las propiedades requeridas para ser un espacio vectorial real.

Ejemplo G. Ha llegado el momento de mostrar algunas estructuras que no satisfacen todos los axiomas de un espacio vectorial. Si denotamos por al conjunto de todas las matrices cuadradas con determinante nulo y en él definimos las mismas operaciones que en $\mathcal{M}_{m\times n}$, no es un espacio vectorial; para ello basta observar que

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices con determinante nulo, mientras que + tiene determinante 1.

Tampoco el conjunto de todos los polinomios de grado *exactamente n* es un espacio vectorial con las operaciones definidas en $_{\mathbb{K}}[\ ]$.

Ejemplo H. Un ejemplo muy importante de espacio vectorial es el conjunto ( ) de soluciones del sistema homogéneo

$$\vec{} = \vec{0} \quad , \quad \text{con} \quad \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \tag{1.1}$$

donde $\vec{} = (\ _1,\ _2, ...,\ _n) \in \mathbb{R}^n$. Ya sabemos que $\vec{0}$ es siempre solución de (1.1) y de los resultados de la sección 1.2 se deduce que si $\vec{}$ e $\vec{y}$ son soluciones de (1.1) y $a \in \mathbb{R}$, $\vec{} + \vec{y}$ y $a\vec{}$ son soluciones de (1.1).

* * *

Para terminar esta sección daremos algunos resultados que se deducen inmediatamente de las propiedades que definen un espacio vectorial.

Proposición 4.1.2

El elemento neutro de un espacio vectorial es único.

Demostración. Supongamos que $\vec{0}_1$ y $\vec{0}_2$ son dos elementos neutros de un espacio vectorial ; por ser $\vec{0}_1$ un elemento neutro se tiene que $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$; por ser $\vec{0}_2$, un elemento neutro se tiene que $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_1$; puesto que $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2$ debido a la propiedad conmutativa, deducimos que $\vec{0}_2 = \vec{0}_1$, mostrándose así la unicidad del elemento neutro. ■

Proposición 4.1.3

El opuesto de cada elemento en un espacio vectorial es único.

Demostración. Supongamos que el elemento $\vec{}$ posee dos opuestos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$; de la definición de opuesto se deduce que $\vec{} + \vec{v}_1 = \vec{0}$. Sumando $\vec{v}_2$ a ambos lados de esta ecuación y utilizando las propiedades (S1), (S2) y (S3) de espacio vectorial se tiene que

$$\vec{v}_2 + (\vec{} + \vec{v}_1) = (\vec{v}_2 + \vec{}) + \vec{v}_1 = \vec{0} + \vec{v}_1 = \vec{v}_1,$$

$$\vec{v}_2 + (\vec{} + \vec{v}_1) = \vec{v}_2 + \vec{0} = \vec{v}_2.$$

De aquí deducimos que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. ■

Proposición 4.1.4

Para todo $\vec{}$ de un espacio vectorial , $0 \cdot \vec{} = \vec{0}$.

Demostración. Tenemos la siguiente cadena de igualdades debida a varios de los axiomas de la definición de espacio vectorial:

$$\vec{} = 1 \cdot \vec{} = (0 + 1)\vec{} = 0 \cdot \vec{} + 1 \cdot \vec{} = 0 \cdot \vec{} + \vec{}.$$

Esto implica que $\vec{0} \cdot \vec{}$ es el neutro del espacio vectorial , y por tanto, $0 \cdot \vec{} = \vec{0}$. ■

Proposición 4.1.5

Para todo elemento $\vec{}$ de un espacio vectorial , $(-1)\vec{}$ es su opuesto.

Demostración. Tenemos que

$$\vec{} + (-1)\vec{} = 1 \cdot \vec{} + (-1)\vec{} = (1 + (-1))\vec{} = 0 \cdot \vec{} = \vec{0},$$

en donde se ha utilizado (M1), (M3) y la Proposición 4.1.4. Puesto que el opuesto es único, debido a la Proposición 4.1.3, queda probado el resultado. ■

Proposición 4.1.6

En todo espacio vectorial , $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$, donde $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{0}$ es el elemento neutro de .

Demostración. $a \cdot \vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a \cdot \vec{0} + \vec{a} \cdot \vec{0}$; sumando el opuesto de $a \cdot \vec{0}$ en ambos lados se tiene $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$, que era lo que queríamos demostrar. ■

4.2. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; un número finito de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ se dice que son *linealmente e en iente* si existen n elementos de $\mathbb{K}$, $a_1, a_2, ..., a_n$, no todos nulos, tales que

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}. \tag{2.1}$$

Si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente in e en iente* ; por tanto, los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ son linealmente independientes si cualquier igualdad como la que aparece en (2.1) implica que los elementos de $\mathbb{K}$, $a_1, a_2, ..., a_n$, son nulos.

Si en la igualdad (2.1) el escalar a_n es no nulo, podemos escribir

$$\vec{v}_n = -\frac{a_1}{a_n}\vec{v}_1 - \frac{a_2}{a_n}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\vec{v}_{n-1};$$

decimos entonces que $\vec{v}_n$, es una *ombina i n lineal* de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}$. En general, diremos que $\vec{v}$ es *ombina i n lineal* de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}$ si existen números $a_1, a_2, ..., a$ de $\mathbb{K}$ tales que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a\ \vec{v}\ .$$

Un conjunto finito de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}\ \}$ de un espacio vectorial se dice que es un *i tema e genera ore e* si todo elemento de puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}$.

Antes de exponer algunos ejemplos es conveniente realizar algunas observaciones.

En primer lugar, observamos que *to o on nto inito e ve tore e ontiene al elemento ne tro e linealmente e en iente*; basta observar que

$$a \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

para cualquier $a \in \mathbb{K}$.

En segundo lugar, observaremos que *to o on nto inito e ve tore linealmente in e en iente no e e ontener n b on nto e ve tore e ean linealmente e en iente* . En

efecto, si $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ son linealmente independientes y suponemos, por comodidad de notación, que $\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ , \quad \leqslant n$, son linealmente dependientes tendríamos

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a\ \vec{v}\ = \vec{0}$$

con no todos los a igual a cero; basta observar que, entonces,

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a\ \vec{v}\ + 0\vec{v}\ _{+1} + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0},$$

con lo cual los vectores originales serían linealmente dependientes.

EJEMPLO A. Tres vectores no nulos en el conjunto $\ _2$ de los vectores en el plano son siempre linealmente dependientes. Para demostrarlo tomar

$$\vec{}\ = (\ _1,\ \ _2), \quad \vec{v} = (v_1, v_2), \quad \vec{}\ = (\ _1,\ \ _2)$$

tres vectores cualesquiera de $\ _2$. La igualdad

$$a_1\vec{}\ + a_2\vec{v} + a_3\vec{}\ = \vec{0}$$

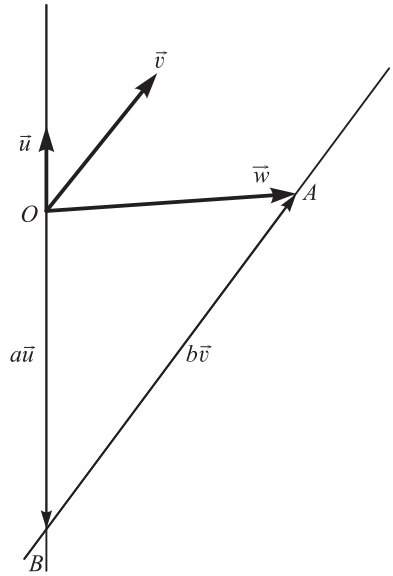
se traduce en

$$\left.\begin{aligned} a_1\ _1 + a_2v_1 + a_3\ _1 &= 0 \\ a_1\ _2 + a_2v_2 + a_3\ _2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es inferior a 3, este sistema homogéneo posee infinitas soluciones. Basta elegir una no nula para tener el resultado deseado.

Este resultado puede demostrarse también geométricamente como puede apreciarse en la figura 4.1. La recta que contiene a $\vec{}$ y la recta que es paralela a $\vec{v}$, y pasa por el extremo de $\vec{}$ se



i ra 4.1

cortan en un punto . Observar que si estas rectas no se cortan, ⃗ y $\vec{v}$ son proporcionales y ya habríamos probado el resultado. En la figura se observa que ⟶ + ⟶ = ⃗; por tanto:

$$a\vec{\ } + b\vec{v} = \vec{\ },$$

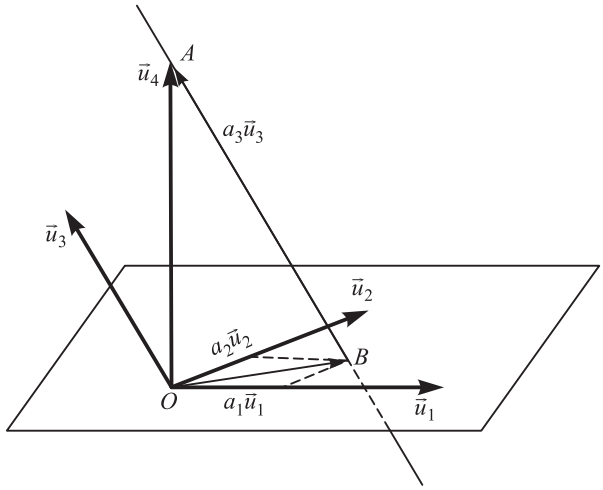
lo cual prueba el resultado deseado.

Este mismo razonamiento muestra que dos vectores linealmente independientes cualesquiera de $_2$ son siempre un sistema de generadores de este espacio vectorial.

EJEMPLO B. En general, $n + 1$ vectores de $\mathbb{K}^n$ son linealmente dependientes; basta observar que esta afirmación se reduce a demostrar la existencia de soluciones no nulas de un sistema homogéneo de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas (ver ejemplo A); este último resultado es cierto por el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4).

En $\mathbb{R}^3$ puede darse una demostración geométrica de este resultado. Supongamos que ⃗$_1$, ⃗$_2$ y ⃗$_3$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Por el extremo de ⃗$_4$ se traza una paralela a ⃗$_3$ hasta que corte al plano que determinan ⃗$_1$ y ⃗$_2$. Tenemos que

$$\vec{\ }_4 = \longrightarrow + \longrightarrow.$$



i ra 4.2

Puesto que ⟶ es un vector del plano determinado por ⃗$_1$ y ⃗$_2$ se tiene que ⟶ = a_1⃗$_1$ + a_2⃗$_2$. Utilizando este resultado junto con el hecho de que ⟶ = a_3⃗$_3$ se tiene que

$$\vec{\ }_4 = a_1\vec{\ }_1 + a_2\vec{\ }_2 + a_3\vec{\ }_3.$$

Si los vectores ⃗$_1$, ⃗$_2$ y ⃗$_3$ fueran linealmente dependientes, se tendría una igualdad de la forma a_1⃗$_1$ + a_2⃗$_2$ + a_3⃗$_3$ = $\vec{0}$ y, por tanto, los cuatro vectores serían linealmente dependientes, ya que tendríamos la igualdad

$$a_1\vec{\ }_1 + a_2\vec{\ }_2 + a_3\vec{\ }_3 + 0 \cdot \vec{\ }_4 = \vec{0}.$$

Este razonamiento muestra, además, que tres vectores cualesquiera linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ son siempre un sistema de generadores de este espacio vectorial.

EJEMPLO C

1) Las funciones $_0(\ ) = 1$, $_1(\ ) = \ $, $_2(\ ) = \ ^2$, ..., $_n(\ ) = \ ^n$ son linealmente independientes, ya que si tenemos la igualdad

$$a_0 1 + a_1 \ + a_2 \ ^2 + \cdots + a_n \ ^n = 0$$

para todo $\in \mathbb{R}$, se ha de tener $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ (véase el ejercicio 15 de la sección 2.4).

2) Las funciones $\ (\ ) = \cos^2 \ $, $g(\ ) = \text{sen}^2 \ $ y $\ (\ ) = 1$ son linealmente dependientes en $([0, 2\pi])$, ya que

$$\cos^2 \ + \text{sen}^2 \ = 1$$

* * *

Definición 4.2.1

Un conjunto finito de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ se dice que es una **base** de un espacio vectorial si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1) Los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ son linealmente independientes.
2) Todo elemento de es una combinación lineal de los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Observar que la condición 2) de esta definición es equivalente al hecho de que el conjunto de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ sea un sistema de generadores de . Sin embargo, no todo sistema de generadores de un espacio vectorial es una base; convénzase el lector por su propia cuenta de que tres vectores en $_2$, dos de los cuales son linealmente independientes, son un sistema de generadores de $_2$; sin embargo, no pueden formar una base de $_2$, ya que son linealmente dependientes, como se ha mostrado en el ejemplo A.

EJEMPLO D. Si $\vec{e} \ = (0, ..., 1, ..., 0) \in \mathbb{K}^n$, donde el 1 ocupa el lugar , se tiene que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ son linealmente independientes, ya que si

$$\sum_{=1}^{n} a \ \vec{e} \ = (0, 0, ..., 0)$$

se tiene que $(a_1, a_2, ..., a_n) = (0, 0, ..., 0)$. Por tanto, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Además, si $\vec{} = (\ _1, \ _2, ..., \ _n) \in \mathbb{K}^n$ se tiene que

$$\vec{} = \sum_{=1}^{n} \ \vec{e} \ .$$

Por tanto, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$, que recibe el nombre de *ba e an ni a* de este espacio.

EJEMPLO E

1) El conjunto $\{1, \ , \ ^2, ..., \ ^n\}$ es una base de $^{(n)}_{\mathbb{K}}[\ ]$, ya que son linealmente independientes de acuerdo con el resultado del ejemplo C, y todo polinomio de grado inferior o igual a n puede escribirse de la forma

$$(\ ) = a_0 1 + a_1 \ + a_2 \ ^2 + \cdots a_n \ ^n.$$

2) El conjunto $\{1, \ , \ ^2, ..., \ ^n\}$ no es una base de $\ _{\mathbb{K}}[\ ]$, ya que el polinomio $\ (\ ) = \ ^{n+1}$ no es combinación lineal de estos.

EJEMPLO F. Las matrices

$$\ _1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ _2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ _3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ _4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Son linealmente independientes, ya que

$$a_1 \ _1 + a_2 \ _2 + a_3 \ _3 + a_4 \ _4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implica $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Además, si

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}$$

podemos escribir

$$= a \ _1 + b \ _2 + \ _3 + \ _4.$$

* * *

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de un espacio vectorial y $\vec{v}$ es cualquier elemento de podemos escribir $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ de la forma

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \cdots + v_n\vec{e}_n$$

con $v \in \mathbb{K}$. Los números $v_1, v_2, ..., v_n$ se denominan *om onente* (*o oor ena a*) *e* $\vec{v}$ con respecto a la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$. Las componentes de un vector $\vec{v}$ con respecto a una base son únicas, ya que si tenemos

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \cdots + v_n\vec{e}_n$$

y

$$\vec{v} = v'_1\vec{e}_1 + v'_2\vec{e}_2 + \cdots + v'_n\vec{e}_n,$$

se tiene también que

$$\vec{0} = (v_1 - v'_1)\vec{e}_1 + (v_2 - v'_2)\vec{e}_2 + \cdots + (v_n - v'_n)\vec{e}_n.$$

Puesto que $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ son linealmente independientes hemos de tener $v_1 = v'_1$, $v_2 = v'_2$, ..., $v_n = v'_n$, que era lo que queríamos demostrar.

* * *

Un mismo espacio vectorial puede poseer varias bases; nuestro próximo objetivo es demostrar que todas ellas han de poseer el mismo número de elementos.

Proposición 4.2.2

Si es un espacio vectorial que posee una base con n elementos, cualesquiera $n + 1$ vectores de son linealmente dependientes.

Demostración. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de y sean $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n, \vec{}_{n+1}$ cualesquiera $n + 1$ vectores de ; podemos escribir

$$\vec{}_1 = \sum_{=1}^{n} {}_1\vec{e}\,, \quad \vec{}_2 = \sum_{=1}^{n} {}_2\vec{e}\,, ..., \vec{}_n = \sum_{=1}^{n} {}_n\vec{e}\,, \quad \vec{}_{n+1} = \sum_{=1}^{n} {}_{,n+1}\vec{e}$$

ya que todo elemento de es una combinación lineal de los vectores de la base.

Tratamos de demostrar que podemos encontrar $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$, no todos nulos, tal que

$$a_1\vec{}_1 + a_2\vec{}_2 + \cdots + a_n\vec{}_n + a_{n+1}\vec{}_{n+1} = \vec{0} \tag{2.2}$$

Esto es equivalente a escribir

$$a_1\left(\sum_{=1}^{n} {}_1\vec{e}\right) + a_2\left(\sum_{=1}^{n} {}_2\vec{e}\right) + \cdots + a_n\left(\sum_{=1}^{n} {}_n\vec{e}\right) + a_{n+1}\left(\sum_{=1}^{n} {}_{,n+1}\vec{e}\right) = \vec{0}.$$

Igualando las componentes se tiene

$$a_1 \;{}_1 + a_2 \;{}_2 + \cdots + a_n \;{}_n + a_{n+1} \;{}_{,n+1} = 0, \qquad = 1, 2, ..., n,$$

que es un sistema de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas; puesto que el sistema es homogéneo, siempre ha de poseer una solución no trivial; esto demuestra el resultado. ■

De esta proposición se deduce un resultado un poco más general: *en n e a io ve torial e o ee na ba e on n elemento , ale iera m ve tore e , on m > n, on linealmente e en iente* . Basta observar que $n + 1$ de los m vectores dados han de ser linealmente dependientes, debido a la Proposición 4.2.2, y por tanto, todos ellos han de formar un conjunto de vectores linealmente dependiente.

Este resultado se aplica en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 4.2.3

Todas las bases de un mismo espacio vectorial poseen el mismo número de elementos.

Demostración. Sean $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ y $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_m\}$ dos bases de ; por el razonamiento anterior $m \leqslant n$, ya que en caso contrario los vectores de la segunda base serían linealmente dependientes. Similarmente, $n \leqslant m$, ya que en caso contrario los vectores de la primera base serían linealmente dependientes. Se tiene, por tanto, que $m = n$. ■

Definición 4.2.4

El número de elementos que posee una base cualquiera de un espacio vectorial recibe el nombre de **dimensi n de** ; este número será designado mediante dim( ).

Si el espacio vectorial solo contiene un elemento, que necesariamente ha de ser su elemento neutro, es decir, $= \{\vec{0}\}$, diremos que tiene *imen i n ero*.

De los ejemplos que hemos realizado anteriormente podemos deducir los siguientes resultados:

1) la dimensión de $\mathbb{K}^n$ es n,
2) la dimensión de $\overset{(n)}{\mathbb{K}}[\ ]$ es $n+1$,
3) la dimensión de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ es 4.

En general, tenemos que la dimensión de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es $m \times n$.

Proposición 4.2.5

Sea un espacio vectorial de dimensión n. Todo conjunto de n vectores de que sean linealmente independientes son una base de .

Demostración. Sean $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n$, n vectores linealmente independientes; si $\vec{v}$ es cualquier otro vector de , los vectores $\vec{v}, \vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n$ son linealmente dependientes por la Proposición 4.2.2; por tanto, existen $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$a_0\vec{v} + a_1\vec{}_1 + a_2\vec{}_2 + \cdots + a_n\vec{}_n = \vec{0}$$

con algún $a \neq 0$. El número a_0 debe ser no nulo, ya que en caso contrario los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n$ serían linealmente dependientes. Por tanto:

$$\vec{v} = -\frac{a_1}{a_0}\vec{}_1 - \frac{a_2}{a_0}\vec{}_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_0}\vec{}_n$$

y queda probado que $\{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n\}$ es un sistema de generadores de . ■

EJEMPLO G. Los vectores $\vec{}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{}_3 = (1, -1, 0, 0)$ y $\vec{}_4 = (0, 0, 1, -1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$, ya que

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Por la Proposición 4.2.5 son una base de $\mathbb{R}^4$, ya que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

* * *

Una forma de encontrar una base de un espacio vectorial es «añadir» vectores a un conjunto de vectores linealmente independientes de ; la forma de «añadirlos» se explica en la demostración de la siguiente proposición:

Proposición 4.2.6

Sea un espacio vectorial de dimensión finita n; todo conjunto de vectores linealmente independientes de puede completarse para obtener una base, es decir, dados vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}$, $< n$, de , linealmente independientes, existen $n -$ vectores $\vec{e}_{+1}, ..., \vec{e}_n$ de tal que el conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}$, $\vec{e}_{+1}, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de .

Demostración. Puesto que es inferior a n podemos encontrar un elemento de linealmente independiente con $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}$; en caso contrario, los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}$, formarían una

base de , lo que contradice el Teorema 4.2.3. Sea $\vec{e}_{\ +1}$ este vector. El razonamiento se repite con el conjunto $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}\ , \vec{e}_{\ +1}\}$ hasta encontrar *n* vectores linealmente independientes, que han de ser necesariamente una base, por la Proposición 4.2.5. ■

* * *

Supongamos que es un espacio vectorial de dimensión finita *n*; acabamos de probar que vectores linealmente independientes de pueden «completarse» para obtener una base. Demostraremos a continuación que si es un sistema de generadores de , de él puede extraerse una base de . Antes de demostrar este resultado necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.2.7

Supongamos que $\dim(\ ) = n$; sea un sistema de generadores de y supongamos que $= {}_1 \cup {}_2$, donde ${}_1$ y ${}_2$ son disjuntos. Si los elementos de ${}_2$ son combinación lineal de los elementos de ${}_1$, entonces ${}_1$ es también un sistema de generadores de .

Demostración. Supongamos, para evitar complicaciones de notación, que ${}_1 = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l\}$ y ${}_2 = \{\vec{e}_{l+1}, ..., \vec{e}_m\}$. Puesto que los elementos de ${}_2$ son combinación lineal de los elementos de ${}_1$ tenemos que

$$\vec{e}\ = \sum_{i=1}^{l} a_i\ \vec{e}_i, \qquad = l+1, ..., m.$$

Si $\vec{\ } \in$, puesto que es un sistema de generadores de , se tiene que

$$\vec{\ } = \sum_{i=1}^{m} {}_i\vec{e}_i.$$

Por tanto,

$$\vec{\ } = \sum_{i=1}^{l} {}_i\vec{e}_i + \sum_{=l+1}^{m} \vec{e}\ = \sum_{i=1}^{l} {}_i\vec{e}_i + \sum_{=l+1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{l} a_i\ \vec{e}_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} {}_i\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{=l+1}^{m} a_i\right)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{l}\left({}_i + \sum_{=l+1}^{m} a_i\right)\vec{e}_i.$$

Esto prueba que ${}_1$ es un sistema de generadores de . ■

Proposición 4.2.8

Sea un sistema de generadores de un espacio vectorial de dimensión *n*; podemos encontrar un subconjunto ${}_1$ de que sea una base de .

Demostración. Elegir $\vec{\ }_1 \in$ tal que $\vec{\ }_1 \neq \vec{0}$; esto siempre puede hacerse salvo en el caso en que $= \{\vec{0}\}$ (si $= \{\vec{0}\}$ la proposición es una trivialidad). Elegir a continuación $\vec{\ }_2 \in$ tal que $\vec{\ }_2$ es independiente con $\vec{\ }_1$. Suponiendo que hemos elegido $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }$, elegir $\vec{\ }_{\ +1} \in$ que sea linealmente independiente con los anteriores. Este proceso se continúa hasta que es imposible encontrar vectores de linealmente independientes con los anteriores. Sea

$${}_1 = \{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_l\}$$

el subconjunto de obtenido de esta manera. Por el Lema 4.2.7, $_1$ es un sistema de generadores de . Debido a la elección realizada, los vectores de $_1$ son linealmente independientes; por tanto, $_1$ es una base de . Se termina así la demostración de la Proposición 4.2.8. ■

* * *

Terminamos esta sección haciendo unos comentarios acerca de la dependencia o independencia lineal de subconjuntos infinitos de un espacio vectorial.

Un *on nto in inito* de elementos de un espacio vectorial se dice *linealmente in e en iente* si cualquier subconjunto finito de es linealmente independiente. En caso contrario, se dice *linealmente e en iente*; es decir, es linealmente dependiente si existe un subconjunto finito de él que es linealmente dependiente.

Un espacio vectorial en el que se puede encontrar un subconjunto linealmente independiente y con infinitos elementos, se dice que tiene *imen i n in inita*.

Los espacios vectoriales $_{\mathbb{K}}[\ ]$ y $([0, 2\pi])$, introducidos en la sección anterior, son espacios vectoriales de dimensión infinita. El conjunto $= \{\ ^n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente en $_{\mathbb{K}}[\ ]$. El conjunto $= \{\cos n\ , \operatorname{sen} m\ \}_{n,m\in\mathbb{N}}$ es un conjunto linealmente independiente en $([0, 2\pi])$. De las dos últimas afirmaciones anteriores la primera es sencilla de demostrar; la segunda es más complicada y se pide su demostración por parte del lector en el ejercicio 13 de la sección 4.3; en este ejercicio se dan las sugerencias adecuadas para facilitar su resolución.

4.3. CAMBIO DE BASE

Supongamos que un espacio vectorial de dimensión finita posee dos bases

$$= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\} \quad \text{y} \quad ' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n\}.$$

Denominaremos *ba e antig a* a la primera de ellas y *ba e n eva* a la segunda. Como todo elemento de la base nueva se escribe como combinación lineal de los elementos de la base antigua podemos escribir:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{e}'_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puesto que es conveniente que el lector se familiarice con notaciones abreviadas escribiremos (3.1) de la forma

$$\vec{e}' = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \vec{e}_i, \qquad = 1, 2, ..., n.$$

Diremos entonces que *la n eva ba e e obtiene e la antig a me iante la matri*

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde la -ésima columna de son las componentes del vector $\vec{e}'$ con respecto a la base antigua, = 1, 2, ..., *n*. La matriz se denomina *matri el ambio e ba e e a* ′. Cuando, por necesidades de notación sea necesario hacer constar las bases y ′ escribiremos

$$= \quad '$$

Si y ′ coinciden se tiene que $= _{n\times n}$. La matriz $_{n\times n}$ es invertible; esto sucede para cualquier matriz de un cambio de base, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.1

La matriz del cambio de base de a ′ es invertible y su inversa es la matriz del cambio de base de ′ a . Podemos, por tanto, escribir:

$$' = (\quad ')^{-1} = \quad ^{-1}$$

Demostración. Para demostrar que es invertible es suficiente demostrar que su determinante es no nulo (ver Teorema 2.4.1). Ciertamente, el determinante de es no nulo, ya que de lo contrario sus columnas y, por consiguiente, los vectores $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, ..., $\vec{e}'_n$ de la base ′, serían linealmente dependientes.

Sea $' = (a'_i)_{i,\,i=1,\ldots,n}$ la matriz del cambio de base de ′ a ; hemos de demostrar que $' = \quad ^{-1}$. Por definición de ′ tenemos

$$\vec{e} \; = \sum_{i=1}^{n} a'_i \, \vec{e}'_i, \qquad = 1, 2, ..., n;$$

por definición de tenemos

$$\vec{e}'_i = \sum_{=1}^{n} a \; _i \vec{e} \; , \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Por tanto,

$$\vec{e} \; = \sum_{i=1}^{n} a'_i \left(\sum_{=1}^{n} a \; _i \vec{e} \; \right) = \sum_{=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a \; _i a'_i \right) \vec{e} \; .$$

Puesto que $\sum_{i=1}^{n} a \; _i a'_i$ es el elemento que ocupa el lugar (,) en el producto de las matrices y ′ se tiene que

$$_{n\times n} = \qquad = \quad ',$$

ya que las coordenadas de $\vec{e}$ en la base son únicas. Esto demuestra el resultado deseado. ■

* * *

Tratemos ahora de relacionar entre sí las coordenadas de un mismo vector en las bases nueva ′ y antigua . Supongamos que $^{\rightarrow} \in$,

$$^{\rightarrow} = \; _1\vec{e}_1 + \; _2\vec{e}_2 + \cdots + \; _n\vec{e}_n \tag{3.2}$$

y además:

$$^{\rightarrow} = \; '_1\vec{e}'_1 + \; '_2\vec{e}'_2 + \cdots + \; '_n\vec{e}'_n \tag{3.3}$$

Sustituyendo en (3.3) las expresiones dadas en (3.1) obtenemos

$$\vec{} = {}'_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\vec{e}_i\right) + {}'_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\vec{e}_1\right) + \cdots + {}'_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}\vec{e}_i\right) =$$

$$= (a_{11}\ {}'_1 + a_{12}\ {}'_2 + \cdots + a_{1n}\ {}'_n)\vec{e}_1 + (a_{21}\ {}'_1 + a_{22}\ {}'_2 + \cdots + a_{2n}\ {}'_n)\vec{e}_2 +$$

$$+ \cdots + (a_{n1}\ {}'_1 + a_{n2}\ {}'_2 + \cdots + a_{nn}\ {}'_n)\vec{e}_n.$$

Comparando esta última igualdad con (3.2) podemos escribir

$$\begin{aligned} {}_1 &= a_{11}\ {}'_1 + a_{12}\ {}'_2 + \cdots + a_{1n}\ {}'_n \\ {}_2 &= a_{21}\ {}'_1 + a_{22}\ {}'_2 + \cdots + a_{2n}\ {}'_n \\ &\vdots \\ {}_n &= a_{n1}\ {}'_1 + a_{n2}\ {}'_2 + \cdots + a_{nn}\ {}'_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si convenimos en escribir

$$= \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ {}_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad {}' = \begin{pmatrix} {}'_1 \\ {}'_2 \\ \vdots \\ {}'_n \end{pmatrix}$$

para las componentes del vector $\vec{}$ en la antigua y en la nueva base, respectivamente, (3.4) se escribe brevemente de la forma

$$= \quad '$$

llamada *e a i n matri ial el ambio e ba e* (de a ').

Esto nos permite obtener las coordenadas del vector $\vec{}$ en la base antigua conociendo las coordenadas del mismo vector en la nueva base.

EJEMPLO A. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Dadas las bases

$$\vec{}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

y

$$\vec{}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{}'_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{}'_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3,$$

encontrar las coordenadas del vector $\vec{} = 3\vec{}_1 + 2\vec{}_2$ en la base $\{\vec{}'_1, \vec{}'_2, \vec{}'_3\}$. Comenzar observando que ambos conjuntos son bases de $\mathbb{R}^3$.

Podemos escribir $\vec{} = 3(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) + 2\vec{e}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. El problema queda reducido a encontrar la matriz del cambio de base de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a $\{\vec{}'_1, \vec{}'_2, \vec{}'_3\}$. De las expresiones dadas deducimos que la matriz del cambio de base es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo $\vec{} = {}'_1\vec{}'_1 + {}'_2\vec{}'_2 + {}'_3\vec{}'_3$, por los resultados anteriores tenemos que

$$\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}'_1\\{}'_2\\{}'_3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}{}'_1\\{}'_2\\{}'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\vec{} = -3\vec{}'_1 - \vec{}'_2 + 3\vec{}'_3$.

EJEMPLO B. Sean $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ dos vectores perpendiculares unitarios en $\mathbb{R}^2$ en la dirección de los ejes de coordenadas cartesianas. Girando los ejes de coordenadas un ángulo ϕ en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) se obtiene una nueva base $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$. ¿Cuál es la matriz del cambio de base?

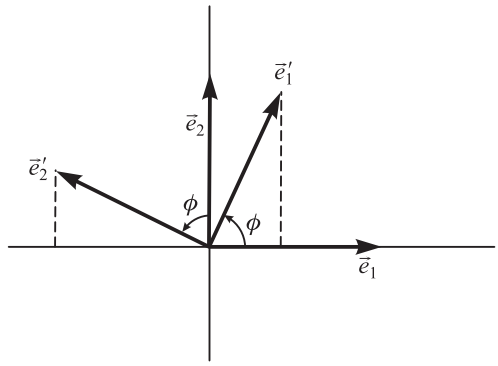
En la figura 4.3 se observa que

$$\vec{e}'_1 = (\cos\phi)\vec{e}_1 + (\operatorname{sen}\phi)\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\vec{e}_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\vec{e}_2 = -(\operatorname{sen}\phi)\vec{e}_1 + (\cos\phi)\vec{e}_2,$$

con lo que la matriz del cambio de base es

$$= \begin{pmatrix}\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi\\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi\end{pmatrix}.$$



i ra 4.3

Las coordenadas antiguas a través de las nuevas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix}{}_1\\{}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi\\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}'_1\\{}'_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}{}_1 = {}'_1\cos\phi - {}'_2\operatorname{sen}\phi\\ {}_2 = {}'_1\operatorname{sen}\phi + {}'_2\cos\phi\end{matrix}$$

* * *

EJERCICIOS (Secciones 4.1, 4.2 y 4.3)

1. a) Decir si el conjunto $= \{ \in ([0, 1]) : 2 (0) = (1)\}$ es un espacio vectorial con las mismas operaciones que las definidas en $([0, 1])$.
   b) Decir si el conjunto

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \; a - b + \quad + \quad = 0 \right\}$$

   es un espacio vectorial con las mismas operaciones que las definidas en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Estudiar si las siguientes familias de vectores son linealmente dependientes o independientes:
   a) $\{(1, 2), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$.
   b) $\{(1, i), (i, -1)\} \subset \mathbb{C}^2$ (como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$).
   c) $\{e^{i\pi t}, e^{i\pi(t-1)}, e^{i\pi(t+1)}\} \subset {}_{\mathbb{C}}([0, 1])$, donde ${}_{\mathbb{C}}([0, 1])$ denota las funciones continuas definidas en $[0, 1]$ con valores en $\mathbb{C}$.
   d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   e) $\{\operatorname{sen} \pi t, \operatorname{sen} 2\pi t\} \subset {}_{\mathbb{R}}([0, 1])$.

3. Encontrar los valores de para los cuales los vectores (, 1, 0), (1, , 1) y (0, 1,) son linealmente dependientes en $\mathbb{C}^3$.

4. Demostrar que en $\mathbb{C}^2$ puede definirse una estructura de espacio vectorial real. ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

5. Estudiar si los siguientes conjuntos son bases del espacio vectorial dado:
   a) $\{1, \; + 3, (\; + 3)^2, (\; + 3)^3\}$ en ${}^{(3)}_{\mathbb{R}}[\;]$.
   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

6. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores (0, 0, 1, 1) y (1, 1, 0, 0).

7. Estudiar si las aplicaciones lineales ${}_1$, ${}_2$, ${}_3$ y ${}_4$ dadas por ${}_1({}_1, {}_2) = ({}_1, - {}_2)$, ${}_2({}_1, {}_2) = ({}_1, {}_2)$, ${}_3({}_1, {}_2) = (2 {}_1, {}_2)$ y ${}_4({}_1, {}_2) = ({}_1 + 2 {}_2, {}_2)$ forman una base de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

8. Sean ${}_1( )$, ${}_2( )$, ..., $( )$ polinomios y supongamos que

$$\begin{vmatrix} {}_1(a_1) & {}_2(a_1) & \cdots & (a_1) \\ {}_1(a_2) & {}_2(a_2) & \cdots & (a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_1(a\;) & {}_2(a\;) & \cdots & (a\;) \end{vmatrix} \neq 0$$

para algunos números reales a distintos. Demostrar que el conjunto $\{\ _1(\ ),\ \ _2(\ ),\ ...,\ \ (\ )\}$ es linealmente independiente en $\ _{\mathbb{R}}[\ ]$.

9. Dada una matriz $\ \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ definimos su *tra a* como la suma de los elementos de su diagonal principal; es decir, si $\ = (a_i)_{i,\ =1,\ ...,\ n}$, traza $(\ ) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Demostrar que

$$= \{\ \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) :\ \text{traza}(\ ) = 0\}$$

es un espacio vectorial con las operaciones definidas en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. ¿Cuál es la dimensión del espacio ?

10. **a)** Demostrar que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$:

$$_1 = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1), \vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)\},$$

$$_2 = \{\vec{\ }_1 = (1, 2, 0, 0), \vec{\ }_2 = (0, 1, 2, -1), \vec{\ }_3 = (1, -1, -1, -1), \vec{\ }_4 = (0, 1, 1, 0)\}.$$

b) Encontrar las componentes del vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2$ con respecto a la base $\ _2$.

11. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sea $\vec{\ }_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$, $\vec{\ }_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_2$, ..., $\vec{\ }_{n-1} = \vec{e}_n - \vec{e}_{n-1}$, $\vec{\ }_n = \vec{e}_n$.

a) Demostrar que $\{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

b) Expresar el vector $\vec{\ } = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{e}_n$ como una combinación lineal de los vectores $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n$.

12. Demostrar que el conjunto $\ = \{(\ + 1), (\ - 1),\ ^2 - 1,\ ^2 + 1\}$ es un sistema de generadores de $\ ^{(2)}_{\mathbb{R}})[\ ]$. Encontrar un subconjunto $\ _1$ de $\ $ que sea una base de $\ ^{(2)}_{\mathbb{R}}[\ ]$.

13. Demostrar que el conjunto

$$= \{\cos n\ ,\ \text{sen}\, m\ \}_{n,m\in\mathbb{N}}$$

es linealmente independiente en $\ ([0, 2\pi])$.

[*geren ia*: observar que

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 n\ )\ \ \neq 0,\ \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 m\ )\ \ \neq 0,\ n, m \in \mathbb{N}$$

y que

$$\int_0^{2\pi} (\cos n\ )(\cos m\ )\ \ = \int_0^{2\pi} (\cos n\ )(\text{sen}\, m\ )\ \ =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\text{sen}\, n\ )(\text{sen}\, m\ )\ \ = 0$$

si $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.]

14. Sea un espacio vectorial de dimensión n y $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base de . Sea $= (a_i)_{i, = 1, ..., n}$ una matriz de orden n con determinante no nulo. Demostrar que

$$\vec{e}' = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i, \qquad = 1, 2, ..., n$$

es una base de . (Como consecuencia, *to a matri invertible e la matri e n ambio e ba e*.)

15. Decir para qué valores de a los vectores $\vec{}_1 = (a, 0, 1)$, $\vec{}_2 = (0, 1, 1)$ y $\vec{}_3 = (2, -1, a)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

16. Considerar el conjunto $\mathbb{C}^2 = \{(, \omega) : , \omega \in \mathbb{C}\}$. Demostrar que $\mathbb{C}^2$ tiene dimensión 4 como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y dimensión 2 como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

4.4. SUBESPACIOS VECTORIALES. INTERSECCIÓN Y SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Algunos subconjuntos de un espacio vectorial son a su vez espacios vectoriales con las operaciones definidas en ; estos subconjuntos especiales reciben el nombre de *be a io ve to riale* de .

Definición 4.4.1 (ubespacio ectorial)

Un subespacio ectorial de un espacio vectorial es un subconjunto $_1$, de , que a su vez es un espacio vectorial con las operaciones definidas en .

Para demostrar que un subconjunto es un subespacio vectorial no es necesario comprobar de nuevo que satisface todas las propiedades de espacio vectorial. En realidad, es suficiente demostrar que la suma de dos elementos de $_1$ es otro elemento de $_1$ y que la multiplicación de un elemento de $_1$ por un elemento del cuerpo $\mathbb{K}$ es otro elemento de $_1$; es decir:

1) Si $\vec{}, \vec{v} \in {}_1$, $\vec{} + \vec{v} \in {}_1$.
2) Si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{} \in {}_1$, $a\vec{} \in {}_1$.

En efecto, las propiedades (S1), (S2), (M1), (M2), (M3) y (M4) se cumplen en $_1$ por cumplirse en el espacio más grande ; además, $0 \cdot \vec{} = \vec{0} \in {}_1$ y $(-1)\vec{} = -\vec{} \in {}_1$ debido a 2), lo cual prueba que las propiedades (S3) y (S4) son también ciertas en $_1$.

EJEMPLO A

a) Todas las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
b) $^{(n)}_{\mathbb{R}}[\ ]$ es un subespacio vectorial de $_{\mathbb{R}}[\ ]$; a su vez, $_{\mathbb{R}}[\ ]$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
c) Los subconjuntos $\{\vec{0}\}$ y son siempre subespacios vectoriales de ; estos reciben el nombre de *be a io ve toriale im ro io* de y el resto se denominan *ro io* .

* * *

Además de ser intuitivamente claro no es difícil demostrar que si es un espacio vectorial de dimensión finita n, *al ier be a io* $_1$ *e tiene imen i n e no era a n.*

EJEMPLO B. Sea $= \{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial . Definimos

$$L( ) = L(\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n) = \left\{ \sum_{=1}^{n} a\vec{} : a \in \mathbb{K}, \quad = 1, 2, ..., n \right\}.$$

El conjunto $L( )$ es un subespacio vectorial de , ya que

$$\sum_{=1}^{n} a\vec{} + \sum_{=1}^{n} b\vec{} = \sum_{=1}^{n} (a + b)\vec{} \in L( )$$

y

$$a \sum_{=1}^{n} a\vec{} = \sum_{=1}^{n} (aa)\vec{} \in L( ).$$

Este subespacio vectorial recibe el nombre de *be a io ve torial genera o or* .

Los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n$ son un sistema de generadores de $L( )$; de ellos se puede elegir unos cuantos que sean base de $L( )$ (Proposición 4.2.8). Por tanto, la dimensión de $L( )$ no supera a n.

Por ejemplo, los vectores $\vec{}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{}_2 = (-1, 1, 0)$ y $\vec{}_3 = (1, 1, 2)$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{2+2}{=} {}_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{2=}{=} {}_3 0.$$

Por tanto, $L(\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión inferior a 3. Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$\vec{}_1$ y $\vec{}_2$ son linealmente independientes, mientras que $\vec{}_3$ depende linealmente de los dos primeros. Por tanto, $L(\vec{}_1, \vec{}_2) = L(\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3)$ y este subespacio vectorial tiene dimensión 2.

EJEMPLO C. Dada una matriz de m filas y n columnas y de rango r todas las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo

$$\vec{} = \vec{0}, \quad \vec{} \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

son de la forma

$$\vec{} = a_1\vec{}_1 + a_2\vec{}_2 + \cdots + a\vec{}$$

donde $= n - r$, $a \in \mathbb{R}$ y los vectores $\vec{}$ son *linealmente in e en iente* (véase Proposición 1.2.6). Por tanto, *la ol ione el i tema omog neo* (4.1) *on tit yen n be a io ve to rial e imen i n* $= n - r$ *e* $\mathbb{R}^n$. Además, $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$ es una base de este subespacio.

Recíprocamente, todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ puede determinarse por un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Sea $_1$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $$ y sea $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'\ \}$ una de sus bases. Completamos esta base hasta obtener una base

$$\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}', \vec{e}'_{+1}, ..., \vec{e}'_n\}$$

de $\mathbb{R}^n$. Es claro que si $\vec{} = {}'_1\vec{e}'_1 + {}'_2\vec{e}'_2 + \cdots + {}'_n\vec{e}'_n$, el vector $\vec{}$ pertenece a $_1$ si y solo si

$$'_{+1} = 0, ..., \ {}'_n = 0.$$

Además, si $\vec{} = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 + \cdots + {}_n\vec{e}_n$, donde $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base dada de $\mathbb{R}^n$, realizando el cambio de base adecuado, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 = {}'_{+1} &= a_{+1,1}\ {}_1 + \cdots + a_{+1,n}\ {}_n \\
0 = {}'_{+2} &= a_{+2,1}\ {}_1 + \cdots + a_{+2,n}\ {}_n \\
&\vdots \\
0 = {}'_n &= a_{n1}\ {}_1 + \cdots + a_{nn}\ {}_n
\end{aligned}$$

que es un sistema homogéneo de $n -$ ecuaciones con n incógnitas que determina el subespacio $_1$.

* * *

También podemos usar el algoritmo de Gauss-Jordan (sección 1.1) junto con el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) para calcular las ecuaciones implícitas de un subespacio $_1$ de base $\{\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'\ \}$ en un espacio vectorial $$ de base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

Veámoslo en un ejemplo.

Ejemplo D. Sea $_1$ el subespacio de $\mathbb{R}^5$ de base

$$\begin{aligned}
\vec{e}'_1 &= (1, 2, 0, 1, 0) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4 \\
\vec{e}'_2 &= (1, 1, 1, 1, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 + \vec{e}_5.
\end{aligned}$$

Para cada $\vec{v} = (\ _1,\ _2,\ _3,\ _4,\ _5) = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 + {}_3\vec{e}_3 + {}_4\vec{e}_4 + {}_5\vec{e}_5$ en $_1$, la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & {}_1 \\ 2 & 1 & {}_2 \\ 0 & 1 & {}_3 \\ 1 & 1 & {}_4 \\ 0 & 1 & {}_5 \end{pmatrix}$$

tiene que tener rango exactamente 2, por el teorema de Rouché-Frobenius. Aplicando el método de Gauss-Jordan a $$ obtenemos una matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & {}_1 \\ 0 & 1 & 2\ {}_1 - {}_2 \\ 0 & 0 & 2\ {}_1 - {}_2 - {}_3 \\ 0 & 0 & -\ {}_1 + {}_4 \\ 0 & 0 & 2\ {}_1 - {}_2 - {}_5 \end{pmatrix}$$

que tiene que tener rango 2. Luego $\vec{v}$ está en $_1$ si y solo si

$$2\ _1 - \ _2 - \ _3 = 0 \quad , \quad - \ _1 + \ _4 = 0 \quad , \quad 2\ _1 - \ _2 - \ _5 = 0,$$

que son las ecuaciones implícitas de $_1$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ de $\mathbb{R}^5$.

* * *

Dados dos subespacios vectoriales $_1$ y $_2$ de un espacio vectorial podemos definir su *inter e i n*

$$_1 \cap \ _2 = \{\vec{} \in \ : \vec{} \in \ _1 \text{ y } \vec{} \in \ _2\}$$

y su *ma*

$$_1 + \ _2 = \{\vec{}_1 + \vec{}_2 : \vec{}_1 \in \ _1, \vec{}_2 \in \ _2\}.$$

Como puede comprobarse fácilmente estos dos nuevos subconjuntos son también subespacios vectoriales de . La relación que existe entre las dimensiones de estos subespacios vectoriales y las dimensiones de los subespacios $_1$ y $_2$ queda plasmada en el siguiente resultado:

Proposición 4.4.2 (rmula de rassmann)

$$\dim(\ _1) + \dim(\ _2) = \dim(\ _1 + \ _2) + \dim(\ _1 \cap \ _2)$$

para cualesquiera subespacios vectoriales $_1$ y $_2$ de un espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración. Sea $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l\}$ una base de $_1 \cap \ _2$; completar esta base hasta obtener una base

$$\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l, \vec{}_{l+1}, ..., \vec{}\ \}$$

de $_1$ y una base

$$\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l, \vec{g}_{l+1}, ..., \vec{g}_m\}$$

de $_2$. Demostraremos que

$$= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l, \vec{}_{l+1}, ..., \vec{}, \vec{g}_{l+1}, ..., \vec{g}_m\}$$

es una base de $_1 + \ _2$. De aquí se deducirá que

$$\dim(\ _1 + \ _2) = l + (\ - l) + (m - l) = \ + m - l =$$
$$= \dim(\ _1) + \dim(\ _2) - \dim(\ _1 \cap \ _2),$$

que era lo que queríamos demostrar.

Para demostrar que es una base de $_1 + \ _2$ basta demostrar que es un conjunto de vectores linealmente independientes, ya que debido a la construcción realizada resulta claro que todo elemento de $_1 + \ _2$ es una combinación lineal de elementos de . Supongamos, por tanto, que tenemos una expresión de la forma

$$a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_l\vec{e}_l + b_{l+1}\vec{}_{l+1} + \cdots + b\ \vec{}\ + \ _{l+1}\vec{g}_{l+1} + \cdots + \ _m\vec{g}_m = \vec{0}.$$

El vector $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_l\vec{e}_l + b_{l+1}\vec{\ }_{l+1} + \cdots + b\vec{\ } \in {}_1$ coincide con $-{}_{l+1}\vec{g}_{l+1} - \cdots - {}_m\vec{g}_m \in {}_2$ y, por tanto, es un elemento de ${}_1 \cap {}_2$. Como ${}_1 \cap {}_2$ está generado por los vectores $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l$, hemos de tener ${}_{l+1} = \cdots = {}_m = 0$. Por tanto, la igualdad anterior se transforma en

$$a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_l\vec{e}_l + b_{l+1}\vec{\ }_{l+1} + \cdots + b\vec{\ } = \vec{0}.$$

Puesto que $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_l, \vec{\ }_{l+1}, ..., \vec{\ }\}$ es una base de ${}_1$ deducimos que $a_1 = \cdots = a_l = = b_{l+1} = \cdots = b = 0$. Esto termina la demostración. ■

EJEMPLO E. Dos subespacios vectoriales ${}_1$ y ${}_2$ en $\mathbb{R}^3$, ambos de dimensión 2, que se cortan en una recta, han de tener una suma que coincida con todo $\mathbb{R}^3$, ya que

$$\dim({}_1 + {}_2) = \dim({}_1) + \dim({}_2) - \dim({}_1 \cap {}_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

* * *

Definición 4.4.3

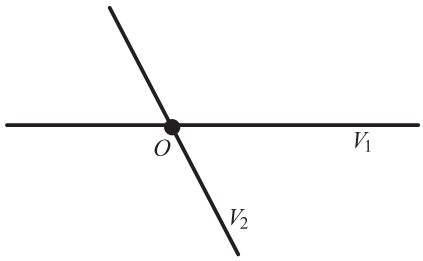
Un espacio vectorial es **suma directa** de dos de sus subespacios ${}_1$ y ${}_2$ si:

1) ${}_1 + {}_2 = .$
2) ${}_1 \cap {}_2 = \{\vec{0}\}.$

Utilizaremos la notación $= {}_1 \oplus {}_2$ para indicar que es suma directa de los subespacios vectoriales ${}_1$ y ${}_2$.

Observaciones

1) El plano $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como suma directa de dos rectas no coincidentes que pasan por el origen.



2) El espacio $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como suma directa de un plano que pasa por el origen y una recta que le corta en este punto.
3) De la Proposición 4.4.2 deducimos que si $= {}_1 \oplus {}_2$ se tiene que

$$\dim( ) = \dim({}_1 \oplus {}_2) = \dim({}_1) + \dim({}_2)$$

ya que el subespacio vectorial impropio $\{\vec{0}\}$ tiene dimensión 0.

Si $= {}_1 + {}_2$, todo elemento $\vec{v} \in$ puede escribirse de la forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 \in {}_1$ y $\vec{v}_2 \in {}_2$. Si la suma es directa, esta descomposición es única, como prueba el siguiente resultado.

Proposición 4.4.4

Sean $_1$ y $_2$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $= {}_1 \oplus {}_2$.
2) Para todo $\vec{v} \in$ existe una descomposición *ni a* de la forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 \in {}_1$ y $\vec{v}_2 \in {}_2$.

Demostración. Para demostrar que 1) implica 2) es suficiente probar la unicidad; supongamos que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{v} = \vec{}_1 + \vec{}_2$ con $\vec{v}_1, \vec{}_1 \in {}_1$ y $\vec{v}_2, \vec{}_2 \in {}_2$. Tenemos

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{}_1 + \vec{}_2$$

o bien

$$\vec{v}_1 - \vec{}_1 = \vec{}_2 - \vec{v}_2.$$

La parte izquierda de esta igualdad es un elemento de $_1$, mientras que la parte derecha es un elemento de $_2$. Puesto que $\vec{0}$ es el único vector que $_1$ y $_2$ tienen en común, deducimos que

$$\vec{v}_1 - \vec{}_1 = \vec{}_2 - \vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Por tanto

$$\vec{}_1 = \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \vec{}_2 = \vec{v}_2,$$

que era lo que queríamos demostrar.

Para demostrar que 2) implica 1) es suficiente demostrar que $_1 \cap {}_2 = \{\vec{0}\}$. Si $\vec{v} \in {}_1 \cap {}_2$, podemos escribir

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}.$$

Puesto que la descomposición ha de ser única se tiene que $\vec{v} = \vec{0}$. Esto prueba el resultado deseado. ■

* * *

También podemos definir la intersección, la suma y la suma directa de más de dos subespacios vectoriales. En general, dados *n* subespacios vectoriales $_1$, $_2$, ..., $_n$ de un espacio vectorial definimos

$$\bigcap_{=1}^{n} = \{\vec{} \in : \vec{} \in \quad \text{para todo} \quad = 1, ..., n\}$$

y

$$\sum_{=1}^{n} = \left\{ \sum_{=1}^{n} \vec{} : \vec{} \in , \quad = 1, ..., n \right\}$$

que reciben el nombre de *inter e i n* y *ma*, respectivamente, de los subespacios vectoriales dados. Estos dos nuevos subespacios son también subespacios vectoriales de .

La definición de *ma ire ta* de varios subespacios vectoriales es un poco más complicada en general, que si solamente hay dos. La definición más razonable es la que guarda similitud

con la afirmación 2) de la Proposición 4.4.4. Diremos que es *ma ire ta* de los subespacios vectoriales $_1$, $_2$, ..., $_n$, y escribiremos

$$= \ _1 \oplus \ _2 \oplus \cdots \oplus \ _n$$

o bien

$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \ _i$$

si todo vector $\vec{v}$ de tiene una descomposición *ni a* de la forma $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i$, con $\vec{v}_i \in \ _i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Si $n = 2$, la Proposición 4.4.4 muestra que esta definición de suma directa y la dada anteriormente son equivalentes. Si $n \geqslant 3$ se pide demostrar en el ejercicio 6 al final de esta sección que una condición equivalente de suma directa es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \ _i = \quad \text{y} \quad \ _i \cap \left(\sum_{\neq i} \ \right) = \{\vec{0}\} \text{ para todo } i = 1, 2, ..., n.$$

A partir de aquí puede demostrarse que

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \ _i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(\ _i),$$

lo cual se obtiene aplicando repetidas veces el resultado ya conocido cuando n es igual a 2.

EJERCICIOS 4.4

1. Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de estos. Verificar la verdad o falsedad de esto en los ejemplos siguientes:

   a) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 1\}$; $\{(2, 1)\}$.

   b) $\{\ (\ ) \in \ ^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ] : (\ -1) \text{ divide a } (\ )\}$; $\{\ -1, \ ^2 - 1\}$.

   c) $\text{com}(\ ) = \{\ \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ = \ \}$ con $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

   a) $= \{\ \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : r(\ ) = 1\}$ donde $r(\ )$ designa el rango de .

   b) $= \{\ \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \text{traza}(\ ) = 0\}$, donde traza $(\ )$ denota la suma de los elementos de la diagonal principal de .

3. Encontrar la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores:

   a) $\{(1, 2), (0, 1), (-1, 3)\}$ en $\mathbb{R}^2$.

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

4. Hallar en cada uno de los ejemplos siguientes la suma y la intersección del par de subespacios dados, y comprobar que se verifica la fórmula de Grassmann

$$\dim(\ _1) + \dim(\ _2) = \dim(\ _1 + \ _2) + \dim(\ _1 \cap \ _2).$$

a) $\ _1 = \text{com}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\ _2 = \text{com}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ver el ejercicio 1 para la definición de com( )).

b) $\ _1 = \{\ (\ ) \in \ ^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ]:\ \ + 1 \text{ divide a } \ (\ )\}$,
$\ _2 = \{\ (\ ) \in \ ^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ]:\ \ - 1 \text{ divide a } \ (\ )\}$.

c) $L(\{\operatorname{sen} t, \cos t\})$, $L(\{e^{it}, e^{-it}\})$ considerados ambos como subespacios del espacio vectorial *real* $\ _{\mathbb{C}}([0, 1])$.

5. Decir cuáles de los siguientes pares de subespacios se suman directamente y cuál es la suma (directa o no) en cada caso:

a) $\mathcal{S} = \{\ \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}):\ \ = \ ^t\}$ (matrices simétricas)
$\mathcal{A} = \{\ \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}):\ \ = - \ ^t\}$ (matrices antisimétricas)

b) $\ = \{\ : [-1, 1] \to \mathbb{R}:\ (-t) = \ (t)\}$ (funciones pares)
$\ = \{\ : [-1, 1] \to \mathbb{R}:\ (-t) = - \ (t)\}$ (funciones impares)
[*geren ia*: $g(t) = (g(t) + g(-t))/2 + (g(t) - g(-t))/2$]

c) $\ _1 = \{\ : [-1, 1] \to \mathbb{R}:\ (t) = 0,\ t \geqslant 0\}$
$\ _2 = \{\ : [-1, 1] \to \mathbb{R}:\ (t) = 0,\ t \leqslant 0\}$.

6. Sean $\ _1, \ _2, \ldots, \ _n$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial $\ $. Demostrar que si $n \geqslant 3$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\ = \bigoplus_{i=1}^{n} \ _i$

b) $\ = \sum_{i=1}^{n} \ _i$ y $\ _i \cap \left(\sum_{i \neq} \ \right) = \{\vec{0}\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

7. Sean $\ _1, \ _2$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial $\ $. Demostrar que $L(\ _1 \cup \ _2) = \ _1 + \ _2$.

4.5. EL ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

Un concepto importante en matemáticas es el de *on nto o iente*. Para definirlo se necesita un conjunto $\ $ y una relación $\Re$ en $\ $, es decir, una ley que nos permita decidir si dos elementos de $\ $ están o no relacionados. Cuando dos elementos $a, b \in \ $ están relacionados escribimos $a \,\Re\, b$.

Una relación $\Re$ en $\ $ se dice que es de *e ivalen ia* si cumple las siguientes propiedades:

1) Reflexiva: $a \,\Re\, a$ para todo $a \in \ $.
2) Simétrica: si $a, b \in \ $ y $a \,\Re\, b$, entonces $b \,\Re\, a$.
3) Transitiva: si $a, b, \ \in \ $, $a \,\Re\, b$ y $b \,\Re\ $, entonces $a \,\Re\ $.

Denotemos por $[a]$ al conjunto $\{b \in \quad : b \,\Re\, a\}$, que llamamos *la e e e ivalen ia* del elemento a. Cualquier elemento de esta clase de equivalencia se dice que es un *re re entante* de $[a]$. Todo elemento $a \in$ está en una clase de equivalencia, a saber $[a]$, por la propiedad reflexiva. Además, si $a \,\Re\, b$ las propiedades simétrica y transitiva implican que $[a] = [b]$.

Una propiedad importante de las clases de equivalencia es que si a no está relacionado con b entonces, $[a] \cap [b] = \varnothing$. Para probar este resultado supongamos que existiera $\in [a] \cap [b]$. Entonces $\Re\, a$ y $\Re\, b$. Con la propiedad simétrica deducimos $a \,\Re$ y por la propiedad transitiva tenemos $a \,\Re\, b$, contrariamente a nuestra suposición. Esto implica que es unión disjunta de sus clases de equivalencia.

Llamamos *on nto o iente*, y lo denotamos por $/\Re$, al conjunto de todas las clases de equivalencia, es decir,

$$/\Re = \{[a] : a \in \quad\}.$$

Ejemplo A. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y n un número natural, $n > 1$. Dos números $_1, \ _2 \in \mathbb{Z}$ decimos que están relacionados (módulo n) si al dividirlos entre n ambos dan el mismo resto, o equivalentemente $_1 - \ _2 = \dot{n}$, donde $\dot{n}$ es una notación para indicar que el resultado es un múltiplo de n. Escribimos entonces $_1 \equiv_n \ _2$ para indicar esta relación. Si $\in \mathbb{Z}$, la clase de equivalencia [ ] está formada por todos los números enteros que se obtienen sumando a un múltiplo entero de n. De esta manera, el conjunto cociente es

$$/\equiv_n = \{[\ ] : \ = 0, 1, ..., n-1\}.$$

* * *

Cuando el conjunto es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y es un subespacio vectorial de , podemos definir la siguiente relación:

$$\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \quad .$$

Puede comprobarse que esta relación cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia. Observar que $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2$ si y solo si existe $\vec{\ } \in$ tal que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\ }$, por lo que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\ }$. Por lo tanto, para cada $\vec{v} \in$, su clase de equivalencia es el conjunto

$$[\vec{v}] = \vec{v} + \quad = \{\vec{v} + \vec{\ } : \vec{\ } \in \quad\}.$$

Escribiremos

$$/ \quad = \{[\vec{v}] : \vec{v} \in \quad\}$$

para denotar el conjunto cociente $/\sim$. Observar que $[\vec{0}] =$.

Como es un espacio vectorial podemos sumar sus elementos y multiplicarlos por escalares del cuerpo $\mathbb{K}$. También pueden definirse dos operaciones de este tipo en / de la siguiente forma:

$$(\vec{v}_1 + \quad) + (\vec{v}_2 + \quad) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \quad ,$$

y si $a \in \mathbb{K}$,

$$a \cdot (\vec{v} + \quad) = (a\vec{v}) + \quad .$$

Hay que comprobar que estas operaciones están *bien e ini a* . Por ejemplo, para la suma, si $\vec{\ }_1 \in \vec{v}_1 +$ y $\vec{\ }_2 \in \vec{v}_2 +$ se tiene $\vec{\ }_1 = \vec{v}_1 + \vec{\ }_1$ y $\vec{\ }_2 = \vec{v}_2 + \vec{\ }_2$ con $\vec{\ }_1, \ \vec{\ }_2 \in$; entonces,

$$\vec{\ }_1 + \vec{\ }_2 = \vec{v}_1 + \vec{\ }_1 + \vec{v}_2 + \vec{\ }_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + (\vec{\ }_1 + \vec{\ }_2) \in \vec{v}_1 + \vec{v}_2 +$$

y por lo tanto $(\vec{\ }_1 + \vec{\ }_2) + \quad = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \quad .$

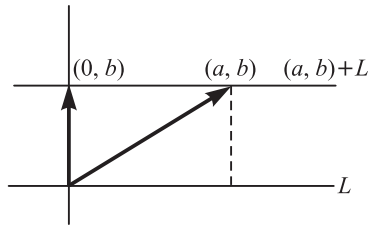
El lector puede comprobar que las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en el conjunto cociente / satisfacen (S1) a (S4) y (M1) a (M4) de la definición de espacio vectorial 4.1.1. Por todo ello / es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que se denomina **espacio ectorial cociente**.

EJEMPLO B. Considerar en $\mathbb{R}^2$ la recta vectorial L de ecuaciones $= t$, $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Observar que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$(a, b) + L = \{(a, b) + (t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(0, b) + (t + a, 0) : t \in \mathbb{R}\} = (0, b) + L$$

por lo que $(a, b) + L$, que es la recta paralela al eje horizontal L que pasa por (a, b), coincide con la recta paralela a L que pasa por $(0, b)$. Por tanto

$$\mathbb{R}^2/L = \{[(0, b)] : b \in \mathbb{R}\} = \{(0, b) + L : b \in \mathbb{R}\}.$$



i ra 4.4

EJEMPLO C. Considerar en $\mathbb{R}^2$ la recta vectorial L de ecuaciones paramétricas $= 3t$, $y = 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Observar que

$$(3, 2) + L = \{(3, 2) + (3t, 2t) : t \in \mathbb{R}\} = \{(3(t + 1), 2(t + 1) : t \in \mathbb{R}\} = L$$

y de manera similar $\lambda(3, 2) + L = L$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Por otro lado $(1, 1) + L$ es la recta paralela a L que pasa por $(1, 1)$, pero como

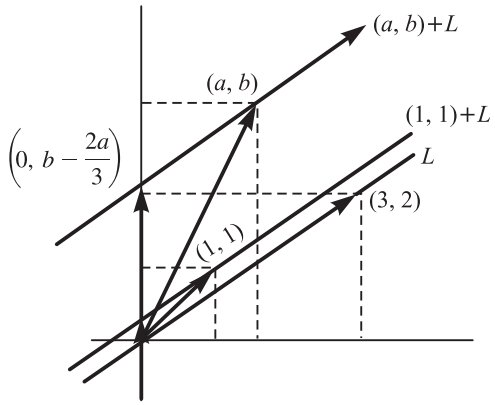
$$(1, 1) + L = (1, 1) - \frac{1}{3}(3, 2) + L = (0, 1/3) + L$$

también es la recta de $\mathbb{R}^2$ paralela a L que pasa por el punto $(0, 1/3)$. De manera similar

$$(a, b) + L = (a, b) - \frac{a}{3}(3, 2) + L = (0, b - (2a/3)) + L$$

es la recta paralela a L que pasa por $(0, b-(2a/3))$. Por tanto, los vectores de la forma $\vec{v}_\alpha = (0, \alpha)$, cuando $\alpha \in \mathbb{R}$, son un conjunto de representantes del espacio cociente $\mathbb{R}^2/L$, es decir

$$\mathbb{R}^2/L = \{[\vec{v}_\alpha] : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



i ra 4.5

* * *

Sea un espacio vectorial de dimensión finita *n*, por lo que todas sus bases tienen *n* elementos. Considerar un subespacio vectorial de . En el resto de esta sección aprenderemos a encontrar una base de / , lo que nos permitirá conocer la dimensión de / en función de las dimensiones de y de . Para conseguir este objetivo comenzaremos demostrando el Teorema de Steinitz, que nos permite encontrar una base de que incluya un conjunto de vectores linealmente independientes inicialmente dados.

Teorema 4.5.1 (teinitz)

Sea un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base de . Si $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ \}$ es un conjunto de vectores de linealmente independiente, entonces existe un subconjunto de $= \{1, ..., n\}$ de cardinal tal que

$$\{\vec{v}_i\}_{i=1,...,} \cup \{\vec{e}\ \}_{\in}$$

es una base de .

Demostración. Haremos la demostración por inducción en . Si $= 1$, entonces $\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$. Sea i_0 un índice con $\lambda_{i_0} \neq 0$. Probaremos a continuación que $\{\vec{v}_1\} \cup \{\vec{e}\ \}_{\in \{i_0\}}$ es una base de . Como este conjunto tiene *n* elementos, basta probar que son linealmente independientes. Supongamos, por tanto, que tenemos una combinación lineal de la forma

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \sum_{\in \{i_0\}} \beta\,\vec{e} = \vec{0}.$$

Como $\vec{v}_1 = \sum_{=1}^{n} \lambda\,\vec{e}$ se tiene

$$\vec{0} = \alpha_1\left(\sum_{=1}^{n} \lambda\,\vec{e}\right) + \sum_{\in \{i_0\}} \beta\,\vec{e} = \alpha_1\lambda_{i_0}\vec{e}_{i_0} + \sum_{\in \{i_0\}} (\alpha_1\lambda + \beta)\vec{e}\,.$$

Como $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de , $\alpha_1\lambda_{i_0} = 0$ y $\alpha_1\lambda + \beta = 0$ para $\in \{i_0\}$. Como $\lambda_{i_0} \neq 0$ se tiene $\alpha_1 = 0$ de la primera ecuación. Sustituyendo $\alpha_1 = 0$ en las restantes se deduce $\beta = 0$ para $\in |i_0\}$.

Supongamos ahora que existe un conjunto $L \subset$ de cardinal -1 tal que $\{\vec{v}\}_{=1,\ldots,-1} \cup \cup \{\vec{e}_\ell\}_{\ell\in\ L}$ es una base de . En esta base podemos escribir

$$\vec{v} = \sum_{=1}^{-1} \gamma\, \vec{v} + \sum_{\ell\in\ L} \lambda_\ell \vec{e}_\ell. \tag{5.1}$$

Si todos los λ_ℓ, $\ell \in L$, fueran cero, el conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}\}$ sería linealmente dependiente. Como estamos suponiendo que no lo es, debe existir $\ell_0 \in L$ tal que $\lambda_{\ell_0} \neq 0$. Solo falta probar que $\{\vec{v}\}_{=1,\ldots,} \cup \{\vec{e}_\ell\}_{\ell\in\ (L\cup\{\ell_0\})}$ es una base de . Como en el caso $= 1$ basta probar que son linealmente independientes. Consideremos, por tanto, una combinación lineal de la forma

$$\sum_{=1} \alpha\, \vec{v} + \sum_{\ell\in\ (L\cup\{\ell_0\})} \beta_\ell \vec{e}_\ell = \vec{0}.$$

Usando (5.1) podemos escribir

$$\vec{0} = \sum_{=1}^{-1} \alpha\, \vec{v} + \alpha \left(\sum_{=1}^{-1} \gamma\, \vec{v} + \sum_{\ell\in\ L} \lambda_\ell \vec{e}_\ell \right) + \sum_{\ell\in\ (L\cup\{\ell_0\})} \beta_\ell \vec{e}_\ell =$$

$$= \sum_{=1}^{-1} (\alpha + \alpha\, \gamma)\vec{v} + \alpha\, \lambda_{\ell_0} \vec{e}_{\ell_0} + \sum_{\ell\in\ (L\cup\{\ell_0\})} (\alpha\, \lambda_\ell + \beta_\ell)\vec{e}_\ell.$$

Como $\{\vec{v}\}_{=1,\ldots,-1} \cup \{\vec{e}_\ell\}_{\ell\in\ L}$ es una base de , se debe tener $\alpha\, \lambda_{\ell_0} = 0$, $\alpha + \alpha\, \gamma = 0$ para $= 1, \ldots, -1$, y $\alpha\, \lambda_l + \beta_\ell = 0$ para $\ell \in (L \cup \{\ell_0\})$. Como $\lambda_{\ell_0} \neq 0$ de la primera ecuación se deduce $\alpha = 0$. Sustituyendo este valor en las restantes ecuaciones obtenemos $\alpha = 0$ para $= 1, \ldots, -1$ y $\beta_\ell = 0$ para $\ell \in (L \cup \{\ell_0\})$. ■

EJEMPLO D. Considerar en $\mathbb{R}^4$ la base dada por:

$$\vec{e}_1 = (1, 2, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (1, 1, 0, 1), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \vec{e}_4 = (1, 1, 1, 2).$$

Vamos a seguir la demostración del teorema de Steinitz (Teorema 4.5.1) para hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que incluya a los vectores $\vec{v}_1 = (4, 7, 1, 2)$ y $\vec{v}_2 = (4, 7, 2, 2)$, que son linealmente independientes. Observemos que

$$\vec{v}_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_4.$$

Luego $\{\vec{v}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ en la que está $\vec{v}_1$. En esta base

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{e}_3,$$

por lo que $\{\vec{v}_1, \vec{e}_2, \vec{v}_2, \vec{e}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ obtenida siguiendo el método dado en la demostración del teorema de Steinitz.

Definición 4.5.2

Sean $_1$ y $_2$ dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial . Diremos que $_1$ y $_2$ son **complementarios** si $= {}_1 \oplus {}_2$.

Observar que si $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de y $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ \}$ es una base de un subespacio vectorial de , según el Teorema 4.5.1 existe un conjunto de índices $\subset$ de cardinal , tal que el subespacio generado por $\{\vec{e}\ \}_{\in}$ es un complementario de .

EJEMPLO E. Considerar el subespacio de $\mathbb{R}^5$ dado por

$$= \{(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4,\ _5) \in \mathbb{R}^5 :\ _1 -\ _5 = 0,\ _2 +\ _3 +\ _4 = 0\},$$

donde las coordenadas están dadas en una base de $\mathbb{R}^5$ fijada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$. Queremos hallar un complementario de . Observamos que

$$\{\vec{v}_1 = (0, 1, -1, 0, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 0, 1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 0, 0, 0, 1)\}$$

es una base de . Usamos la demostración del teorema de Steinitz para hallar una base de $\mathbb{R}^5$ que contenga a esta base de . Como $\vec{v}_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\{\vec{e}_1, \vec{v}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$. Como $\vec{v}_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\{\vec{e}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$. Como $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_5$, el conjunto

$$\{\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$$

es una base de $\mathbb{R}^5$, obtenida siguiendo el método dado en la demostración del teorema de Steinitz. Por lo tanto $L(\{\vec{e}_4, \vec{e}_5\})$ es un complementario de .

* * *

Para calcular una base del espacio vectorial cociente / se puede proceder de la siguiente manera. Si tiene como base $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ \}$, elegimos una base cualquiera de , $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, y aplicamos el teorema de Steinitz. Así obtenemos que el subespacio de generado por $\{\vec{e}\ \}_{\in}$, es decir $L(\{\vec{e}\ \}_{\in}$), es un complementario de y también las clases

$$\{[\vec{e}\ ]\}_{\in}$$

son una base de / . En efecto, como $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de , se tiene que $\{[\vec{e}\ ]\}_{\in}$ es un conjunto linealmente independiente de / . Pues si, para unos α_i no todos nulos se da:

$$\sum_{i\in} \alpha_i[\vec{e}_i] = \left[\sum_{i\in} \alpha_i\vec{e}_i\right] = [\vec{0}],$$

entonces $\sum_{i\in} \alpha_i\vec{e}_i \in$ $= L(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ \})$, por lo que $\{\vec{v}_i\}_{i=1,...,} \cup \{\vec{e}\ \}_{\in}$ no sería un conjunto linealmente independiente de .

También es un conjunto generador, pues cada clase $[\vec{v}] \in$ / se puede expresar como

$$[\vec{v}] = \left[\sum_{i=1} \lambda_i\vec{v}_i + \sum_{\in} \lambda\,\vec{e}\ \right] = \sum_{\in} \lambda\,[\vec{e}\ ]$$

donde $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{v}_i\}_{i=1,...,} \cup \{\vec{e}\ \}_{\in}$ de . Luego es una base.

Como consecuencia se tiene la siguiente fórmula para las dimensiones

$$\dim\ /\ = n - \ = \dim\ - \dim\ .$$

EJEMPLO F. Considerar en $\mathbb{R}^3$ una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Tomemos la recta L generada por $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Entonces $\{\vec{v}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ en la que está $\vec{v}_1$. El espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^3/L$ tiene por base:

$$\overline{\quad} = \{[\vec{e}_2], [\vec{e}_3]\}.$$

Además

$$\mathbb{R}^3/L = \{\alpha[\vec{e}_2] + \beta[\vec{e}_3] : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\ _{(\alpha,\beta)} + L : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

donde $_{(\alpha,\beta)} = (0, \alpha, \beta)$. Es decir $\mathbb{R}^3/L$ es la familia de todas las rectas de $\mathbb{R}^3$ paralelas a L. Como hemos visto, esta familia tiene estructura de espacio vectorial con las dos operaciones siguientes:

$$(\ _{(\alpha,\beta)} + L) + \ _{(\alpha',\beta')} + L) = \ _{(\alpha+\alpha',\beta+\beta')} + L,$$
$$t \cdot (\ _{(a,\beta)} + L) = (\ _{(t\alpha,t\beta)} + L), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIOS 4.5

1. En los casos siguientes, dado un espacio vectorial y uno de sus subespacios vectoriales , describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente / determinados por la relación de equivalencia

$$\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ .$$

   a) $= \mathbb{R}^2$, $= \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

   b) $= \mathbb{R}^3$, $= \{(\ , y, 0) : \ , y \in \mathbb{R}\}$.

   c) $= \ _{\mathbb{R}}^{3}(\ ) = \{a + b\ +\ ^2 +\ ^3 : a, b, \ , \ \in \mathbb{R}\}$, $= \{\ \in \ _{\mathbb{R}}^{3}(\ ) : a = 0\}$.

2. En cada uno de los apartados siguientes comprobar que los vectores dados con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes y seguir la demostración del Teorema de Steinitz para hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que los contenga:

   a) $\vec{v}_1 = (3, 5, 1, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 2, -2), \vec{v}_3 = (1, 0, -3, 4)$.

   b) $\vec{v}_1 = (0, 0, 1, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, -3, 2)$.

3. Considerar el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$= \{(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4) \in \mathbb{R}^4 :\ _1 -\ _4 = 0,\ _1 -\ _3 = 0\},$$

   donde las coordenadas están dadas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Describir las ecuaciones paramétricas de un complementario de .

4. En $\mathbb{R}^3$ considerar una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el subespacio vectorial generado por los vectores $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Hallar una base del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^3/$ y dar una descripción de este espacio vectorial.

5. Considerar el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$= \{(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4) \in \mathbb{R}^4 :\ _1 -\ _4 = 0,\ _1 -\ _3 = 0\},$$

   donde las coordenadas están dadas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ (ver ejercicio 3). Hallar una base de $\mathbb{R}^4/$.

Capítulo 5

Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

5.1. Definición de aplicación lineal. Ejemplos.

5.2. Matriz de una aplicación lineal. Operaciones con aplicaciones lineales.

5.3. Aplicaciones lineales y cambio de base.

5.4. Aplicaciones lineales inyectivas y suprayectivas. Núcleo y rango de una aplicación lineal.

5.5. El espacio dual de un espacio vectorial.

5.1. DEFINICIÓN DE APLICACIÓN LINEAL. EJEMPLOS

En la sección 1.3 hemos definido el concepto de aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Recordamos que en ese contexto toda aplicación lineal quedaba determinada por una matriz de m filas y n columnas; además, las siguientes propiedades caracterizan una aplicación lineal entre estos espacios:

1) $(\vec{} + \vec{y}) = (\vec{}) + (\vec{y})$ para todo $\vec{}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2) $(r\vec{}) = r\ (\vec{})$ para todo $\vec{} \in \mathbb{R}^n$ y todo número real r.

(Ver los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2.)

Utilizaremos esta caracterización para definir las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales cualesquiera. En la siguiente sección mostraremos que, fijadas dos bases en los espacios vectoriales, toda aplicación lineal queda determinada por una matriz.

Definición 5.1.1 (plicaci n lineal)

Sean y espacios vectoriales; una **aplicaci n lineal** de en es una aplicación : → tal que:

1) $(\vec{v} + \vec{}) = (\vec{v}) + (\vec{})$ para todo $\vec{v}, \vec{} \in$.
2) $(a\vec{v}) = a\ (\vec{v})$ para todo $a \in \mathbb{K}$ y todo $\vec{v} \in$.

Nota. Observar que ambos conjuntos y deben ser espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

En el Capítulo 1 se han dado varios ejemplos de aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Recordamos únicamente los giros en el plano y la simetría con respecto a un eje en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO A. Dado un número real a, la aplicación que asocia a cada polinomio del conjunto $_{\mathbb{R}}[\ ]$ su valor para $= a$ es una aplicación lineal; esta aplicación queda definida mediante las siguientes expresiones:

$$: \ _{\mathbb{R}}[\ ] \to \mathbb{R}, \qquad (\ (\ )) = (a).$$

El hecho de que es una aplicación lineal se deduce de las siguientes igualdades:

$$(\ (\ ) + \ (\ )) = ((\ + \ )(\ )) = (\ + \ )(a) = (a) + (a) =$$
$$= (\ (\ )) + (\ (\ ))$$

y

$$(\ (\ )) = (\ (\ )) = (\ )(a) = (\ (a)) = (\ (\ ))$$

para todo número real .

EJEMPLO B. Dada la matriz

$$= \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

de elementos complejos, podemos definir la aplicación

$$: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$$

dada por $((\ _1,\ _2,\ _3)) = (i\ _1 + \ _2,\ _1 + i\ _2 + \ _3)$. Puesto que

$$((\ _1,\ _2,\ _3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde en la parte derecha se realiza una multiplicación de matrices, es fácil demostrar que es una aplicación lineal.

En general, dada una matriz $\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la aplicación

$$: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

dada por

$$((\ _1,\ _2, \ldots,\ _n)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal, que recibe el nombre de *a li a i n lineal a o ia a on la matri* .

EJEMPLO C. Sea la aplicación que a cada polinomio le hace corresponder su derivada, es decir:

$$: \ _{\mathbb{R}}[\ ] \to \ _{\mathbb{R}}[\ ], \qquad (a_0 + a_1\ + \cdots + a_n\ ^n) = a_1 + 2a_2\ + \cdots + na_n\ ^{n-1}.$$

Esta es una aplicación lineal, ya que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada una de las funciones y la derivada de un número real por una función coincide con el producto del número real por la derivada de la función.

Observar que si el conjunto inicial de esta aplicación es $^{(n)}_{\mathbb{R}}[\ ]$, como conjunto final podemos tomar el mismo, o incluso $^{(n-1)}_{\mathbb{R}}[\ ]$; esto es cierto ya que la derivada de un polinomio de grado no superior a n es otro polinomio de grado no superior a $n - 1$.

EJEMPLO D. La aplicación que a cada matriz cuadrada le hace corresponder su determinante no es una aplicación lineal, ya que, en general, el determinante de una suma de matrices no coincide con la suma de los determinantes de cada una de ellas. Baste como ejemplo el siguiente:

$$-1 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

* * *

Aplicando repetidas veces las propiedades 1) y 2) de la definición de aplicación lineal entre espacios vectoriales se consigue demostrar que la imagen, mediante una aplicación lineal, de

una combinación lineal de vectores del espacio vectorial inicial es una combinación lineal de vectores del espacio vectorial final. De forma más precisa:

$$\left(\sum_{=1}^{n} \quad \vec{v} \right) = \sum_{=1}^{n} \qquad (\vec{v}\,)$$

donde $\in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in$ para todo $= 1, 2, ..., n$.

Otras propiedades que se deducen inmediatamente de la definición de aplicación lineal son las siguientes:

Proposición 5.1.2

Sea una aplicación lineal entre los espacios vectoriales y . Se tienen los siguientes resultados:

1) La imagen del elemento neutro de mediante es el elemento neutro de , es decir, $(\vec{0}) = \vec{0}$.
2) La imagen mediante del opuesto de un elemento $\vec{v}$ de es el opuesto de $(\vec{v})$, es decir, $(-\vec{v}) = -\ (\vec{v})$.

Demostración. Para demostrar 1) escribimos

$$(\vec{0}) = \ (\vec{0} + \vec{0}) = \ (\vec{0}) + \ (\vec{0})$$

y restamos $(\vec{0})$ en ambos lados. Para demostrar 2) basta observar que

$$(-\vec{v}) = \ ((-1)\vec{v}) = (-1)\ (\vec{v}) = -\ (\vec{v}).$$ ■

Un concepto importante es el de *n leo e na a li a i n lineal*; dada una aplicación lineal $: \rightarrow$, definimos el núcleo de , que se denota mediante Ker( ), como el conjunto de todos los $\vec{v} \in$ tal que $(\vec{v}) = \vec{0}$; es decir:

$$\text{Ker}(\ ) = \{\vec{v} \in \ : \ (\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Nota. En algunos textos se utiliza ( ) en lugar de Ker( ); la notación Ker( ) es la que se utiliza en toda la literatura matemática inglesa; esta notación viene de la palabra inglesa *er nel*, que significa «núcleo».

El subconjunto Ker( ) nunca es vacío, ya que $\vec{0} \in$ Ker( ); esto se deduce de que $(\vec{0}) = \vec{0}$, como se ha demostrado en la Proposición 5.1.2. El subconjunto Ker( ) es, además, un subconjunto distinguido de ; se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.1.3

Si $: \rightarrow$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, Ker( ) es un subespacio vectorial de .

Demostración. Si $\vec{}$ e $\vec{y}$ son elementos de Ker( ) se tiene que $(\vec{}) = \vec{0}$ y $(\vec{y}) = \vec{0}$; por tanto:

$$(\vec{} + \vec{y}) = \ (\vec{}) + \ (\vec{y}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

de donde deducimos que $\vec{} + \vec{y} \in \text{Ker}(\ )$. Si $\vec{} \in \text{Ker}(\ )$ y $\in \mathbb{K}$ se tiene que

$$(\vec{}) = \quad (\vec{}) = \quad \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

de donde se deduce que $\vec{} \in \text{Ker}(\ )$. Estos dos resultados prueban la proposición. ■

En la sección 1.3 demostramos que la imagen de una recta mediante una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es otra recta o un punto. Para aplicaciones lineales entre espacios vectoriales se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.1.4

Sea $: \rightarrow$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales. La imagen mediante de cualquier subespacio vectorial de es un subespacio vectorial de .

Demostración. Sea $_1$ un subespacio vectorial de y sea $_1 = (\ _1)$ la imagen de $_1$ mediante . Recordamos que

$$_1 = (\ _1) = \{ \ (\vec{v}_1) : \vec{v}_1 \in \ \}.$$

Sean $\vec{}_1$, $\vec{}'_1 \in \ _1$; existen, por tanto, dos vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}'_1 \in \ _1$ tal que $(\vec{v}_1) = \vec{}_1$ y $(\vec{v}'_1) = \vec{}'_1$. Entonces

$$\vec{}_1 + \vec{}'_1 = \ (\vec{v}_1) + \ (\vec{v}'_1) = \ (\vec{v}_1 + \vec{v}'_1)$$

y puesto que $\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 \in \ _1$, por ser $_1$ un subespacio vectorial de , se tiene que $\vec{}_1 + \vec{}'_1 \in \ _1$.

Tomemos ahora $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{}_1 \in \ _1$; existe $\vec{v}_1 \in \ _1$ tal que $(\vec{v}_1) = \vec{}_1$. Por tanto,

$$a\vec{}_1 = a \ (\vec{v}_1) = \ (a\vec{v}_1)$$

y puesto que $a\vec{v}_1 \in \ _1$, por ser $_1$ un subespacio vectorial de , se tiene que $a\vec{}_1 \in \ _1$.

Estos dos resultados son suficientes para probar que $_1$ es un subespacio vectorial de . ■

* * *

Si el subespacio $_1$ tiene $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ \}$ como base, todo elemento $\vec{}$ de $(\ _1)$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores $(\vec{v}_1)$, ..., $(\vec{v}\ )$. Esto es cierto ya que tomando $\vec{v} \in \ _1$ tal que $(\vec{v}) = \vec{}$ se tiene que

$$\vec{} = \ (\vec{v}) = \ \left(\sum_{=1} \ \vec{v} \right) = \sum_{=1} \ (\vec{v}\ ).$$

Por tanto, $_1$ coincide con el subespacio generado por los vectores $(\vec{v}_1)$, ..., $(\vec{v}\ )$, es decir, $_1 = L(\ (\vec{v}_1), ..., \ (\vec{v}\ ))$. En consecuencia, la dimensión de $_1$ no puede superar .

Hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 5.1.5

La imagen mediante una aplicación lineal de un subespacio vectorial de dimensión es un subespacio vectorial de dimensión no superior a .

Para finalizar esta sección demostramos que una aplicación lineal queda determinada cuando se conocen las imágenes de los elementos de una base del espacio inicial. El enunciado preciso de esta afirmación se da en el siguiente teorema:

Teorema 5.1.6

Sea $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de un espacio vectorial y sean $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n$ vectores cualesquiera de otro espacio vectorial . En estas condiciones, existe una única aplicación lineal de en tal que

$$(\vec{e}\,) = \vec{} \quad , \qquad = 1, 2, ..., n.$$

Demostración. Definimos de la siguiente manera: dado $\vec{v} \in$ podemos escribir $\vec{v} = \sum_{=1}^{n} v\,\vec{e}$ con $v \in \mathbb{K}$; entonces definimos

$$(\vec{v}) = \sum_{=1}^{n} v\,\vec{}\,.$$

A partir de aquí es un simple ejercicio comprobar que es la única aplicación lineal tal que $(\vec{e}\,) = \vec{}$, $= 1, 2, ..., n$. ■

5.2. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL. OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

En esta sección, y mientras no se indique lo contrario, y denotarán dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal de en .

Sea $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de y $\vec{} = \{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_m\}$ una base de . El elemento $(\vec{e}_1)$ es un vector de y, por tanto, podemos escribir

$$(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{}_1 + a_{21}\vec{}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{}_m.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{}_1 + a_{22}\vec{}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{}_m \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{}_1 + a_{2n}\vec{}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{}_m.
\end{aligned}$$

Estas igualdades se escriben abreviadamente de la forma

$$(\vec{e}\,) = \sum_{i=1}^{m} a_i\vec{}_i \quad , \qquad = 1, 2, ..., n.$$

En estas condiciones diremos que

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la *matri e la a li a i n on re e to a la ba e y* ¯.

Observar que la -ésima columna de la matriz de la aplicación lineal son las componentes de ($\vec{e}$) con respecto a la base ¯ de .

Para ser precisos sería necesario designar la matriz con un símbolo que incluyera las bases y ¯; este símbolo podría ser ( ). Nosotros preferimos denominar a la matriz con la misma letra que a la aplicación, siempre que esta economía en la notación no sea causa de incomprensión.

Dado ¯ ∈ , podemos escribir

$$\vec{} = \sum_{=1}^{n} \vec{e} \quad \text{e} \quad \vec{y} = (\vec{}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{}_i.$$

La relación entre las coordenadas y_i y viene dada por la matriz . En efecto, la igualdad

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \vec{}_i = (\vec{}) = \left(\sum_{=1}^{n} \vec{e} \right) = \sum_{=1}^{n} (\vec{e}) =$$

$$= \sum_{=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \vec{}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{=1}^{n} a_i \right) \vec{}_i$$

implica las siguientes igualdades:

$$y_i = \sum_{=1}^{n} a_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.1}$$

Con notación matricial, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

No solo toda aplicación lineal puede representarse mediante una matriz con respecto a dos bases dadas, sino que recíprocamente, *i a a ba e* $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ y ¯ $= \{\vec{}_1, ..., \vec{}_m\}$ *en lo e a io ini ial y inal, re e tivamente, y a a al ier matri e or en m × n*

$$= (a_i)_{\substack{i=1,...,m \\ =1,...,n}} \quad , \quad a_i \in \mathbb{K}$$

e i te na ni a a li a i n lineal e tiene a omo matri : si ¯ $= \sum_{=1}^{n} \vec{e}$ definimos

$$(\vec{}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{}_i$$

donde $y_1, y_2, ..., y_m$, están dados por las relaciones que aparecen en (2.1).

Nota. Si los espacios vectoriales y coinciden y en ambos se toma la misma base para representar una aplicación , su matriz se dice que está dada con respecto a la base .

EJEMPLO A. Sea $_{\alpha}$ la rotación o giro de ángulo α, en el plano, alrededor del origen en sentido positivo (contrario al giro de las agujas de un reloj). Se tiene que $_{\alpha}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que, referida a la base canónica del plano, $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, satisface

$$_{\alpha}(\vec{e}_1) = (\cos\alpha)\vec{e}_1 + (\operatorname{sen}\alpha)\vec{e}_2$$
$$_{\alpha}(\vec{e}_2) = (-\operatorname{sen}\alpha)\vec{e}_1 + (\cos\alpha)\vec{e}_2$$

(ver ejemplo B de la sección 4.3). Por tanto tiene como matriz

$$_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Si consideramos la base $' = \{\vec{}_1, \vec{}_2\}$ con $\vec{}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{}_2 = \vec{e}_1$, la rotación $_{\alpha}$ satisface

$$_{\alpha}(\vec{}_1) = \ _{\alpha}(\vec{e}_2) = (-\operatorname{sen}\alpha)\vec{e}_1 + (\cos\alpha)\vec{e}_2 = (-\operatorname{sen}\alpha)\vec{}_2 + (\cos\alpha)\vec{}_1$$
$$_{\alpha}(\vec{}_2) = \ _{\alpha}(\vec{e}_1) = (\cos\alpha)\vec{e}_1 + (\operatorname{sen}\alpha)\vec{e}_2 = (\cos\alpha)\vec{}_2 + (\operatorname{sen}\alpha)\vec{}_1.$$

Por tanto, la matriz de $_{\alpha}$ con respecto a la base $'$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$'_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

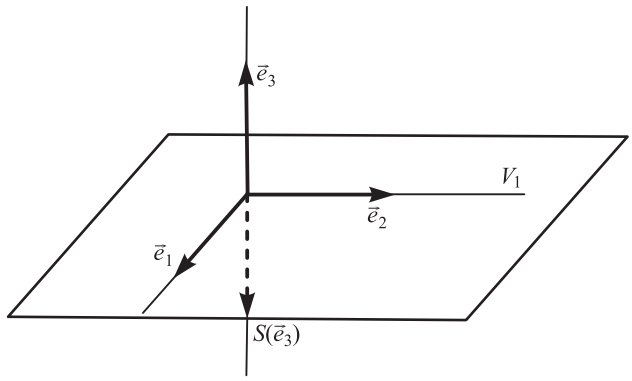
Observar que la matriz del cambio de base de la canónica a $'$ es

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $| \ | = -1$.

EJEMPLO B. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ consideramos una base $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el subespacio $_1 = \{(\ _1, \ _2, 0) : \ _1, \ _2 \in \mathbb{R}\}$. Si es la simetría con respecto al subespacio vectorial $_1$, se tiene que

$$(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad (\vec{e}_2) = \vec{e}_2, \quad (\vec{e}_3) = -\vec{e}_3.$$



i ra 5.1

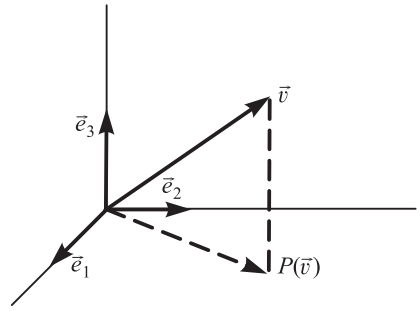
Por tanto, su matriz con respecto a la base es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observar que las simetrías pueden definirse con respecto a cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO C. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ consideramos la base canónica $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y sea la *roye i n ortogonal* sobre el plano $= 0$; es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ y puesto que

$$(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad (\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \quad \text{y} \quad (\vec{e}_3) = \vec{0},$$



i ra 5.2

su matriz con respecto a la base es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO D. Dados dos espacios vectoriales y , la *a li a i n n la* que envía todo vector de al elemento neutro de es una aplicación lineal, cuya matriz es la matriz nula con respecto a cualesquiera bases de y .

En un mismo espacio vectorial , la aplicación que lleva todo vector de en sí mismo se denomina *a li a i n i enti a* . Es fácil comprobar que, fijada una base de , la matriz de la aplicación identidad es

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

si el espacio vectorial tiene dimensión *n*.

EJEMPLO E. Sea *la* aplicación *eriva i n* del ejemplo C de la sección 5.1 y consideremos como una aplicación de $^{(n)}_{\mathbb{R}}[\ ]$ en $^{(n-1)}_{\mathbb{R}}[\ ]$. Sea $= \{1, , {}^2, ..., {}^n\}$ una base de $^{(n)}_{\mathbb{R}}[\ ]$ y $^- = \{1, , {}^2, ..., {}^{n-1}\}$ una base de $^{(n-1)}_{\mathbb{R}}[\ ]$. Tenemos

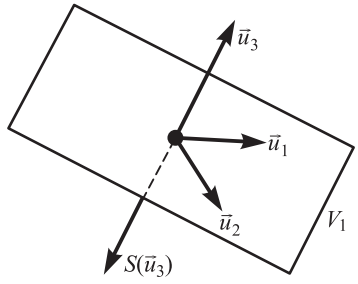
$$(1) = 0, \quad (\ ) = 1, \quad (\ {}^2) = 2\ , \quad (\ {}^3) = 3\ {}^2, ..., \quad (\ {}^n) = n\ {}^{n-1}.$$

Por tanto, la matriz de con respecto a las bases y ¯ es la matriz de orden $n \times (n+1)$ dada por

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO F. Tratamos de encontrar una base en $\mathbb{R}^3$ de manera que la matriz de la simetría con respecto al subespacio vectorial $_1 = \{(, y,) \in \mathbb{R}^3 : + y + = 0\}$ sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



i ra 5.3

En el ejemplo B se ha resuelto el caso en que el subespacio vectorial coincida con el plano $= 0$. Un estudio detallado del ejemplo citado nos da la idea adecuada para resolver el problema planteado aquí: basta tomar dos vectores cualesquiera de $_1$ que sean linealmente independientes y un tercero que sea perpendicular a $_1$. Por ejemplo,

$$\vec{}_1 = (1, -1, 0), \quad \vec{}_2 = (0, 1, -1), \quad \vec{}_3 = (1, 1, 1).$$

* * *

Ya hemos mencionado anteriormente que si en los espacios vectoriales y , de dimensión finita n y m, respectivamente, se fijan bases, existe una correspondencia biunívoca entre las aplicaciones lineales de en y el conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, de orden $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Puesto que el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ posee una estructura de espacio vectorial, no es de extrañar que en el conjunto de todas las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales puedan definirse dos operaciones que le den estructura de espacio vectorial.

Estas operaciones ya han sido definidas en la sección 1.3 cuando los espacios vectoriales son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Las operaciones que daremos aquí son una copia de aquellas.

Sean y dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$; el conjunto de todas las aplicaciones lineales de en se designará mediante el símbolo

$$L(,).$$

Si y son elementos de $L(\ ,\ )$, definimos su *ma* mediante

$$(\ +\ )(\vec{v}) = (\vec{v}) + (\vec{v}) \quad \text{para todo } \vec{v} \in .$$

Si es un elemento de $L(\ ,\ )$ y es un elemento de $\mathbb{K}$, definimos la *m lti li a i n e or* mediante

$$(\ \ )(\vec{v}) = (\ (\vec{v})) \quad \text{para todo } \vec{v} \in .$$

Las operaciones que acabamos de definir tienen ciertas propiedades que coinciden con las enumeradas para matrices en la sección 1.3. Una forma elegante y rápida de enumerar estas propiedades se da en el siguiente teorema:

Teorema 5.2.1

Sean y dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$; el conjunto $L(\ ,\ )$ de las aplicaciones lineales entre y , con las operaciones anteriormente definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

La demostración completa de este resultado se deja para el lector; nosotros observaremos que el elemento neutro de este espacio es la aplicación nula y el opuesto de una aplicación es la aplicación $-$ definida por

$$(-\ )(\vec{\ }) = -(\ (\vec{\ })).$$

Si y coinciden escribimos $L(\ )$ en lugar de $L(\ ,\ )$.

Puesto que toda aplicación lineal puede representarse mediante una matriz y recíprocamente, el siguiente resultado no debe extrañar al lector.

Teorema 5.2.2

Sean y espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente; entonces, el espacio vectorial $L(\ ,\ )$ tiene dimensión $n \times m$.

Demostración. Hemos de exhibir $n \times m$ elementos de $L(\ ,\ )$ que formen una base de este espacio. Fijadas

$$= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \quad \text{y} \quad \bar{\ } = \{\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }_m\}$$

bases de y , respectivamente, definimos, para $= 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$,

$$_i(\vec{e}\ ) = \begin{Bmatrix} \vec{\ }_i & \text{si} & = \\ \vec{0} & \text{si} & \neq \end{Bmatrix}, \qquad = 1, 2, ..., n.$$

Esta definición se simplifica, en cuanto a su notación, si utilizamos un símbolo denominado *elta e rone er*:

$$\delta \ = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si} & = \\ 0 & \text{si} & \neq \end{Bmatrix}, \qquad = 1,\ 2,\ ...,\ n, \qquad = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Entonces podemos escribir

$$_i(\vec{e}\ ) = \delta \ \vec{\ }_i \ , \qquad = 1, 2, ..., n.$$

Puesto que $_i$ ha sido definido para los elementos de una base de , determina una única aplicación lineal de en , que seguiremos denotando por $_i$; este resultado se ha demostrado en el Teorema 5.1.6.

Para finalizar la demostración del teorema es necesario probar que

$$= \{ \quad _i \}_{\substack{ = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, m}}$$

es una base de $L(\ ,\ )$. Sea

$$\sum_{ =1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i} \quad _i = 0$$

una combinación lineal nula de los elementos de (0 designa la aplicación nula de en); para todo $= 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{ =1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i} \quad _i(\vec{e}\ ) = \sum_{i=1}^{m} a_{i} \ \vec{} _i = \vec{0} \in \quad .$$

Puesto que $\bar{}$ es una base de se deduce que $a_{i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Esto prueba que es un conjunto de aplicaciones lineales linealmente independiente.

Falta probar que es un sistema de generadores de $L(\ ,\ )$. Sea $\in L(\ ,\ )$ y sea $= (a_i)$ su matriz con respecto a las bases y $\bar{}$; para todo $\vec{e} \in$ tenemos

$$(\vec{e}\ ) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ \vec{} _i = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad _i(\vec{e}\ ) = \sum_{i=1}^{m} \quad _i(a_i \ \vec{e}\ ).$$

Puesto que $_i(\vec{e}\ ) = \vec{0}$ si $\neq$, podemos escribir

$$(\vec{e}\ ) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{ =1}^{n} \quad _i(a_i \ \vec{e}\ ) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{ =1}^{n} a_i \quad _i(\vec{e}\ ).$$

De aquí se deduce que

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{ =1}^{n} a_i \quad _i$$

ya que ambas aplicaciones coinciden sobre los elementos de una base de .

Esto termina la demostración del Teorema 5.2.2. ■

Nota. Más adelante se dará otra demostración del Teorema 5.2.2 estableciendo una correspondencia biyectiva entre $L(\ ,\ )$ y $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ de manera que se conserve la dimensión. (Ver sección 5.4.)

* * *

Con la misma situación que al comienzo de esta sección, sean y $'$ dos aplicaciones lineales de en . Sean $(\ )$, $(\ ')$, $(\ + \ ')$ y $\_(\ )$ las matrices de las aplicaciones lineales $\ , \ ', \ + \ '$ y con respecto a las bases y $\bar{}$ de y , respectivamente. En estas condiciones se tiene que

$$(\ + \ ') = (\ ) + (\ ')$$

y

$$(\ ) = (\ ), \quad \in \mathbb{K}.$$

Estas igualdades expresan que la matriz de la aplicación lineal «suma» coincide con la suma de las matrices de cada una de las aplicaciones y que la matriz de la aplicación lineal coincide con el producto de la matriz por el escalar .

Las demostraciones de estos resultados son análogas a las realizadas en la sección 1.3 para aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y, por tanto, se dejan para el lector.

* * *

Con dos matrices se puede definir su producto siempre que concurran circunstancias favorables. El producto de matrices corresponde a la *om o i i n e a li a ione* lineales, que definimos a continuación.

Dadas $\in L(,)$ y $\in L(,)$ definimos la *om o i i n e y* mediante

$$(\circ)(\vec{v}) = ((\vec{v})).$$

Dadas las condiciones impuestas sobre y es fácil comprobar que $\circ \in L(,)$.

Proposición 5.2.3

Si los espacios vectoriales , y tienen dimensión finita y si denotamos por ( ), ( ) y ($\circ$) las matrices de , y $\circ$, respectivamente, con respecto a bases de antemano fijadas, se tiene

$$(\circ) = ( ) \cdot ( ).$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.3.4 para aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de la forma $\mathbb{R}^n$. La repetimos aquí para conveniencia del lector.

Sean $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\vec{\ }\}_{=1}^{m}$, $\{\vec{g}\}_{=1}$ bases de , y , respectivamente. La i-ésima columna de la matriz de $\circ$ son las componentes del vector ($\circ$)($\vec{e}_i$) con respecto a la base $\{\vec{g}\}_{=1}$; por tanto, si escribimos

$$= (a_i)_{\substack{=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}} \quad , \qquad = (b)_{\substack{=1,\dots, \\ =1,\dots,m}}$$

se tiene

$$\circ (\vec{e}_i) = ((\vec{e}_i)) = \left(\sum_{=1}^{m} a_i \vec{\ } \right) = \sum_{=1}^{m} a_i (\vec{\ }) =$$

$$= \sum_{=1}^{m} a_i \left(\sum_{=1} b \ \vec{g} \right) = \sum_{=1} \left(\sum_{=1}^{m} b \ a_i \right) \vec{g}$$

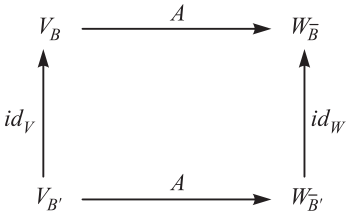
Esto prueba que $\sum_{=1}^{m} b \ a_i$ es el elemento que ocupa el lugar (, i) de la matriz ($\circ$); este valor coincide con el valor del elemento que ocupa el lugar (, i) en el producto de matrices ( ) · ( ). ■

5.3. APLICACIONES LINEALES Y CAMBIO DE BASE

Sean y dos espacios vectoriales, sobre el mismo cuerpo, de dimensiones n y m, respectivamente. Sea una aplicación lineal de en con matriz con respecto a las bases $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ y $\bar{\ } = \{\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }_m\}$ de y , respectivamente.

Deseamos conocer la matriz $'$ de la misma aplicación , con respecto a dos nuevas bases $' = \{\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n\}$ y $\bar{}' = \{\vec{}'_1, ..., \vec{}'_m\}$ de y , respectivamente.

En este razonamiento usaremos la notación para indicar que en el espacio vectorial estamos considerando la base .



i ra 5.4

En el diagrama de la Figura 5.4 se cumple

$$= i^{-1} \circ \circ i$$

donde i denota la aplicación identidad en el espacio vectorial . La Proposición 5.2.3 nos da la igualdad matricial

$$' = {}^{-1} . \quad . \tag{3.1}$$

donde es la matriz del cambio de base de $\bar{}$ a $\bar{}'$ y es la matriz del cambio de base de a $'$.

La fórmula (3.1) nos permite calcular la matriz $'$ de la aplicación con respecto a las bases $'$ y $\bar{}'$, conocida la matriz de la misma aplicación con respecto a las bases y $\bar{}$ y las matrices y del cambio de base de a $'$ y de $\bar{}$ a $\bar{}'$, respectivamente.

En muchos casos los espacios inicial y final de una aplicación coinciden. Si, además, y $\bar{}$ coinciden y $'$ y $\bar{}'$ coinciden la fórmula del cambio de base es más sencilla.

Si es la matriz de la aplicación $\in L( )$ con respecto a una base de , la matriz $'$ de la misma aplicación con respecto a una base $'$ de está dada por

$$' = {}^{-1} \tag{3.2}$$

donde es la matriz del cambio de base de a $'$.

Observar que, en este caso, $|'| = | |$, ya que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de ellas.

EJEMPLO A. Una aplicación lineal tiene, en una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de un espacio vectorial de dimensión 2, la matriz

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Queremos determinar la matriz de esta aplicación lineal en la base $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Puesto que la matriz del cambio de base es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz $'$ de esta aplicación en la base $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ es

$$' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO B. Sea $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por

$$(_1, \ _2, \ _3) = (_1 + \ _2, \ _3, \ _2 - \ _3)$$

donde $(_1, \ _2, \ _3)$ son las coordenadas de un vector $^{\rightarrow} \in \mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Sea $'$ la base $\{\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ que se ha obtenido permutando los elementos de la base canónica.

Puesto que la matriz de en la base canónica es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y la matriz del cambio de base es

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

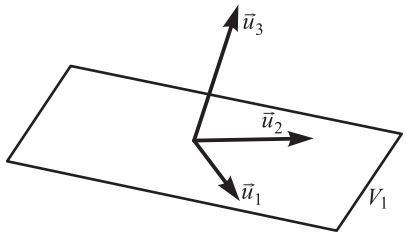
la matriz $'$ de en la base $'$ es

$$' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

* * *

EJEMPLO C. Queremos encontrar las ecuaciones de la simetría con respecto al subespacio vectorial $_1 = \{(, y, \ )\} : \ - y + 2 \ = 0\}$, referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La estrategia consiste en encontrar en primer lugar una base de $\mathbb{R}^3$ en la cual la matriz de la simetría sea lo más sencilla posible y a continuación realizar un cambio de base para pasarla a la base canónica.



i ra 5.5

En la base $B' = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 2, 1), \vec{v}_3 = (1, -1, 2)\}$ determinada por dos vectores de B_1 y un vector, $\vec{v}_3$, perpendicular a él, la matriz A' de f es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ y $f(\vec{v}_3) = -\vec{v}_3$. Puesto que la matriz del cambio de base de la base canónica a B' es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A' = M^{-1} A M \quad \Leftrightarrow \quad A = M A' M^{-1}.$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así pues,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \right)$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ respecto a la base canónica.

EJERCICIOS (Secciones 5.1, 5.2 y 5.3)

1. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

   a) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   b) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = A + B$ con $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ fija.

   c) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   d) $f : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}$ dada por $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ donde $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) : A = A^t\}$.

e) $: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dada por $(\ ) = \ ^t$.

f) $: \ ^{(n)}_{\mathbb{C}}[\ ] \to \ ^{(n)}_{\mathbb{C}}[\ ]$ dada por $(\ (\ )) = (\ + 1)$.

g) $: \ ^{(n)}_{\mathbb{C}}[\ ] \to \ ^{(n)}_{\mathbb{C}}[\ ]$ dada por $(\ (\ )) = (\ ) + 1$.

2. Sea $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(\ _1, \ _2, \ _3) = (\ _1 + \ _2, \ _3, \ _1 + \ _3)$. Encontrar la matriz de con respecto a la base canónica. Hallar la imagen mediante de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

a) $\ _1 = \{(\ _1, \ _2, \ _3) \in \mathbb{R}^3 : \ _1 + \ _2 + \ _3 = 0\}$.

b) $\ _2 = \{(\ _1, \ _2, 0) : \ _1, \ _2 \in \mathbb{R}\}$.

c) $\ _3 = \{(\ _1, \ _2, \ _3) = t(1, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$.

En cada caso indicar la dimensión del subespacio y la dimensión de su imagen mediante .

3. Encontrar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales con respecto a las bases canónicas de los espacios vectoriales dados:

a) y del ejercicio 1.

b) $: \ ^{(2)}_{\mathbb{R}}[\ ] \to \mathbb{R}^4$ dada por $(\ (\ )) = (\ (0), \ (1), \ (2), \ (3))$.

c) $: \ ^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ] \to \ ^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ]$ dada por $(\ (\ )) = (\ + 1)$.

4. Respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

a) Giro de α grados con respecto al eje .

b) Simetría con respecto a la recta $= 0, y = 0$.

c) Simetría con respecto a la recta $= y, \ = 0$.

d) Proyección sobre el plano $- y + \ = 0$.

e) Simetría con respecto a la recta $(\ , y, \ ) = t(1, 1, 1)$.

5. La *traza* de una matriz cuadrada se define como la suma de los elementos de su diagonal principal y se designa por traza( ). Demostrar que la aplicación $: \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dada por $(\ ) =$ traza( ) es lineal. Dar una base de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y encontrar la matriz de con respecto a esta base y a la base canónica de $\mathbb{K}$.

6. Dadas $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $(\ _1, \ _2, \ _3) = (\ _2, \ _3, 0)$ y $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(\ _1, \ _2, \ _3) = (\ _1 + \ _3, \ _2)$ calcular $^n = \underbrace{\circ \cdots \circ}_{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\circ$. [*geren ia*: encontrar las matrices de y .]

7. Sabiendo que la aplicación lleva los vectores

$$\vec{}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{}_2 = (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad \vec{}_3 = (1, 1, 1)$$

de $\mathbb{R}^3$ en los vectores

$$\vec{}_1 = (2, 1, 2), \quad \vec{}_2 = (3, 1, 2) \quad \text{y} \quad \vec{}_3 = (6, 2, 3)$$

respectivamente, encontrar la matriz de en las siguientes bases:

a) La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) La base $\{\vec{}_1 \ \vec{}_2, \vec{}_3\}$.

8. Encontrar las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales realizando cambios de base adecuados:

   a) Simetría con respecto a la recta $(\ , y, \ ) = t(1, 1, 1)$.

   b) Proyección ortogonal sobre el plano $\ - y + \ = 0$.

   c) Giro de 90^o con respecto a la recta $\ + y = 0, \ = 0$.

9. Sea $\ : \overset{(3)}{\mathbb{R}}[\ ] \to \overset{(3)}{\mathbb{R}}[\ ]$ tal que $\ (1) = \ ^2 + 1, \ (\ ) = - \ , \ (\ ^2) = \ ^3$ y $\ (\ ^3) = \ ^2 + \ - 1$. Calcular $\ (\ ^2 + 2 \ + 1)$ y $\ ((\ - 2)^2 + \ ^3)$. Encontrar la matriz de $\ $ con respecto a la base $\{1, \ , \ ^2, \ ^3\}$ de $\overset{(3)}{\mathbb{R}}[\ ]$.

10. Sea $\ \in L(\ , \ )$; si $\ _1$ es un subespacio vectorial de $\ $, la aplicación $\ $ puede considerarse como una aplicación lineal de $\ _1$ en $\ $; esta aplicación recibe el nombre de *re tri i n e a* $\ _1$, y se designa con el símbolo $\ |_{\ _1}$. En los siguientes casos encontrar una base del subespacio vectorial dado y la matriz de la aplicación dada restringida a este subespacio con respecto a esta base:

   a) $\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\ (\ _1, \ \ _2, \ \ _3) = (\ _1 + \ \ _2, \ \ _2 + \ \ _3)$ con $\ _1 = \{(\ _1, \ \ _2, \ \ _3) : \ _1 - 2 \ _2 + 3 \ _3 = 0\}$.

   b) $\ : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ dada por $\ (\ _1, \ \ _2) = (\ _1 + \ \ _2, i \ _2, i \ _1)$ con $\ _1 = \{(\ _1, \ \ _2) : \ _1 = i \ _2\}$.

11. Dada $\ \in L(\ )$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, demostrar que el conjunto

$$(\lambda) = \{\vec{\ } \in \ : \ (\vec{\ }) = \lambda \vec{\ }\}$$

es un subespacio vectorial de $\ $. En los siguientes casos encontrar una base de $\ (\lambda)$:

   a) $\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\ (\ _1, \ \ _2, \ \ _3) = (-2 \ _1, - \ \ _2, - \ _1 + \ \ _3), \quad \lambda = -1$.

   b) $\ : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$(\ _1, \ \ _2, \ \ _3, \ \ _4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \\ \ _4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda = 2; \lambda = 1.$$

   c) $\ : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada por $\ (\ _1, \ \ _2, \ \ _3) = (2 \ _1 + \ \ _3, - \ \ _2, -3 \ _1 - \ \ _3); \lambda = e^{\frac{\pi}{3} i}$.

12. Sea $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden n con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. Definimos

$$\ : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

mediante $\ (\ ) = \dfrac{1}{2}(\ \ + \ \ ^t)$.

   a) Encontrar una base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

   b) Encontrar la matriz de $\ $ con respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ y a la base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ encontrada en a).

13. Sea $\ $ una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$; demostrar que $\ $ transforma subespacios vectoriales $\ $-dimensionales de $\mathbb{R}^n$ en subespacios vectoriales l-dimensionales de $\mathbb{R}^m$, con $l \leqslant \ $.

En las siguientes aplicaciones lineales hallar la imagen de los subespacios vectoriales dados:

a) $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(\ _1,\ _2) = (\ _1 + \ _2,\ _1,\ _2)$ y $= \{(\ _1,\ _2) : \ _1 = \ _2\}$.

b) $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $= \{(\ _1,\ _2,\ _3) : \ _1 - 2\ _2 + \ _3 = 0\}$.

14. Sea el espacio vectorial de las funciones reales de variable real generado por sen y cos . Calcular el determinante de la aplicación «derivación» definida en .

5.4. APLICACIONES LINEALES INYECTIVAS Y SUPRAYECTIVAS. NÚCLEO Y RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean y dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal de en . Recordamos que es *inye tiva* si $(\vec{\ }) = (\vec{y})$ implica $\vec{\ } = \vec{y}$; la aplicación es *raye tiva* si para todo $\vec{y}$ en existe $\vec{\ } \in$ tal que $(\vec{\ }) = \vec{y}$ o equivalentemente $(\ ) = $, donde $(\ )$ denota la imagen de mediante ; finalmente, recordamos que es *biye tiva* si es a la vez inyectiva y suprayectiva.

En el caso de aplicaciones *lineale* cada uno de los tipos anteriores recibe un nombre especial: una aplicación lineal *inye tiva* recibe el nombre de *monomor i mo*; si la aplicación lineal es *raye tiva* se le da el nombre de *e imor i mo*; finalmente, si la aplicación lineal es *biye ti va* se dice que es un *i omor i mo*.

El objetivo de esta sección es encontrar condiciones sencillas que sirvan para determinar si una aplicación lineal es de cualquiera de los tipos anteriores.

Comenzamos con las aplicaciones lineales inyectivas. En este caso jugará un papel importante el concepto de núcleo que se definió en la sección 5.1. Recordar que el núcleo de una aplicación lineal: $: \to$ se define como

$$\mathrm{Ker}(\ ) = \{\vec{v} \in \ : \ (\vec{v}) = \vec{0}\}$$

y que $\mathrm{Ker}(\ )$ es un subespacio vectorial de (Proposición 5.1.3).

Proposición 5.4.1

Una aplicación lineal $: \to$ es inyectiva si y solo si $\mathrm{Ker}(\ ) = \{\vec{0}\}$.

Demostración. Supongamos que es inyectiva; si $\vec{\ } \in \mathrm{Ker}(\ )$ se tiene $(\vec{\ }) = \vec{0}$; puesto que es lineal, $(\vec{0}) = \vec{0}$, y, por tanto, podemos escribir

$$(\vec{\ }) = \vec{0} = (\vec{0}).$$

Puesto que es inyectiva, $\vec{x} = \vec{0}$; esto prueba que

$$\mathrm{Ker}(\ ) = \{\vec{0}\}.$$

Supongamos ahora que $\mathrm{Ker}(\ ) = \{\vec{0}\}$ y probemos que es inyectiva. Si $(\vec{x}) = (\vec{y})$, se tiene que

$$(\vec{x} - \vec{y}) = (\vec{x}) - (\vec{y}) = \vec{0};$$

por tanto, $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(\ )$; como $\mathrm{Ker}(\ ) = \{\vec{0}\}$ deducimos que $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, o equivalentemente $\vec{x} = \vec{y}$, que era lo que deseábamos demostrar. ■

EJEMPLO A. Para estudiar si $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1)$ es una aplicación lineal inyectiva hemos de encontrar $\mathrm{Ker}(\ )$. Si $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(\ )$ hemos de tener $(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$; esta igualdad se transforma en

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas. Puesto que la matriz de sus coeficientes tiene rango 2, que coincide con el número de incógnitas, la única solución posible es la trivial $x_1 = x_2 = 0$. Por tanto, $\mathrm{Ker}(\ ) = \{(0, 0)\}$ y es inyectiva.

EJEMPLO B. Tratemos de encontrar el núcleo de la aplicación $: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se trata, por tanto, de encontrar todos los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tales que

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

El rango de la matriz de los coeficientes de este sistema es 2 (observar que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras). Utilizando las dos primeras ecuaciones e introduciendo los parámetros $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$, $x_5 = x_3$ tenemos que

$$x_2 = x_2 - x_3$$

y

$$x_1 = -(x_2 - x_3) - x_1 - x_2 - x_3 = -x_1 - 2x_2.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (-x_1 - 2x_2, x_2 - x_3, x_1, x_2, x_3) = \\ &= x_1(-1, 0, 1, 0, 0) + x_2(-2, 1, 0, 1, 0) + x_3(0, -1, 0, 0, 1),\end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas de Ker( ). Observar que el núcleo de esta aplicación tiene dimensión 3.

* * *

Supongamos ahora que la aplicación lineal es suprayectiva, es decir, que es un epimorfismo; en estas condiciones se ha de cumplir que ( ) = , donde ( ) es la imagen de mediante la aplicación .

El conjunto ( ) recibe el nombre de *imagen e* , y se designará, de ahora en adelante, mediante Img( ). Por tanto, es suprayectiva si y solo si

$$\text{Img}(\ ) = \ .$$

Por la Proposición 5.1.4 sabemos que la imagen de cualquier subespacio vectorial de es un subespacio vectorial de ; en particular, Img( ), que es la imagen de mediante , es un *be a io ve torial e* .

EJEMPLO C. Queremos encontrar la imagen de la aplicación del ejemplo B y decidir si es suprayectiva. La estrategia más sencilla es observar que la imagen de una base cualquiera de $\mathbb{R}^5$ es un sistema de generadores de Img( ). En efecto, si $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$ y $\vec{\ } \in \text{Img}(\ )$ existe $\vec{v} = \sum_{=1}^{5} v\,\vec{e} \in \mathbb{R}^5$ tal que $(\vec{v}) = \vec{\ }$; así pues,

$$\vec{\ } = \left(\sum_{=1}^{5} v\,\vec{e} \right) = \sum_{=1}^{5} v \quad (\vec{e}\,)$$

con lo cual queda probado el resultado. (Relacionado con este resultado, ver el ejercicio 9 al final de esta sección.) Por tanto,

$$(\vec{e}_1) = (1, 0, 1), \quad (\vec{e}_2) = (1, 1, 0), \quad (\vec{e}_3) = (1, 0, 1),$$
$$(\vec{e}_4) = (1, -1, 2), \quad (\vec{e}_5) = (1, 1, 0)$$

son un sistema de generadores de Img( ); de este sistema de generadores es necesario extraer el mayor número de ellos linealmente independientes, y así podremos encontrar una base de Img( ). Puesto que la matriz que tiene a estos vectores por columnas es y ya sabemos que tiene rango 2, solamente es posible encontrar dos vectores linealmente independientes. Podemos tomar

$$\text{Img}(\ ) = L((1, 0, 1), (1, 1, 0)).$$

Debido a que Img( ) tiene *imen i n* 2, llegamos a la conclusión de que no es suprayectiva.

Si queremos encontrar las ecuaciones cartesianas de Img( ) hemos de eliminar los parámetros $_1$ y $_2$ de las ecuaciones

$$(y_1, y_2, y_3) = \ _1(1, 0, 1) + \ _2(1, 1, 0).$$

Así pues,

$$\left.\begin{array}{rl} _1 + \ _2 &= y_1 \\ \ _2 &= y_2 \\ _1 &= y_3 \end{array}\right\}.$$

De aquí deducimos $y_2 + y_3 = y_1$ sin más que sustituir las dos últimas ecuaciones en la primera.

* * *

En los ejemplos B y C se observa la siguiente relación entre las dimensiones del núcleo de y de su imagen:

$$\dim(\mathrm{Ker}(\ )) + \dim(\mathrm{Img}(\ ))$$

coincide con la dimensión del espacio inicial de .

Este resultado es cierto en un contexto más general; lo enunciaremos y demostraremos a continuación. Después obtendremos algunas de sus consecuencias relacionadas con las aplicaciones lineales inyectivas y suprayectivas.

Teorema 5.4.2

Sean y dos espacios vectoriales de los cuales es de dimensión finita y sea : → una aplicación lineal. Entonces,

$$\dim(\mathrm{Ker}(\ )) + \dim(\mathrm{Img}(\ )) = \dim(\ ).$$

Demostración. Sea = $\dim(\mathrm{Ker}(\ ))$ y $n = \dim(\ )$. Elegimos una base $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ \}$ de Ker( ) y la completamos con vectores $\vec{v}_{\ +1}, ..., \vec{v}_n$ hasta obtener una base de . Es suficiente probar que = $\{\ (\vec{v}_{\ +1}), ..., \ (\vec{v}_n)\}$ es una base de Img( ), ya que entonces

$$\dim(\mathrm{Ker}(\ )) + \dim(\mathrm{Img}(\ )) = \ + (n - \ ) = n = \dim(\ ).$$

Probamos en primer lugar que es un sistema de generadores de Img( ); si $\bar{\ } \in \mathrm{Img}(\ )$, elegimos $\vec{v} \in$ tal que $(\vec{v}) = \bar{\ }$; puesto que

$$\vec{v} = \sum_{=1}^{n} \ \vec{v}$$

se tiene que

$$\bar{\ } = \ (\vec{v}) = \ \left(\sum_{=1}^{n} \ \vec{v} \right) = \sum_{=1}^{n} \ (\vec{v}\ ).$$

Debido a que $\vec{v}_1, ..., \vec{v}\ $ son elementos de Ker( ) se tiene que $(\vec{v}\ ) = \vec{0}$ si $1 \leqslant \ \leqslant$; por tanto,

$$\bar{\ } = \sum_{= \ +1}^{n} \ (\vec{v}\ )$$

y queda probado que es un sistema de generadores de Img( ).

Finalmente, probamos que los elementos de son linealmente independientes. Supongamos que tenemos una relación de la forma

$$\sum_{= \ +1}^{n} \ (\vec{v}\ ) = \vec{0}. \tag{4.1}$$

Utilizando la linealidad de , la igualdad anterior se escribe de la forma

$$\left(\sum_{=\ +1}^{n} \quad \vec{v} \right) = \vec{0}.$$

Esto implica que el vector $\sum_{=\ +1}^{n} \quad \vec{v} \in \mathrm{Ker}(\ )$. Puesto que Ker( ) está generado por los vectores $\vec{v}_1, ..., \vec{v}$ podemos escribir

$$_{+1}\vec{v}_{\ +1} + \cdots + \ _n\vec{v}_n = \ _1\vec{v}_1 + \cdots + \quad \vec{v}\ .$$

Puesto que $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ es una base de la igualdad anterior solamente es posible si $_1 = \cdots = \ = \ _{+1} = \cdots = \ _n = 0$. En particular, la igualdad (4.1) solamente es cierta cuando todos los son nulos. Se termina así la demostración del teorema. ■

Para deducir algunos corolarios de este teorema es necesario hacer uso del concepto de rango de una matriz estudiado en los Capítulos 1 y 2.

Sea una aplicación lineal entre los espacios vectoriales y , ambos de dimensión finita *n* y *m*, respectivamente. Sea la matriz de la aplicación lineal en dos bases cualesquiera de y ; para encontrar el núcleo de es necesario resolver el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} _1 \\ \vdots \\ _n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $_1, ..., \ _n$ son las coordenadas de un vector de con respecto a la base elegida. Debido a la Proposición 1.2.6 este sistema posee $n - r(\ )$ soluciones linealmente independientes que generan todas las restantes, donde $r(\ )$ denota el rango de la matriz .

Podemos, por tanto, concluir que

$$\dim(\mathrm{Ker}(\ )) = \dim(\ ) - r(\ ).$$

Comparando esta igualdad con la del Teorema 5.4.2 se deduce que

$$\dim(\mathrm{Img}(\ )) = r(\ ).$$

Puesto que Img( ) no depende de las bases que se elijan en y para encontrar su matriz, de la igualdad anterior se deduce que todas las matrices de la aplicación tienen el mismo rango. Podemos, por tanto, definir el *rango e na a li a i n lineal* , que seguiremos escribiendo mediante $r(\ )$, como el rango de una cualquiera de sus representaciones matriciales.

Una vez hechos estos comentarios el lector no tendrá ninguna dificultad en demostrar los siguientes resultados:

Corolario 5.4.3

Sean y espacios vectoriales de dimensión finita y : → una aplicación lineal. Entonces:

a) es inyectiva si y solo si $r(\ ) = \dim(\ )$.
b) es suprayectiva si y solo si $r(\ ) = \dim(\ )$.

EJEMPLO D. Supongamos que y son espacios vectoriales de dimensión finita y : → una aplicación lineal.

Si es *inye tiva*, Ker( ) = $\{\vec{0}\}$ y, por tanto, dim( ) = dim(Img( )); como Img( ) es un subespacio vectorial de concluimos que

$$\dim(\ ) \leqslant \dim(\ ).$$

Si es *raye tiva*, del Teorema 5.4.2 se deduce que

$$\dim(\ ) \geqslant \dim(\text{Img}(\ )) = r(\ ) = \dim(\ ).$$

En particular, una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ *no* puede ser inyectiva y una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ *no* puede ser suprayectiva.

* * *

Para terminar esta sección estudiamos las aplicaciones lineales *biye tiva* o *i omor i mo* entre espacios vectoriales. Supongamos que y son espacios vectoriales de dimensión finita, y que es un isomorfismo entre ellos. Del corolario anterior deducimos que

$$\dim(\ ) = r(\ ) = \dim(\ ).$$

Otras consecuencias sencillas de algunos resultados anteriores se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 5.4.4

Sean y espacios vectoriales de dimensión finita n y sea : → una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) es biyectiva.
b) es inyectiva.
c) Ker( ) = $\{\vec{0}\}$.
d) es suprayectiva.
e) El rango de es n.

Demostración. Entre b), c), d) y e) se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\text{Prop. 5.4.1}}{} & \\ \text{b)} & \Leftrightarrow & \text{c)} \\ \Big\updownarrow{\scriptstyle \text{Cor. 5.4.3}} & & \\ \text{e)} & \underset{\text{Cor. 5.4.3}}{\Leftrightarrow} & \text{d)} \end{array}$$

Por tanto, todas ellas son equivalentes entre sí.

Finalmente, a) ⇒ b), ya que toda aplicación biyectiva es inyectiva y puesto que b) y d) son equivalentes en este contexto y ambas implican a) se tiene que a) y b) son equivalentes. Esto termina la demostración. ■

Diremos que dos espacios vectoriales cualesquiera son *i omor o* si podemos encontrar un isomorfismo entre ellos. Para que esto ocurra entre espacios vectoriales de dimensión finita ya sabemos que ambos han de ser de la misma dimensión. El recíproco también es cierto.

Teorema 5.4.5

Dado cualquier número natural n, todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre un mismo cuerpo son isomorfos.

Demostración. Sean y espacios vectoriales de dimensión n sobre el mismo cuerpo y sean $= \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ y $\bar{} = \{\bar{}_1, ..., \bar{}_n\}$ bases de y , respectivamente.

Para definir un isomorfismo entre y basta definirlo sobre los elementos de la base . Pongamos

$$(\vec{v}\,) = \bar{}, \quad = 1, 2, ..., n.$$

Por el Teorema 5.1.6, se extiende a una aplicación lineal de en . Puesto que $r(\ ) = n$, ya que $\bar{}$ es una base de , del teorema anterior deducimos que es un isomorfismo. ■

EJEMPLO E

1) Todos los espacios vectoriales *reale* de dimensión n son isomorfos a $\mathbb{R}^n$ y todos los espacios vectoriales *om le o* de dimensión n son isomorfos a $\mathbb{C}^n$. En general, todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ son isomorfos a $\mathbb{K}^n$.
2) Los espacios vectoriales $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\overset{(3)}{\mathbb{R}}[\ ]$ y $\mathbb{R}^4$ son isomorfos entre sí.

EJEMPLO F. Sean y espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente, sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Deseamos probar que los espacios vectoriales

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad \text{y} \quad L(\ ,\ )$$

son isomorfos. Puesto que es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ y es isomorfo a $\mathbb{K}^m$ es suficiente con encontrar un isomorfismo entre

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad \text{y} \quad L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

(ver el ejercicio 10 al final de esta sección). La elección más natural de este isomorfismo es la siguiente: dada $\in \mathcal{M}_{m\times n}$ definimos

$$(\ ): \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ dada por } (\ )(\bar{}) = \cdot \bar{},$$

para todo $\bar{} \in \mathbb{K}^n$. Observar que $(\ )$ es la aplicación que tiene como matriz en las bases canónicas de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ y, por tanto, $(\ ) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Es necesario probar que es un isomorfismo; como es claramente una aplicación lineal, hemos de probar que es biyectiva. Comenzamos encontrando su núcleo: si $(\ ) = 0$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} {}^1 \\ \vdots \\ {}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

para todo $\bar{} = (\ {}_1, ..., \ {}_n) \in \mathbb{K}^n$; eligiendo $\bar{} = \bar{e}$ para $= 1, 2, ..., n$, deducimos que $a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., m$; por tanto, coincide con la matriz cero, que es por tanto el único elemento del núcleo de .

Finalmente, hemos de probar que es suprayectiva; dada una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ con matriz $(\ )$ con respecto a las bases canónicas, basta observar que

$$(\ (\ )) = \ .$$

Puesto que los espacios $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $L(\ ,\ )$ son isomorfos y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tiene dimensión $m \times n$ deducimos que

$$\dim(L(\ ,\ )) = \dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = m \times n$$

Hemos dado otra demostración del Teorema 5.2.2.

* * *

Observación. Supongamos que es un isomorfismo entre dos espacios vectoriales y de dimensión n; debido al Teorema 5.4.4 su rango es n y, por tanto, la matriz ( ) de en cualesquiera bases de y es *invertible*. La inversa de ( ) es la matriz de la aplicación inversa de , es decir

$$(\ )^{-1} = \ (\ ^{-1}).$$

EJERCICIOS 5.4

1. Dadas las siguientes aplicaciones lineales encontrar las ecuaciones paramétricas del núcleo y la imagen comprobando en cada caso la ecuación

   $$\dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Img}) = \text{dimensión del espacio inicial},$$

   e indicar si son inyectivas o suprayectivas:

   a) $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(\ _1,\ _2,\ _3) = (\ _1 + \ _3,\ _2,\ _1 + \ _2 + \ _3)$.

   b) $: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $(\ _1,\ _2) = (i\ _1 + \ _2,\ _1 + i\ _2)$.

   c) $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $(\ _1,\ _2) = (\ _1,\ _1 + \ _2, 2\ _1,\ _1 + 2\ _2)$.

   d) $: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que tiene como matriz

   $$= \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \mathrm{i} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Describir el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales, indicando si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas:

   a) $: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ tal que ( ) = con

   $$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   b) $: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que ( ) = − con

   $$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) $: {}^{(3)}_{\mathbb{R}}[\ ] \to {}^{(3)}_{\mathbb{R}}[\ ]$ tal que $(1) = \ ^2 + 1$, $(\ ) = \ + 2$, $(\ ^2) = \ ^3 - \ $, $(\ ^3) = 1$.

   d) La aplicación derivación de ${}^{(n)}_{\mathbb{R}}[\ ]$ en ${}^{(n-1)}_{\mathbb{R}}[\ ]$.

3. Describir el núcleo y la imagen de la aplicación lineal *tra a* e indicar las dimensiones de cada uno de ellos. (La definición de la aplicación *tra a* se ha dado en el ejercicio 5 de la sección anterior.)

4. Dada $\in L(\ ,\ )$, demostrar los siguientes resultados:
   a) $^2 = \ \circ\ = 0$ si y solo si $\mathrm{Img}(\ ) \subset \mathrm{Ker}(\ )$.
   b) $\mathrm{Ker}(\ ) \subset \mathrm{Ker}(\ ^2) \subset \mathrm{Ker}(\ ^3) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(\ ^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(\ ^n) \subset \cdots$
   c) $\mathrm{Img}(\ ) \supset \mathrm{Img}(\ ^2) \supset \mathrm{Img}(\ ^3) \supset \cdots \supset \mathrm{Img}(\ ^{n-1}) \supset \mathrm{Img}(\ ^n) \supset \cdots$

5. Construir aplicaciones que sean isomorfismos entre los siguientes pares de espacios vectoriales:
   a) $\mathbb{C}^5$ y $\mathbb{R}^{10}$.
   b) $^{(n)}_{\mathbb{C}}[\ ]$ y $\mathbb{C}^{n+1}$.
   c) $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^6$.

6. Sea $: \to$ una aplicación lineal y $_1$ un subespacio vectorial de ; denotaremos por $|_{_1}$, la restricción de a $_1$. Demostrar que:
   a) $\mathrm{Ker}(\ |_{_1}) = (\mathrm{Ker}(\ )) \cap\ _1$.
   b) $\mathrm{Img}\ = \mathrm{Img}(\ |_{_1})$ si $_1 + \mathrm{Ker}(\ ) =\ .$

7. Sean $\in L(\ ,\ )$ y $\in L(\ ,\ )$.
   a) Demostrar que $\mathrm{Img}(\ \circ\ ) \subset \mathrm{Img}(\ )$ y que $\mathrm{Ker}(\ \circ\ ) \supset \mathrm{Ker}(\ )$.
   b) Demostrar que $r(\ \circ\ ) \leqslant r(\ )$ y $r(\ \circ\ ) \leqslant r(\ )$.

8. Sea un espacio vectorial de dimensión n y un espacio vectorial arbitrario. Dados dos subespacios vectoriales $_1$ de y $_1$ de tal que
$$\dim\ _1 + \dim\ _1 = n$$
   demostrar que existe una aplicación lineal $:\ \to$ tal que $\mathrm{Ker}(\ ) =\ _1$ e $\mathrm{Img}(\ ) =\ _1$.

9. Sea un isomorfismo de los espacios vectoriales y , ambos de dimensión finita. Demostrar que toda base de se transforma en una base de .

10. Sean y espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m respectivamente. Demostrar que $L(\ ,\ )$ es isomorfo a $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

En los siguientes problemas y son espacios vectoriales de dimensión finita.

11. Sea $\in L(\ ,\ )$ una aplicación lineal inyectiva; demostrar que toda base de se transforma mediante en un conjunto de vectores linealmente independientes. Deducir de este resultado que si existe una aplicación lineal inyectiva entre dos espacios vectoriales y de dimensión finita, se ha de tener $\dim(\ ) \leqslant \dim(\ )$ (ver ejemplo D).

12. Sea $' \in L(\ ,\ )$ una aplicación lineal suprayectiva; demostrar que toda base de se transforma mediante $'$ en un sistema de generadores de . Deducir de este resultado que si existe una aplicación lineal suprayectiva entre dos espacios vectoriales y de dimensión finita, se ha de tener $\dim(\ ) \geqslant \dim(\ )$ (ver ejemplo D).

13. Dar un ejemplo de espacios vectoriales y y aplicaciones lineales y $' \in L(\ ,\ )$ y una base de tal que:
   a) sea inyectiva y $(\ )$ no sea base de .
   b) $'$ sea suprayectiva y $'(\ )$ no sea base de . (Ver los ejercicios 11 y 12.)

14. Sea un isomorfismo de en .

a) Demostrar que toda base de se transforma en una base de mediante .

b) Demostrar que toda base de se transforma en una base de mediante $^{-1}$.

Deducir de a) o de b) que si y son isomorfos, dim = dim .

5.5. EL ESPACIO DUAL DE UN ESPACIO VECTORIAL

Dado un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, podemos considerar el conjunto $L(\ ,\mathbb{K})$ de todas las aplicaciones lineales de en el espacio vectorial $\mathbb{K}$. Obsérvese que $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{K}$.

Este espacio ha sido estudiado con mayor generalidad en la sección 5.2. En particular, el Teorema 5.2.1 nos permite concluir que $L(\ ,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Este espacio vectorial recibe el nombre de *e a io al* del espacio vectorial y se utiliza comúnmente el símbolo

en lugar de $L(\ ,\mathbb{K})$, para indicarlo. Por tanto, es el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de en $\mathbb{K}$.

Los elementos de son aplicaciones lineales y, por tanto, se indicarán con letras mayúsculas. Algunos autores prefieren utilizar letras minúsculas seguidas de un * en la parte superior derecha, tal como v , e , etc. La primera de estas notaciones será la que se utilice en el teorema que se enuncia en esta sección.

Si es un espacio vectorial de dimensión finita n, del Teorema 5.2.2 se deduce que el espacio dual tiene dimensión n. El siguiente teorema exhibe una base asociada de manera única y natural a una base fijada de . Obsérvese que la demostración de un teorema más general, que incluye a este, se ha dado en la sección 5.2 (Teorema 5.2.2): incluimos la demostración porque este caso particular puede servir para aclarar el caso más general anteriormente descrito.

Teorema 5.5.1

Sea un espacio vectorial de dimensión finita n y $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de . Existe una única base

$$= \{ _1, \ _2, ..., \ _n\}$$

de tal que $_i(\vec{e}_i) = 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, y $(\vec{e}_i) = 0$ si $i \neq$. La base se denomina *ba e al e* .

Nota. La propiedad de enunciada en el teorema se escribe más fácilmente utilizando el símbolo denominado *elta* (δ) *e rone er* que se ha introducido en la demostración del Teorema 5.2.2. Recordemos que $\delta_{i,\ }$, $i \in \mathbb{N}$, es un número definido como sigue:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = \\ 0 & \text{si} \quad i \neq \end{cases} .$$

Con esta notación los elementos de la base dual de satisfacen

$$(\vec{e}_i) = \delta_{i;} \quad , i = 1, 2, ..., n.$$

Demostración. Para $=1, 2, ..., n$ definimos de la siguiente manera: dado $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} v\,\vec{e} \in$ tomamos

$$(\vec{v}) = v$$

es decir, la -ésima coordenada de $\vec{v}$ en la base .

Es fácil comprobar que $\in$ para todo $= 1, ..., n$, y que satisface la propiedad requerida en el teorema.

Únicamente falta demostrar que $= \{ _1, _2, ..., _n\}$ es una base de *. Si tenemos una igualdad de la forma

$$\sum_{=1}^{n} = 0$$

donde 0 representa la aplicación lineal nula, se tiene que

$$\sum_{=1}^{n} (\vec{e}_i) = \vec{0}$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$. Por tanto, $_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, ya que $(\vec{e}_i)$ es no nulo solamente si $= i$. Esto prueba que es un conjunto de aplicaciones lineales linealmente independientes.

Finalmente, dada $\in$ se tiene que

$$= \sum_{=1}^{n} (\vec{e})$$

ya que si $\vec{v} = \sum_{=1}^{n} v\,\vec{e}$ tenemos que

$$\sum_{=1}^{n} (\vec{e})\ (\vec{v}) = \sum_{=1}^{n} (\vec{e})v = \sum_{=1}^{n} (v\,\vec{e}) = \left(\sum_{=1}^{n} v\,\vec{e}\right) = (\vec{v}).$$

Por tanto, es un sistema de generadores de y queda demostrado el teorema. ■

EJEMPLO A. Tratemos de encontrar la base dual de la base canónica $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. La aplicación lineal $_1$ satisface

$$_1(\vec{e}_1) = 1, \quad _1(\vec{e}_2) = 0, \quad _1(\vec{e}_3) = 0.$$

Por tanto, $_1(_1, _2, _3) = _1(_1\vec{e}_1 + _2\vec{e}_2 + _3\vec{e}_3) = _1$.

De manera similar se concluye que

$$_2(_1, _2, _3) = _2 \quad \text{y} \quad _3(_1, _2, _3) = _3.$$

EJEMPLO B. Sea $= \{\vec{}_1 = (1, 1, 0), \vec{}_2 = (0, 1, 1), \vec{}_3 = (1, 0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$; queremos encontrar la base dual, , de . Denotemos por U_1, U_2, U_3 los elementos de . Por definición de tenemos que

$$U_1(\vec{}_1) = 1, \quad U_1(\vec{}_2) = 0, \quad U_1(\vec{}_3) = 0.$$

Por tanto,

$$U_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 1, \quad U_1(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 0, \quad U_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 0.$$

Debido a la linealidad de U_1 tenemos que

$$\left.\begin{array}{rrr} U_1(\vec{e}_1) + U_1(\vec{e}_2) & & = 1 \\ & U_1(\vec{e}_2) + U_1(\vec{e}_3) & = 0 \\ U_1(\vec{e}_1) & + U_1(\vec{e}_3) & = 0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$U_1(\vec{e}_1) = U_1(\vec{e}_2) = \frac{1}{2}, \quad U_1(\vec{e}_3) = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$U_1(\ _1,\ _2,\ _3) = \frac{1}{2}\ _1 + \frac{1}{2}\ _2 - \frac{1}{2}\ _3.$$

De manera similar se obtienen los otros dos elementos de la base :

$$U_2(\ _1,\ _2,\ _3) = -\frac{1}{2}\ _1 + \frac{1}{2}\ _2 + \frac{1}{2}\ _3$$

$$U_3(\ _1,\ _2,\ _3) = \frac{1}{2}\ _1 - \frac{1}{2}\ _2 + \frac{1}{2}\ _3.$$

* * *

EJERCICIOS 5.5

1. Encontrar la base dual de $= \{\vec{}_1 = (1, 2, 1), \vec{}_2 = (0, 1, 1), \vec{}_3 = (1, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

2. Encontrar la base dual de $= \{1, \ + 1, \ ^2 - 2, \ ^3 - \ ^2\}$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^{(3)}[\ ]$ de todos los polinomios de grado no superior a 3.

3. Sea $= \mathbb{R}^3$ y la base canónica de . Se consideran las aplicaciones lineales

$$_1(\ _1,\ _2,\ _3) = \ _1 + \ _2 + \ _3, \qquad _2(\ _1,\ _2,\ _3) = \ _2, \qquad _3(\ _1,\ _2,\ _3) = \ _1 + \ _2.$$

   i) Demostrar que $\{\ _1,\ _2,\ _3\}$ es una base de *.
   ii) Calcular las coordenadas de $_1$, $_2$, y $_3$ respecto de la base *, dual de .
   iii) Hallar la base de respecto de la cual $\{\ _1,\ _2,\ _3\}$ es base dual.

4. En $\mathbb{R}^{(2)}[\ ]$ consideramos las aplicaciones lineales dadas por:

$$^0(\ (\ )) = \ (0), \qquad ^1(\ (\ )) = \ '(0), \qquad ^2(\ (\ )) = \ ''(0),$$

   para cada $(\ ) \in \mathbb{R}^{(2)}[\ ]$.
   i) Comprobar que $\{\ ^0,\ ^1,\ ^2\}$ es base del espacio dual de $\mathbb{R}^{(2)}[\ ]$.
   ii) Calcular la base de $\mathbb{R}^{(2)}[\ ]$ de la cual $\{\ ^0,\ ^1,\ ^2\}$ es dual.

Capítulo 6

Valores y vectores propios. Forma de Jordan.

6.1. Introducción.

6.2. Subespacios invariantes. Valores y vectores propios de una aplicación lineal.

6.3. Forma de Jordan de matrices de orden 2.

6.4. Ejemplos de formas de Jordan de matrices de orden 3.

6.5. El polinomio característico.

6.6. Aplicaciones lineales y subespacios invariantes.

6.7. El Teorema de Jordan.

6.8. Obtención de la forma de Jordan compleja de una matriz.

6.9. Forma de Jordan real de matrices reales con autovalores complejos.

6.1. INTRODUCCIÓN

En el ejemplo A de la sección 5.3 se demostró que si la aplicación lineal A tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto a una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, la misma aplicación A con respecto a la base $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ tiene como matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos, pues, que $A' = C^{-1}AC$ o equivalentemente $A = CA'C^{-1}$, donde C es la matriz del cambio de base.

La matriz de la aplicación lineal A en la base $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ es mucho más sencilla que la correspondiente en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. La matriz A' es diagonal. A la vista de este ejemplo podemos preguntarnos si, dada una aplicación lineal A, siempre puede encontrarse un cambio de base de manera que la matriz de A con respecto a la nueva base sea diagonal.

Un ejemplo muy sencillo nos hace perder la esperanza de resolver afirmativamente esta pregunta: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no puede diagonalizarse.

En efecto, supongamos que existe una matriz $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de cambio de base, con determinante $|C| \neq 0$, tal que

$$C^{-1}AC = A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Tenemos, pues, que

$$A = C\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|C|} =$$
$$= \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} ad\alpha - bc\beta & -ab\alpha + ab\beta \\ cd\alpha - cd\beta & -bc\alpha + ad\beta \end{pmatrix}.$$

Comparando la primera y la última de estas matrices se tiene:

$$1 = \frac{1}{|C|}(ad\alpha - bc\beta) \tag{1.1}$$

$$0 = \frac{1}{|C|}cd(\alpha - \beta) \tag{1.2}$$

$$1 = \frac{1}{|C|}\, ab(-\alpha + \beta) \tag{1.3}$$

$$1 = \frac{1}{|C|}\,(-bc\alpha + ad\beta). \tag{1.4}$$

De (1.2) se deduce que o bien $c = 0$, o bien $d = 0$, o bien $\alpha = \beta$. Si $c = 0$, de (1.1) y (1.4) se deduce que $\alpha = |C|/ad = \beta$, y sustituyendo esto en (1.3) se obtiene la contradicción $1 = 0$. Si $d = 0$ se obtiene la misma contradicción mediante un razonamiento semejante. Finalmente, si $\alpha = \beta$, (1.3) es claramente una contradicción.

A pesar de que no todas las matrices son diagonalizables, el objetivo de este capítulo es encontrar la forma «más sencilla» en la que una matriz dada puede transformarse mediante un cambio de base; esta forma «más sencilla» se denominará *matriz de Jordan* de la matriz dada. (El nombre se debe al matemático Camille Jordan —Lión, 1838-Milán, 1922—, que ayudó a comprender la clasificación de las aplicaciones lineales.)

No solo puede utilizarse la forma de Jordan de una matriz para clasificar las aplicaciones lineales en un espacio vectorial, sino que podemos utilizarla para realizar operaciones con matrices. Como ilustración tratemos de encontrar la sexta potencia de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Debido al ejemplo A de la sección 5.3 podemos escribir:

$$A = C\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}C^{-1} \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A^6 = \left[C\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}C^{-1}\right]^6 = C\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^6 C^{-1} = C\begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix}C^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^6 & 2\cdot 3^6 \\ 2^7 & 3^7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3\cdot 2^6 + 4\cdot 3^6 & 2^7 - 2\cdot 3^6 \\ -3\cdot 2^7 + 2\cdot 3^7 & 2^8 - 3^7 \end{pmatrix}.$$

6.2. SUBESPACIOS INVARIANTES. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dado un espacio vectorial V y una aplicación lineal A: $V \to V$, es decir, $A \in L(V)$, un subespacio vectorial W de V se llama *invariante* respecto a A si $A(W) \subset W$, es decir, la imagen $A(\vec{x})$ de todo vector $\vec{x} \in W$ es un elemento de W.

EJEMPLO A. Sea $A \in L(\mathbb{R}^2)$ una aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $W_1 = \{x_1\vec{e}_1 : x_1 \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{x_2\vec{e}_2 : x_2 \in \mathbb{R}\}$ son invariantes respecto de A. En efecto,

$$A(x_1\vec{e}_1) = x_1A(\vec{e}_1) = x_1(2\vec{e}_1) = (2x_1)\vec{e}_1 \in W_1$$

y

$$A(x_2\vec{e}_2) = x_2A(\vec{e}_2) = x_2\vec{e}_2 \in W_2.$$

EJEMPLO B. Sea R_α una rotación de ángulo $\alpha \neq 0$ en $\mathbb{R}^3$ con respecto al eje OZ. Geométricamente se observa que el plano XOY y la recta OZ son invariantes con respecto a esta aplicación. Para comprobar algebraicamente que el plano XOY es invariante observar que la matriz de R_α con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ es un elemento del plano XOY se tiene que

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\operatorname{sen}\alpha \\ x_1\operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$R_\alpha(\vec{x}) = (x_1\cos\alpha - x_2\operatorname{sen}\alpha)\vec{e}_1 + (x_1\operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha)\vec{e}_2$$

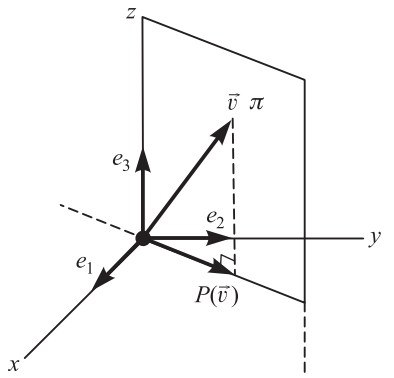
que es de nuevo un elemento del plano XOY.

EJEMPLO C. Sea P la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XOY; todo plano π que contiene al eje OZ es invariante. En efecto, como la matriz de P es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica, y los elementos de π son de la forma $\vec{v} = x_1(\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2) + x_3\vec{e}_3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$P(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



i ra 6.1

El elemento $x_1(\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2)$ es de nuevo un elemento del plano π. Otros subespacios invariantes de esta proyección ortogonal son el plano *XOY*, el eje *OZ* y cualquier recta del plano *XOY* que pase por el origen de coordenadas.

* * *

Para cualquier aplicación lineal $A \in L(V)$ el subespacio $E = \{\vec{0}\}$, formado solo por el elemento nulo, es invariante ya que $A(\vec{0}) = \vec{0}$ y el propio espacio vectorial V es también invariante.

Proposición 6.2.1

La intersección y la suma de subespacios invariantes respecto de una aplicación lineal $A \in L(V)$ son subespacios invariantes respecto de A.

Demostración. Sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de V que son invariantes respecto de A; si $\vec{x} \in W_1 \cap W_2$ se tiene que $\vec{x} \in W_1$ y $\vec{x} \in W_2$; como W_1 y W_2 son invariantes tenemos que $A(\vec{x}) \in W_1$ y $A(\vec{x}) \in W_2$; así pues, $A(\vec{x}) \in W_1 \cap W_2$. Esto prueba que $W_1 \cap W_2$ es invariante.

Sea ahora $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W_1 + W_2$; como A es lineal y W_1, W_2 son invariantes respecto de A, se tiene que

$$A(\vec{x}) = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\vec{x}_1) + A(\vec{x}_2) \in W_1 + W_2,$$

con lo que se demuestra que $W_1 + W_2$ es también invariante. El razonamiento es similar si se consideran más de dos subespacios vectoriales. ■

Si W es un subespacio vectorial de V de dimensión 1, y es invariante respecto de una aplicación lineal $A \in L(V)$ tenemos que si $\vec{x} \in W$, no nulo, $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$; si $\vec{y}$ es otro vector de W, $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ con $\alpha \in \mathbb{K}$; así pues,

$$A(\vec{y}) = A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x}) = \alpha(\lambda\vec{x}) = \lambda(\alpha\vec{x}) = \lambda\vec{y}$$

y, por tanto, satisface la misma ecuación que $\vec{x}$.

Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición 6.2.2 (alores ectores propios)

Un vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ se llama *vector propio* o *autovector* de una aplicación lineal $A \in L(V)$ si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$; este escalar λ se denomina *valor propio* o *autovalor* de la aplicación A correspondiente al vector $\vec{x}$.

ota Observar que, por el razonamiento realizado antes de la Definición 6.2.2, si $\vec{x}$ es un vector propio de A con autovalor λ, todo elemento no nulo del subespacio unodimensional generado por $\vec{x}$ es un autovector de A con el mismo autovalor λ.

Supongamos que una aplicación lineal A en un espacio V de dimensión n tiene n vectores propios linealmente independientes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, respectivamente; tomando$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ como una base de V se tiene que

$$A(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1, A(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_2, ..., A(\vec{e}_n) = \lambda_n\vec{e}_n$$

y, por tanto, la matriz de A con respecto a esta base es la matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, toda aplicación lineal que tiene una matriz diagonal en una cierta base tiene a los elementos de esta base como vectores propios. Si decimos que una aplicación lineal $A \in L(V)$ es *diagonalizable* si existe una base de V en la cual la matriz de A es diagonal, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 6.2.3

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación lineal $A \in L(V)$ es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si y solo si existe una base de V formada por vectores propios.

Definición 6.2.4

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se dice **diagonalizable** sobre $\mathbb{K}$ si la aplicación lineal A: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ que la tiene como matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$.

De esta definición se deduce que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, con determinante no nulo, tal que $A' = C^{-1}AC$ es una matriz diagonal.

EJEMPLO D. *Demostrar que* $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ *e* $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ *son vectores propios de la aplicación lineal A de matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y encontrar sus autovalores. ¿Es esta matriz diagonalizable sobre* $\mathbb{R}$*?*

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

se tiene que $A(\vec{x}) = 2\vec{x}$, $A(\vec{y}) = 3\vec{y}$, con lo que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son vectores propios de A con valores propios 2 y 3, respectivamente. Como $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$ ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0,$$

la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y su matriz diagonal asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

* * *

A continuación mostramos cómo se calculan autovalores y autovectores de una aplicación lineal.

Supongamos que $\vec{x}$ es un vector propio de una aplicación lineal A en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor, es decir, $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de V y $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Si $A = (a_{ij})_{i,\, j = 1,\, ...,\, n}$ es la matriz de A con respecto a esta base tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda x_j \vec{e}_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = \lambda\vec{x} = A(\vec{x}) = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j A(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\vec{e}_i.$$

Puesto que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de V hemos de tener

$$\left.\begin{array}{rrrr} (a_{11} - \lambda)x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + & (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \cdots + & (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

Puesto que (2.1) es un sistema homogéneo, para que posea una solución no nula se ha de tener que el determinante de la matriz de sus coeficientes sea nulo, esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = |A-\lambda I| = 0, \tag{2.2}$$

donde I denota la matriz identidad. La igualdad (2.2) es una ecuación en λ de grado n y sus soluciones en $\mathbb{K}$ son los autovalores de A.

A partir de ahora restringiremos nuestra atención a espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$.

Si V es un espacio vectorial complejo, la ecuación (2.2) tiene n soluciones complejas contando cada una con su multiplicidad, debido al teorema fundamental del álgebra (ver sección 3.4). Si V es un espacio vectorial real no podemos asegurar que la ecuación (2.2) tenga n soluciones reales.

Ejemplo E. *Determinar los valores y vectores propios de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que tiene como matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios se determinan resolviendo la ecuación

$$0 = |A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

Sus raíces son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ y, por tanto, estos son los autovalores de A. El subespacio invariante correspondiente a $\lambda_1 = 6$ satisface las ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{o equivalentemente} \quad (A-6I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

esto es:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, $-5x_1 + 2x_2 = 0$ (la otra ecuación es combinación lineal de ésta). Así pues los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 6$ son de la forma $\alpha(2, 5)$. Para $\lambda_2 = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto, $2x_1 + 2x_2 = 0$; así pues, los vectores propios correspondientes a $\lambda_2 = -1$ son de la forma $\beta(1, -1)$.

Como (2, 5) y (1, -1) forman una base de $\mathbb{R}^2$ la Proposición 6.2.3 nos permite deducir que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, con matriz diagonal $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y el cambio de base viene dado por la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

* * *

El polinomio (2.2) se denomina *polinomio característico* de la aplicación A o de la matriz A. Para poder hablar propiamente de «polinomio característico» es necesario demostrar que el polinomio (2.2) no depende de la base elegida en V para escribir su matriz. Para demostrar esto, sea $p_B(\lambda) = |A - \lambda I|$ el polinomio característico de la aplicación A en la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ y sea $p_{B'}(\lambda) = |A' - \lambda I|$ el polinomio característico de A en la base $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n\}$; si C es la matriz del cambio de base de B a B' sabemos que $A' = C^{-1}AC$ y, por tanto,

$$p_{B'}(\lambda) = |A' - \lambda I| = |C^{-1}AC - \lambda I| = |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda IC| =$$
$$= |C^{-1}||A - \lambda I||C| = |A - \lambda I| = p_B(\lambda).$$

Esto prueba que el polinomio característico no depende de la base elegida en V para representar A.

* * *

A continuación realizamos más ejemplos de cálculo de autovalores y autovectores.

EJEMPLO F. La rotación R_α de ángulo α en el plano tiene como matriz

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (ver ejemplo A de la sección 5.2).

Sus autovalores son las soluciones de la ecuación

$$0 = |R_\alpha - \lambda I| = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha =$$
$$= \lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1.$$

Sus soluciones son $\lambda_1 = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, $\lambda_2 = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$. Estas soluciones son números complejos excepto si $\alpha = 2k\pi$ ó $\alpha = (2k + 1)\pi$ con k un número entero, en cuyo caso los valores propios son reales. Si $\alpha = 2k\pi$ se tiene que

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la aplicación identidad; en este caso todo vector de $\mathbb{R}^2$ es un vector propio con valor propio 1. Si $\alpha = (2k + 1)\pi$ se tiene que

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta es la matriz de una simetría respecto al origen de coordenadas; sus vectores propios se determinan de la ecuación $(R_\alpha - (-1)I)(\vec{x}) = \vec{0}$, esto es, $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$; por tanto, todos los vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios de esta simetría; su autovalor es -1.

EJEMPLO G. La rotación R_α de ángulo α, en el espacio, alrededor del eje OZ tiene como matriz

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1),$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$, $\lambda_3 = \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha$. Los vectores propios para $\lambda_1 = 1$ son las soluciones en $\mathbb{R}^3$ de las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

esto es:

$$\left.\begin{aligned} (\cos\alpha - 1)x_1 - (\operatorname{sen}\alpha)x_2 = 0 \\ (\operatorname{sen}\alpha)x_1 + (\cos\alpha - 1)x_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.3}$$

Puesto que

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha = 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

el sistema (2.3) tiene únicamente la solución $x_1 = x_2 = 0$ si $\alpha \neq 2k\pi$ con k entero. En este caso los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 1$ son de la forma $(0, 0, x_3)$.

Si $\alpha = 2k\pi$ se trata de la aplicación identidad y en este caso todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ son invariantes. Si $\alpha = (2k + 1)\pi$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ y sus vectores propios son todos los del plano XOY; en este caso tenemos una simetría con respecto al eje OZ.

* * *

La Proposición 6.2.3 nos da una condición necesaria y suficiente para saber cuándo una aplicación lineal es diagonalizable sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, a saber, que exista una base del espacio vectorial V formada por vectores propios; en algunos casos puede resultar laborioso encontrar esta base. Una condición que es suficiente para poder asegurar la diagonalización de una matriz está contenida en la proposición siguiente:

Proposición 6.2.5

Los vectores propios de una aplicación lineal A correspondientes a valores propios distintos dos a dos son linealmente independientes. En particular, si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y A: $V \to V$ tiene n valores propios distintos dos a dos, la aplicación A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$.

Nota. Daremos dos demostraciones de esta proposición; una de ellas a continuación y la otra al final de esta sección.

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción según el número de autovalores. Si solo hay un autovalor λ_1 y $\vec{x}_1$ es uno de sus autovectores, $\vec{x}_1$ es linealmente independiente puesto que $\vec{x}_1 \neq 0$ por definición de vector propio.

Supongamos que existen dos autovalores λ_1, λ_2 con vectores propios $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, respectivamente, y que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Si $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ fueran linealmente dependientes podríamos encontrar α_1, α_2 no nulos a la vez, tal que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0}. \tag{2.4}$$

Aplicando A a ambos miembros de (2.4) tenemos

$$\alpha_1 A(\vec{x}_1) + \alpha_2 A(\vec{x}_2) = \alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \tag{2.5}$$

y multiplicando (2.4) por λ_2 tenemos

$$\alpha_1\lambda_2\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}. \tag{2.6}$$

Restando (2.6) de (2.5) obtenemos $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$; como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, hemos de tener $\alpha_1 = 0$; sustituyendo α_1 en (2.4) obtenemos $\alpha_2 = 0$, lo cual es una contradicción.

Para demostrar la proposición por inducción supongamos que es válida para cualesquiera $k - 1$ valores propios y que tenemos k valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos con vectores propios $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$, respectivamente. Supongamos que tenemos una combinación lineal de la forma

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}. \tag{2.7}$$

Aplicando A a ambos miembros de (2.7) tenemos

$$A\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A(\vec{x}_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\lambda_j\vec{x}_j = \vec{0}. \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.7) por λ_k tenemos

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\lambda_k\vec{x}_j = \vec{0}. \tag{2.9}$$

Restando (2.9) de (2.8) obtenemos

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_k)\vec{x}_j = \vec{0}.$$

Puesto que los λ_j son distintos dos a dos, la hipótesis de inducción nos permite concluir que α_1, α_2, ..., α_{k-1} son cero; sustituyendo en (2.7) se obtiene $\alpha_k = 0$ y, por tanto, $\{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k\}$ son linealmente independientes. ■

EJEMPLO H. Estudiaremos si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Su polinomio característico es

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

con lo que sus valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$; sean $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vectores propios correspondientes a λ_1, λ_2 y λ_3, respectivamente; como los autovalores son distintos dos a dos, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ son linealmente independientes; por estar en un espacio de dimensión 3 forman una base y por la Proposición 6.2.5 la matriz A es diagonalizable.

* * *

Observación. Una matriz A puede ser diagonalizable y tener autovalores múltiples, por ejemplo, la matriz identidad es diagonalizable y tiene como único autovalor 1.

Ejemplo I. Tratemos de encontrar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}^3$.

Su polinomio característico es

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(a-\lambda)(-\lambda) = (a-\lambda)\lambda^2.$$

Los autovalores de A son $\lambda = a$ (simple) y $\lambda = 0$ (doble). Si $a = 0$, A es la matriz nula, que es diagonal y, por tanto, diagonalizable.

Si $a \neq 0$, hemos de estudiar si existe una base de autovectores para poder utilizar la Proposición 6.2.3.

Los autovectores correspondientes a $\lambda = a$ satisfacen:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} ax_1 = 0 \\ ax_1 - ax_3 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_3 = 0;$$

por tanto, son de la forma

$$\vec{x} = (0, x_2, 0), \quad x_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Los autovectores correspondientes a $\lambda = 0$ satisfacen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} ax_2 = 0 \\ ax_1 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 0;$$

por tanto, son de la forma

$$\vec{y} = (0, 0, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Con los vectores que aparecen en (2.10) y (2.11) no puede obtenerse una base de $\mathbb{R}^3$ y, en consecuencia, la matriz A no es diagonalizable si $a \neq 0$.

En resumen, la matriz A es diagonalizable si $a = 0$ y no es diagonalizable si $a \neq 0$.

* * *

Sea $A \in L(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea λ_0 un autovalor de A, con $\lambda_0 \in \mathbb{K}$. Denominamos *subespacio propio correspondiente a* λ_0 al subconjunto

$$E(\lambda_0) = \text{Ker}\,(A - \lambda_0 I).$$

Observar que $E(\lambda_0)$ contiene todos los vectores propios correspondientes al valor propio λ_0 junto con el vector $\vec{0}$.

Puesto que el núcleo de cualquier aplicación lineal es un subespacio vectorial de V, tenemos que $E(\lambda_0)$ es un subespacio vectorial de V. Además, de los resultados de la sección 5.4 se deduce que

$$\begin{aligned}\dim\,(E(\lambda_0)) &= \dim\ \text{Ker}\,(A - \lambda_0 I)) = \dim\,(V) - \dim\,(\text{Img}\,(A - \lambda_0 I)) = \\ &= \dim\,(V) - r(A - \lambda_0 I).\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo queda como ejercicio para el lector.

EJEMPLO J. *Encontrar los subespacios propios de la aplicación lineal* $A \in L(\mathbb{R}^3)$, *que tiene como matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

* * *

El siguiente ejemplo sirve para mostrar que una matriz con elementos reales puede *no* ser diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y, sin embargo, ser diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

EJEMPLO K. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, ya que sus autovalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, que son distintos (ver Proposición 6.2.5). Sin embargo, el lector puede comprobar directamente que la matriz A *no* es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

* * *

Demostración alternativa de la ro osición .2. . Supongamos que $A \in L(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión n, y sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de V. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ autovalores de A distintos dos a dos y sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ autovectores correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, respectivamente.

Para demostrar que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ son linealmente independientes hemos de demostrar que una relación de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}, \quad \alpha_i \in \mathbb{K} \tag{2.12}$$

implica $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Aplicando A a ambos miembros de la igualdad (2.12) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}. \tag{2.13}$$

De manera similar se obtienen las relaciones

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 \vec{v}_i = \vec{0}, \quad ..., \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{n-1} \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Escribiendo $\vec{v}_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} \vec{e}_k$, las relaciones anteriores implican

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ik} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_{ik} = 0, \quad ..., \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{n-1} v_{ik} = 0,$$

para todo $k = 1, 2, ..., n$. Para cada $k = 1, 2, ..., n$, las igualdades anteriores determinan un sistema de ecuaciones lineales y homogéneo en las incógnitas $(\alpha_1 v_{1k}, ..., \alpha_n v_{nk})$. Puesto que la matriz de los coeficientes de este sistema es

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

su determinante es el determinante de Vandermonde y, por tanto,

$$|A_n| = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_k - \lambda_j)$$

(ver la sección 2.3). Puesto que los λ_j son distintos dos a dos, $|A_n| \neq 0$, y, por tanto, el sistema anterior solo tiene la solución trivial. Así pues, $\alpha_i v_{ik} = 0$ para todo $k = 1, 2, ..., n$. De aquí deducimos que

$$\alpha_i \vec{v}_i = \alpha_i \sum_{k=1}^{n} v_{ik} \vec{e}_k = \vec{0}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Puesto que los $\vec{v}_i$ son no nulos, ya que son autovectores, concluimos que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Esto prueba que los autovectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ son linealmente independientes, que era lo que queríamos demostrar. ■

EJERCICIOS 6.2

1. Hallar los autovalores reales y autovectores de $\mathbb{R}^n$ de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. En los casos del ejercicio anterior en los que sea posible, hallar una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores, y la matriz, en esa base, de la aplicación dada.

3. Demostrar que el subespacio generado por los vectores $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ y $\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$ es invariante mediante la aplicación que en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Encontrar los autovalores reales y autovectores correspondientes de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que están dadas por las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Decir cuáles de las siguientes matrices pueden reducirse a una matriz diagonal y encontrar una matriz de cambio de base P:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Encontrar los autovalores reales y autovectores de la aplicación derivación, D, en $P^{(3)}_{\mathbb{R}}[x]$.

7. Determinar para qué valores de a, $b \in \mathbb{R}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

8. Estudiar para qué valores reales de α la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix},$$

probar que A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ para todo $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; probar que también es diagonalizable para $a = 1$ y que no lo es para $a = 0$.

10. Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

11. Sea $A \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que existe una base de $\mathbb{R}^2$ en la que su matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es simétrica. Probar que los autovalores de A son reales y distintos, a menos que $a = c$ y $b = 0$, en cuyo caso $A = aI$ y a es el único autovalor. Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en la base canónica.

12. Sea $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, la matriz de una aplicación lineal S en la base canónica. Hallar los autovectores y autovalores de S. ¿Existe alguna interpretación geométrica de la aplicación S?

13. Sea $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha$, la matriz de $P \in L(\mathbb{R}^2)$ en la base canónica. Hallar los autovalores y autovectores de P. ¿Existe alguna interpretación geométrica de la aplicación P?

14. Si A es una matriz triangular de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos diferentes, probar que A es diagonalizable.

15. Sea A una aplicación lineal en $\mathbb{R}^n$ con n autovalores reales distintos. Sea B cualquier aplicación lineal en $\mathbb{R}^n$ que conmute con A. Demostrar que B es diagonalizable en la misma base que A. Concluir que todo autovector de A es un autovector de B.

16. Dada una suma directa $V = W \oplus Z$ podemos definir la aplicación lineal E en V como $E(\vec{v}) = \vec{z}$ si $\vec{v} = \vec{w} + \vec{z}$ con $\vec{w} \in W$, $\vec{z} \in Z$; equivalentemente $E(\vec{v}) \in Z$ y $(I - E)(\vec{v}) \in W$.

a) Probar que $E^2 = E$, $W = \mathrm{Ker}\,(E)$ y $Z = \mathrm{Img}\,(E)$.

b) Encontrar los autovalores de la aplicación E.

6.3. Forma de Jordan de matrices de orden 2

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, diremos que son *equivalentes* si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertible, llamada *matriz de cambio*, tal que $B = P^{-1}AP$.

Según el diagrama de la figura 5.4 y la fórmula (3.1) de la sección 5.3 esto corresponde a considerar A y B como las matrices de una misma aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$ en dos bases distintas, mientras que P es la matriz del cambio de base. Esto justifica que P sea llamada *matriz de cambio*.

La matriz «más sencilla» equivalente a una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se llama *forma de Jordan* de A y se suele representar por J (ó J_A cuando sea necesario indicar A). Se tendrá por tanto $J = P^{-1}AP$ o equivalentemente

$$A = PJP^{-1}.$$

Ya hemos observado en la sección 6.1 que la «matriz más sencilla» equivalente a una dada no es siempre una matriz diagonal.

En esta sección mostraremos cómo se halla la forma de Jordan sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, así como una matriz de cambio. Hay importantes diferencias según $\mathbb{K}$ sea $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

* * *

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|,$$

con lo que $p_A(\lambda) = 0$ es una ecuación de segundo grado en la variable λ.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tenemos dos casos diferentes:

Las raíces del polinomio característico son distintas.
Las dos raíces del polinomio característico coinciden.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tenemos tres casos diferentes:

Las dos raíces del polinomio característico están en $\mathbb{R}$ y son distintas.
Las dos raíces del polinomio característico coinciden y están en $\mathbb{R}$.
El polinomio característico no tiene raíces reales.

Estudiaremos cada caso por separado, incluyendo ejemplos de cada uno de ellos.

Las raíces del polinomio característico son distintas: $\lambda \neq \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

En este caso la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ (Proposición 6.2.5), su forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

y la matriz P del cambio tiene como primera columna las coordenadas de un vector $\vec{x}$ que satisface $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ (esto es, $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$) y como segunda columna las coordenadas de un vector $\vec{y}$ que satisface $(A - \mu I)\vec{y} = \vec{0}$ (esto es, $\vec{y} \in \mathrm{Ker}\,(A - \mu I)$).

EJEMPLO A. *Encontrar la forma de Jordan J sobre $\mathbb{R}$ de $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y la matriz del cambio.*

Como

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 1$$

sus autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$; su matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda_1 = 1$, tenemos

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x_1 - 4x_2 = 0;$$

así pues,

$$\operatorname{Ker}(A - I) = \{c(2, 1): c \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_2 = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 = x_2;$$

luego,

$$\operatorname{Ker}(A + I) = \{c(1, 1): c \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando $\vec{u}_1 = (2, 1)$ como base de $\operatorname{Ker}(A - I)$ y $\vec{u}_2 = (1, 1)$ como base de $\operatorname{Ker}(A + I)$ obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Observar que en este caso A se ha diagonalizado sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo B. Tratemos de hallar la forma de Jordan sobre $\mathbb{C}$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5,$$

y las soluciones de $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ son $\lambda_1 = 1 - 2i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$. Ambas raíces son complejas y distintas y por tanto la forma de Jordan de A sobre $\mathbb{C}$ será la matriz compleja

$$J = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Una base de autovectores (complejos) se halla calculando $E(1-2i) = \operatorname{Ker}(A-(1-2i)I)$ y $E(1+2i) = \operatorname{Ker}(A-(1+2i)I)$:

$$\begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2ix_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow E_1(1-2i) = \{c(2, -i) : c \in \mathbb{C}\}$$

$$\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2ix_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow E(1+2i) = \{c(2, i) : c \in \mathbb{C}\}.$$

Podemos tomar $\vec{u}_1 = (2, -i)$ y $\vec{u}_2 = (2, i)$ como vectores de la nueva base, por lo que

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio que diagonaliza a A sobre los números complejos.

Observar que en este ejemplo, aunque A es una matriz real, su matriz diagonal de Jordan es compleja. Más adelante se expondrá cómo obtener una forma de Jordan real de una matriz con coeficientes reales que tenga autovalores complejos.

Observar también que, en este caso, $|P| = 4i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, por lo que no puede existir una matriz R con coeficientes reales de forma que $A = RJR^{-1}$. Si así fuera, R se obtendría de P mediante un cambio $R = C^{-1}PC$ y se tendría $|P| = |CRC^{-1}| = |R| \in \mathbb{R}$.

* * *

Las raíces λ y μ del polinomio característico coinciden: $\lambda = \mu$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

En este caso calculamos $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Si $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ tiene dimensión 2 podemos encontrar una base de autovectores de A y por la Proposición 6.2.3 la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$; su forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y la matriz del cambio queda determinada por cualquier base de $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$.

Si, por el contrario, $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ tiene dimensión 1 no podemos encontrar una base de autovectores en V; en este caso observamos que se tiene el siguiente resultado:

Lema 6.3.1

Si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tiene dos autovalores iguales λ, $(A-\lambda I)^2 = 0$.

Demostración. La demostración es solo un ejercicio de cálculo; si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, sus autovalores satisfacen la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Si ambas soluciones de esta ecuación coinciden se ha de tener

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{a+d}{2}$$

o equivalentemente,

$$(a-d)^2 + 4bc = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{a+d}{2}. \tag{3.1}$$

Al calcular $(A-\lambda I)^2$ encontramos

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (a-\lambda)^2 + cb & (a-\lambda)c + c(d-\lambda) \\ b(a-\lambda) + b(d-\lambda) & bc + (d-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

que coincide con la matriz cero si utilizamos las igualdades (3.1). ■

Sea $E_1 = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ y $E_2 = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2$; el Lema 6.3.1 nos dice que E_2 coincide con el espacio vectorial V que estamos considerando y que es de dimensión dos. Como E_1 tiene dimensión 1 podemos encontrar $\vec{u}_2 \in E_2 - E_1$; tomar $\vec{u}_1 = (A-\lambda I)(\vec{u}_2)$. Los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, son linealmente independientes puesto que $\vec{u}_2 \notin E_1$ y $\vec{u}_1 \in E_1$ (ya que $(A-\lambda I)(\vec{u}_1) = (A-\lambda I)^2(\vec{u}_2) = 0(\vec{u}_2) = \vec{0}$) y ninguno de ellos es el vector nulo. Como V es un espacio de dimensión 2, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de V. En esta base tenemos

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)(\vec{u}_1) = \vec{0} &\iff A(\vec{u}_1) = \lambda \vec{u}_1 \\ (A-\lambda I)(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 &\iff A(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2 \end{aligned}$$

con lo que la matriz de la transformación lineal cuya matriz es A en esta nueva base es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Esta no es una matriz diagonal, pero es casi diagonal, y es la forma de Jordan de la matriz A sobre $\mathbb{K}$ en este caso.

Podemos resumir estos resultados sobre la forma de Jordan de matrices complejas en el siguiente teorema:

Teorema 6.3.2 (Teorema de ordan para matrices comple as de orden 2)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de una cualquiera de las formas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

y una matriz $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de determinante no nulo, tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan de A sobre* $\mathbb{C}$.

EJEMPLO C. *Reducir la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ *a su forma de Jordan.*

El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2,$$

que tiene como raíz $\lambda = 2$. Con $\lambda = 2$ se tiene que

$$E_1 = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \{(x_1, x_2): x_1 = x_2\} = \{c(1, 1): c \in \mathbb{K}\}$$

ya que

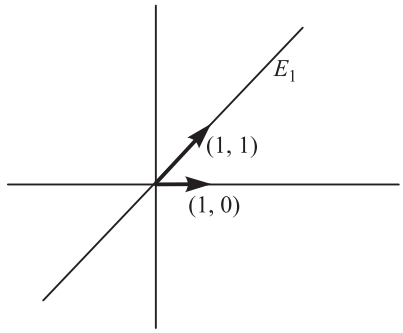
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Sabemos, debido al Lema 6.3.1, que $E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I)^2$ tiene dimensión 2; elegimos $\vec{u}_2$ de manera que $\vec{u}_2$ no esté en E_1; por ejemplo:

$$\vec{u}_2 = (1, 0).$$

Entonces,

$$\vec{u}_1 = (A - 2I)(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



i ra 6.2

La matriz de Jordan es $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz del cambio es $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; así pues, hemos de tener

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

lo cual puede comprobarse fácilmente. Observar que la forma de Jordan de A, así como la matriz del cambio, son reales.

* * *

Si A es una matriz con coeficientes reales tenemos un caso adicional.

El polinomio característico de A no tiene raíces reales.

Como el polinomio característico $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ es de grado 2, sus raíces son números complejos de la forma $\lambda = \alpha - i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Consideramos el sistema $(A - \lambda I)\vec{z} = \vec{0}$, es decir

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)z_1 + a_{12}z_2 = 0\\ a_{21}z_1 + (a_{22} - \lambda)z_2 = 0\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

donde $\vec{z} = (z_1, z_2)$. Este sistema es compatible indeterminado. Sea $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ una solución no nula de (3.2) con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Sustituyendo estos valores en (3.2) e igualando las partes reales e imaginarias se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Combinando (3.3) y (3.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

La matriz $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ se llama *matriz de Jordan real* de A en este caso. La matriz $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, formada por las partes reales e imaginarias de z_1 y z_2 es invertible. Si no lo fuera, sus vectores columna serían linealmente dependientes, por lo que existiría $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. De la ecuación (3.3) se deduciría

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta\gamma)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

lo que implicaría que A tendría $\alpha + \beta\gamma \in \mathbb{R}$ como autovalor, en contra de lo que hemos supuesto. La igualdad (3.5) puede entonces escribirse de la forma

$$A = PJP^{-1}.$$

bser aci n Escribiendo

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \dfrac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix}$$

y tomando $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$,

se observa que A es una matriz que en la base de Jordan de $\mathbb{R}^2$ corresponde a un giro de ángulo θ (ver ejemplo A de la sección 5.2) seguido de una homotecia o dilatación de razón $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Podemos resumir los resultados obtenidos sobre la forma de Jordan real de matrices reales en el siguiente teorema:

Teorema 6.3.3 (Teorema de ordan para matrices reales de orden 2)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de una cualquiera de las formas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \text{ no nulo},$$

y una matriz $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de determinante no nulo, tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan real* de A.

EJEMPLO D. Tratemos de encontrar la forma de Jordan real de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 10 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(-3-\lambda) + 40 = \lambda^2 - 6\lambda + 13.$$

Las raíces del polinomio característico son $\lambda = 3 - 2i$ y $\overline{\lambda} = 3 + 2i$. Una solución (compleja) no nula del sistema

$$\left.\begin{aligned} (9 - (3-2i))z_1 + 10z_2 &= 0 \\ -4z_1 + (-3 - (3-2i))z_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

es $z_1 = 5$, $z_2 = -3 - i$. Tenemos entonces $P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, que es la matriz de Jordan real de A. El lector puede comprobar que se cumple la igualdad $A = PJP^{-1}$.

EJEMPLO E. *Encontrar todas las funciones $x(t)$ que coinciden con su derivada segunda, esto es, $x''(t) = x(t)$.*

Si llamamos $y(t) = x'(t)$ podemos escribir

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= x(t), \end{aligned}$$

que en forma matricial se escribe como

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Encontramos la forma de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; como

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

la matriz A es diagonalizable (sus autovalores son distintos) con matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz del cambio de base calculamos $E(1) = \operatorname{Ker}(A - I)$ y $E(-1) = \operatorname{Ker}(A + I)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad E(1) = \{c(1, 1) : c \in \mathbb{R}\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 \quad \Leftrightarrow \quad E(-1) = \{c(-1, 1) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos tomar $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ como vectores de la nueva base. Tenemos entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Si hacemos $u(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$, $v(t) = -\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$ tenemos $u' = u$, $v' = -v$, de donde se deduce

$$u(t) = u_0 e^t, \quad v(t) = v_0 e^{-t}.$$

Como $x(t) = u - v$ tenemos

$$x(t) = u_0 e^t - v_0 e^{-t}$$

que son todas las funciones buscadas, donde u_0 y v_0 son dos constantes cualesquiera.

EJERCICIOS 6.3

1. Encontrar la forma de Jordan sobre $\mathbb{R}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y calcular A^5.

2. Probar por inducción que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

y calcular

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{10}.$$

3. Hallar la forma de Jordan sobre $\mathbb{R}$ de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

indicando en cada caso la matriz P del cambio.

4. Dado un polinomio $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, definimos

$$p(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n.$$

Dada $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ y $p(x) = x^2 + 5x + 6$, calcular $p(A)$ haciendo uso de la forma de Jordan de A.

5. Si $p_A(x)$ es el polinomio característico de la matriz A, demostrar que $p_A(A) = 0$, donde $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. (Este resultado se conoce con el nombre de *Teorema de Cayley-Hamilton*; un resultado análogo es cierto para matrices de orden superior (Teorema 6.5.2).)

6. Sea A una matriz de orden 2 tal que $A^2 = 0$. Demostrar que para todo λ, $|A - \lambda I| = \lambda^2$.

6.4. EJEMPLOS DE FORMAS DE JORDAN DE MATRICES DE ORDEN 3

En esta sección realizaremos varios ejemplos de obtención de formas de Jordan de matrices (reales o complejas) de orden 3. Además de practicar, el objetivo es que esta sección sirva al lector para comprender los resultados teóricos necesarios para la obtención de formas de Jordan de matrices de orden n, o, equivalentemente, de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión n.

EJEMPLO A. Intentaremos reducir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a una forma de Jordan.

Sus autovalores satisfacen la ecuación

$$0 = |A - \lambda I| = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2,$$

y, por tanto, son

$$\lambda = 2 \text{ (simple)} \quad \text{y} \quad \mu = -2 \text{ (doble)}.$$

Calculemos $E_1(2) = \text{Ker}\,(A - 2I)$, que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases};$$

tomando $x_3 = -1$ se tiene $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, con lo que $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 2$; además, tenemos que $\dim(E_1(2)) = 1$.

Para $\mu = -2$, $E_1(-2) = \text{Ker}\,(A + 2I)$ es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$E_1(-2) = \{a(1, -1, 1) : a \in \mathbb{K}\}.$$

Como $E_1(2) + E_1(-2)$ no llena todo el espacio vectorial $\mathbb{K}^3$ no podemos elegir una base de autovectores. Es necesario en este caso realizar un truco análogo al realizado en el caso de raíces iguales para matrices de orden 2. Calculamos $E_2(-2) = \text{Ker}\,(A + 2I)^2$, que es el subespacio vectorial que tiene por ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2;$$

por tanto,

$$E_2(-2) = \{a(1, -1, 0) + b(0, 0, 1) : a, b \in \mathbb{K}\}$$

que es un subespacio de dimensión 2. Como $E_1(2) + E_2(-2)$ llena todo el espacio, podemos elegir una base de $\mathbb{K}^3$ de manera que la matriz de A sea, en esta base, bastante sencilla. La forma de elegir esta base se muestra a continuación.

Sea $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$ un vector de $E_2(-2)$ que no esté en $E_1(-2)$ y tomemos

$$\vec{u}_2 = (A + 2I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\2 & 1 & -1\\-2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in E_1(-2).$$

Fácilmente se comprueba que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base y en esta base la expresión de la aplicación A que tiene a A como matriz es

$$A(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1, \quad A(\vec{u}_2) = -2\vec{u}_2, \quad A(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

con lo que

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc}2 & 0 & 0\\\hline 0 & -2 & 1\\0 & 0 & -2\end{array}\right).$$

La matriz de la derecha de esta expresión es una matriz de Jordan de A.

* * *

EJEMPLO B. *Reducir la matriz* $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ *a una forma de Jordan.*

Como $|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = (1 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$, los autovalores de A son $\lambda = 1$ (doble), $\mu = -1$ (simple).

Para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3$$

y, por tanto,

$$E_1(1) = \operatorname{Ker}(A - I) = \{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & -1\\2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 = 0\\ x_1 + x_2 = x_3\end{array}\right\}$$

y, por tanto,

$$E_1(-1) = \operatorname{Ker}(A + I) = \{a(0, 1, 1) : a \in \mathbb{K}\}.$$

Como $E_1(1) + E_1(-1)$ llena todo el espacio $\mathbb{K}^3$ la matriz A es diagonalizable y se tiene

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c}1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & -1\end{array}\right).$$

* * *

EJEMPLO C. Tratemos de encontrar una forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $|A - \lambda I| = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda + 2)^3$, los autovalores de A son $\lambda = -2$ (triple).

Como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3,$$

se tiene que

$$E_1(-2) = \operatorname{Ker}(A + 2I) = \{a(1, 1, 1) : a \in \mathbb{K}\}.$$

Como no existe una base de autovectores procedemos a calcular $E_2(-2) = \operatorname{Ker}(A + 2I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3$$

$$E_2(-2) = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Puesto que con $E_2(-2)$ no se llena todo el espacio $\mathbb{K}^3$ calculamos $E_3(-2) = \operatorname{Ker}(A + 2I)^3$; como $(A + 2I)^3 = 0$, lo cual puede comprobarse fácilmente, formamos la cadena de subespacios.

$$E_1(-2) \subsetneq E_2(-2) \subsetneq E_3(-2) = \mathbb{K}^3$$

y elegimos $\vec{u}_3 \in \mathbb{K}^3$ de manera que $\vec{u}_3 \notin E_2(-2)$; por ejemplo,

$$\vec{u}_3 = (1, 0, 0).$$

Tomamos $\vec{u}_2 = (A + 2I)\vec{u}_3$, $\vec{u}_1 = (A + 2I)\vec{u}_2$; tenemos

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con lo que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base. Se tiene

$$A(\vec{u}_1) = -2\vec{u}_1, \quad A(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2, \quad A(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3,$$

con lo cual deducimos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

* * *

EJEMPLO D. *Encontrar una forma de Jordan de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son $\lambda = -1$ (triple) puesto que $|A - \lambda I| = -(\lambda + 1)^3$. Las ecuaciones de $E_1(-1) = \operatorname{Ker}(A + I)$ son

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3;$$

por tanto,

$$E_1(-1) = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Puesto que $E_1(-1)$ no llena todo el espacio vectorial $\mathbb{K}^3$ encontramos $E_2(-1) = \operatorname{Ker}(A + I)^2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos la cadena $E_1(-1) \subsetneq E_2(-1) = \mathbb{K}^3$, con lo cual podemos elegir $\vec{u}_3 \in \mathbb{K}^3 \setminus E_1(-1)$: por ejemplo, $\vec{u}_3 = (1, 0, 0)$. Tomamos ahora $\vec{u}_2 = (A + I)\vec{u}_3$:

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como $E_1(-1)$ es un espacio de dimensión 2 aún podemos elegir $\vec{u}_1 \in E_1(-1)$ de manera que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sea una base de $\mathbb{K}^3$; tomar, por ejemplo,

$$\vec{u}_1 = (0, 1, 0).$$

En esta base,

$$A(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1, \quad A(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2, \quad A(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$$

y, por tanto,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

* * *

EJEMPLO E. Tratemos de hallar ahora una forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $|A - \lambda I| = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$ cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = 1 - i \quad , \quad \lambda_3 = 1 + i.$$

Se puede proceder ahora de dos maneras:

Hallar una forma de Jordan sobre $\mathbb{C}$.
Hallar una forma de Jordan sobre $\mathbb{R}$.

Se considera que A es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^3$. Entonces los subespacios $E_1(3) = \text{Ker}(A - 3I)$, $E_1(1 - i) = \text{Ker}\,(A - (1 - i)I)$ y $E_1(1 + i) = \text{Ker}(A - (1 + i)I)$ se consideran como subespacios de $\mathbb{C}^3$.

Para $E_1(3)$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = z_3 = 0.$$

Podemos tomar $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ como generador de $E_1(3)$.

Para $E_1(1 - i)$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 + i & -5 & -5 \\ 0 & -1 + i & -1 \\ 0 & 2 & 1 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} z_1 = (1 + 2i)z_2 \\ z_3 = (-1 + i)z_2 \end{matrix} \right\}. \tag{4.1}$$

Podemos tomar $\vec{u}_2 = (1 + 2i, 1, -1 + i)$ como generador de $E_1(1 - i)$.

Para $E_1(1 + i)$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 - i & -5 & -5 \\ 0 & -1 - i & -1 \\ 0 & 2 & 1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} z_1 = (1 - 2i)z_2 \\ z_3 = (-1 - i)z_2 \end{matrix} \right\}. \tag{4.2}$$

Observar que la matriz del sistema de la izquierda de (4.2) es la conjugada de la matriz del sistema de la izquierda de (4.1). Podemos tomar $\vec{u}_3 = (1 - 2i, 1, -1 - i)$ como generador de $E_1(1 + i)$.

Como tenemos tres vectores linealmente independientes, una forma de Jordan de A sobre $\mathbb{C}$ es

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 - i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 + i \end{array}\right)$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2i & 1 - 2i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 + i & -1 - i \end{pmatrix}$$

la matriz del cambio.

Se considera que A es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Los cálculos del caso anterior nos permiten escribir

$$E_1(3) = \{c(1, 0, 0): c \in \mathbb{R}\}$$

por lo que podemos elegir $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$.

Para calcular los otros dos vectores se procede como en el Caso III de la sección 6.3 (ver también Ejemplo D de la misma sección). El trabajo ya se ha hecho al resolver el sistema de la parte izquierda de (4.1) por lo que basta tomar

$$\vec{v}_2 = \text{Real}\,\vec{u}_2 = (1, 1, -1) \quad , \quad \vec{v}_3 = \text{Img}\,\vec{u}_2 = (2, 0, 1).$$

Los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. En esta base la matriz de A es

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y la matriz de paso

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS 6.4

1. Hallar una forma de Jordan y la matriz del cambio correspondiente de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Hallar C^6.

3. Hallar una forma de Jordan real y la matriz del cambio correspondiente para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Hallar subespacios invariantes de la aplicación A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda & \mu \\ \lambda & \beta & \nu \\ \mu & \nu & \gamma \end{pmatrix}$ la matriz de $A \in L(\mathbb{R}^3)$ en la base canónica; supongamos que rango (A) $= 1$ y $\operatorname{tr}(A) = \alpha + \beta + \gamma = 1$. Hallar los autovalores y autovectores de A.

6.5. EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matriz de orden n con elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$. Dado un polinomio no nulo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \in P_{\mathbb{K}}[x]$$

con $a_0, a_1, ..., a_d \in \mathbb{K}$ definimos $p(A)$ como

$$p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Es decir se reemplaza x por la matriz A y el término a_0 se multiplica por I_n. Si $p(A)$ es la matriz nula decimos que A satisface la ecuación $p(x) = 0$.

En 1858 Arthur Cayley (1821-1895) afirmó que toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ satisface su polinomio característico $p_A(x) = |A - xI|$. Arthur Cayley solo pudo demostrar este resultado para matrices de orden 2. La primera demostración completa de este resultado fue publicada por William Hamilton (1805-1865). Actualmente se conoce como teorema de Cayley-Hamilton.

EJEMPLO A. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ satisface el polinomio $p_A(x) = x^2 + 1$, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observar que el polinomio característico de la matriz A es $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, por lo que se tiene $p_A(A) = 0$.

Para matrices de orden 2, la demostración del teorema de Cayley-Hamilton es sencilla. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ su polinomio característico es

$$p(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{vmatrix} = x^2 - (a + d)x + (ad - cb).$$

Como

$$A^2 - (a + d)A + (ad - cb)I =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + db & ad + d^2 \end{pmatrix} + (ad - cb)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene que $p_A(A) = 0$.

La demostración del teorema de Cayley-Hamilton requiere más trabajo. Antes de dar su enunciado y la demostración comenzaremos con un lema.

Lema 6.5.1

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matriz de orden n con elementos en $\mathbb{K}$ y $p(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{K}$. Si $p(x)I_n = (A - xI)Q(x)$ con

$$Q(x) = Q_0 + Q_1x + \cdots + Q_{n-1}x^{n-1},$$

donde $Q_j \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ para $j = 0, 1, ..., n-1$, entonces

$$p(A) = 0.$$

Demostración. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. La igualdad $p(x)I_n = (A - xI_n)Q(x)$ se transforma en

$$\begin{aligned} p(x)I_n &= a_0I_n + a_1I_nx + \cdots + a_nI_nx^n = (A - xI_n)Q(x) \\ &= AQ_0 + (AQ_1 - Q_0)x + \cdots + (AQ_{n-1} - Q_{n-2})x^{n-1} - Q_{n-1}x^n. \end{aligned}$$

Igualando los términos de igual grado obtenemos

$$\begin{aligned} a_0I_n &= AQ_0 \\ a_1I_n &= AQ_1 - Q_0 \\ &\vdots \\ a_{n-1}I_n &= AQ_{n-1} - Q_{n-2} \\ a_nI_n &= -Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicar la segunda igualdad por A, la tercera por A^2, ..., y la última por A^n. Si sumamos la parte izquierda de todas las igualdades se obtiene

$$a_0I_n + a_1A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n = p(A),$$

mientras que al sumar la parte derecha de todas las igualdades se obtiene

$$AQ_0 + A(AQ_1 - Q_0) + \cdots + A^{n-1}(AQ_{n-1} - Q_{n-2}) - A^nQ_{n-1} = 0,$$

de donde se deduce el resultado. ∎

Teorema 6.5.2 (Teorema de Ca le - amilton)

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ es su polinomio característico, se tiene que $p_A(A) = 0$.

Demostración[1] Consideremos la matriz $A - xI_n$ cuyos elementos son polinomios de grado 1. Sea $\Delta(x)$ la matriz de cofactores de $A - xI_n$ (ver sección 2.4). La matriz $\Delta(x)$ es una

[1] Demostración tomada del libro de J. M. Aroca, M. J. Fernández-Bermejo, *Álgebra lineal y geometría*. Ed. Universidad de Valladolid, (1998).

matriz cuyos elementos son polinomios de grado menor o igual que $n-1$. Por tanto, podemos escribir

$$\Delta(x) = \Delta_0 + \Delta_1 x + \cdots + \Delta_{n-1} x^{n-1}$$

donde $\Delta_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Se tiene

$$(A - xI_n)\Delta(x)^t = |A - xI_n| I_n = p_A(x) I_n$$

(ver la demostración del Teorema 2.4.2). Por el Lema 6.5.1 con $Q(x) = \Delta(x)^t$ se deduce que $p_A(A) = 0$, que es lo afirmado en el enunciado del teorema. ■

EJEMPLO B. Considerar la aplicación lineal A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3 + x_4, -x_3 + x_4).$$

Con respecto a la base canónica la matriz de la aplicación lineal A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es, por tanto, $p_A(A) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 2 - 6\lambda + 7\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4$. El Teorema de Cayley-Hamilton afirma que

$$P_A(A) = 2I_4 - 6A + 7A^2 - 4A^3 + A^4 = 0 \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Sin embargo, es necesario resaltar que hay polinomios $m(x) \in P_{\mathbb{R}}[x]$ de grado estrictamente menor que 4 que cumplen $m(A) = 0$. Por ejemplo, $m(x) = (1-x)(x^2 - 2x + 2) = 2 - 4x + 3x^2 - x^3$ cumple

$$m(A) = 2I_4 - 4A + 3A^2 - A^3 = 0 \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$

como puede comprobarse directamente.

* * *

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ consideremos el conjunto I_A de todos los polinomios $p(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ no nulos tales que $p(A) = 0$. Por el Teorema de Cayley-Hamilton el polinomio característico de A, $p_A(x)$, es un elemento de I_A, por lo que I_A es no vacío. Llamamos *polinomio mínimo* de A, y escribimos $m_A(x)$, al polinomio mónico de grado más pequeño entre los del conjunto I_A.

Lema 6.5.3

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $m_A(x)$ su polinomio mínimo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $p(x) \in I_A$ 2) $m_A(x)$ divide a $p(x)$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Al dividir $p(x)$ entre $m_A(x)$ se tendría $p(x) = c(x)m_A(x) + r(x)$ con $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ menor que el grado de $m_A(x)$. Como $p(x) \in I_A$ se tiene $p(A) = 0$;

como $m_A(A) = 0$ se tiene $r(A) = 0$. Por tanto $r(x) \in I_A$, lo que resulta imposible por definición de polinomio mínimo, salvo que $r(x) = 0$. En este caso, $p(x) = c(x)m_A(x)$ y por tanto $m_A(x)$ divide a $p(x)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Como $m_A(x)$ divide a $p(x)$ podemos escribir $p(x) = c(x)m_A(x)$. Como $m_A(A) = 0$ deducimos $p(A) = 0$ y por tanto $p(x) \in I_A$. ■

bser aci n Del Lema 6.5.3 se deduce fácilmente que el polinomio mínimo es único.

EJEMPLO C. Tratemos de hallar el polinomio mínimo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p_A(x) = |A - xI| = (1 - x)(x^2 - 1) = -(x - 1)^2(x + 1)$. Sabemos que el polinomio mínimo debe dividir a $(x - 1)^2(x + 1)$. Los factores de grado 1 de este polinomio son

$$(x - 1) \quad \text{y} \quad (x + 1).$$

Es claro que $A - I_2 \neq 0$ y $A + I_2 \neq 0$. Los factores de grado 2 son

$$(x - 1)^2 \quad \text{y} \quad (x - 1)(x + 1).$$

Se cumple que

$$(A - I_2)(A + I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que $m_A(x) = (x - 1)(x + 1)$ es el polinomio mínimo de A.

El procedimiento seguido en el ejemplo C para hallar el polinomio mínimo depende de que conozcamos la factorización del polinomio característico. Esto no siempre es posible. De hecho, casi nunca es posible, excepto cuando los ejemplos están preparados, como en este libro.

Hay una forma de calcular el polinomio mínimo sin tener que factorizar el polinomio característico. Para entender el resultado debemos usar la identidad de Bezout para el máximo común divisor de varios polinomios.

Lema 6.5.4 (dentidad de ezout)

Sean $m_1(x)$, ..., $m_r(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$, $r \geqslant 2$ y sea $d(x)$ su máximo común divisor. Existen $a_1(x)$, ..., $a_r(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ tales que

$$d(x) = a_1(x)m_1(x) + \cdots + a_r(x)m_r(x).$$

La demostración de la Identidad de Bezout para $r = 2$ puede hacerse a partir del algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos polinomios. Para $r > 2$ puede demostrarse por inducción. El desarrollo del algoritmo de Euclides y la demostración de la Identidad de Bezout para números enteros puede verse en la sección 2.2 de J. Dorronsoro, E. Hernández, *Números, grupos y anillos*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, (1996). La adaptación para polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es una sencilla modificación.

Lema 6.5.5

Sean $p(x)$ y $m(x)$ dos polinomios y $D(x)$ y $G(x)$ dos matrices cuadradas de polinomios tal que $p(x)D(x) = m(x)G(x)$. Si el máximo común divisor de los elementos no nulos de $D(x)$ es 1 se tiene que $m(x)$ divide a $p(x)$.

Demostración. Sea I el conjunto de índices (i, j) tales que $d_{ij}(x) \neq 0$, donde $d_{ij}(x)$ es el elemento (i, j) de la matriz $D(x)$. Por la identidad de Bezout

$$1 = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij}(x)d_{ij}(x)$$

con $a_{ij}(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$. Entonces, si $G(x) = (g_{ij}(x))_{i,j}$

$$p(x) = \sum_{(i,j)\in I} p(x)a_{ij}(x)d_{ij}(x) = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij}(x)m(x)g_{ij}(x) =$$

$$= m(x) \sum_{(i,j)\in I} a_{ij(x)}g_{ij}(x).$$

De aquí se deduce que $m(x)$ divide a $p(x)$ ya que $\sum_{(i,j)\in I} a_{ij}(x)g_{ij}(x)$ es un polinomio. ■

Ya podemos enunciar y demostrar un resultado que nos permite calcular el polinomio mínimo sin necesidad de saber factorizar el polinomio característico de una matriz.

Teorema 6.5.6

Sea $p_A(x) = |A - xI_n|$ el polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. El polinomio mínimo de A es

$$m_A(x) = \frac{p_A(x)}{q(x)}$$

donde $q(x)$ es el máximo común divisor de los cofactores no nulos de la matriz $A - xI_n$.

Demostración. Sean $C_{ij}(x)$ los cofactores de $A - xI_n$, $i, j = 1, ..., n$. Sabemos (ver (4.1) del Capítulo 2) que

$$p_A(x) = |A - xI| = (a_{11} - x)C_{11}(x) + a_{12}C_{12}(x) + \cdots + a_{1n}C_{1n}(x). \tag{5.1}$$

Como $q(x)$ es el máximo común divisor de los $C_{ij}(x)$ no nulos, $C_{ij}(x) = q(x)D_{ij}(x)$ con $D_{ij}(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$. Sustituyendo en (5.1) se tiene

$$\begin{aligned} p_A(x) &= q(x)\left[(a_{11} - x)D_{11}(x) + a_{12}D_{12}(x) + \cdots + a_{1n}D_{1n}(x)\right] \\ &= q(x)m(x) \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $m(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Veamos que $m(A) = 0$. Sea $C(x)^t$ la traspuesta de la matriz de cofactores de $A - xI_n$. Se tiene que

$$(A - xI_n)C(x)^t = |A - xI_n|I_n = p_A(x)I_n \tag{5.3}$$

(ver la demostración del Teorema 2.4.2). Escribamos $C(x)^t = D(x)q(x)$ donde $D(x)$ es una matriz de polinomios cuyo máximo común divisor es 1. De (5.2) y (5.3) obtenemos

$$m(x)q(x)I_n = p_A(x)I_n = (A - xI_n)D(x)q(x).$$

Tenemos, por tanto $m(x)I_n = (A - xI_n)D(x)$. Del Lema 6.5.1 se deduce $m(A) = 0$. Por tanto $m(x) \in I_A$. Por el Lema 6.5.3, $m_A(x)$ divide a $m(x)$. Basta probar que también $m(x)$ divide a $m_A(x)$.

Consideremos otra indeterminada y sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Como

$$y^d - x^d = (y - x)(y^{d-1} + y^{d-2}x + \cdots + yx^{d-2} + x^{d-1}),$$

el polinomio $m_A(y) - m_A(x)$ en las variables y, x es divisible por $y - x$. Luego

$$m_A(y) - m_A(x) = g(x, y)(y - x).$$

En consecuencia, como $m_A(A) = 0$ se tiene

$$-m_A(xI_n) = -m_A(x)I_n = g(xI_n, A)(A - xI_n). \tag{5.4}$$

De esta igualdad, (5.2) y (5.3) se deduce

$$m_A(x)D(x) = m_A(x)\frac{C(x)^t}{q(x)} = -g(xI_n, A)(A - xI_n)\frac{C(x)^t}{q(x)}$$

$$= -g(xI_n, A)\frac{p_A(x)}{q(x)} = -g(xI_n, A)m(x).$$

Como $D(x)$ es una matriz cuyos elementos no nulos tienen máximo común divisor 1, del Lema 6.5.5 se deduce que $m(x)$ divide a $m_A(x)$. ■

EJEMPLO D. Usemos ahora el resultado expuesto en el Teorema 6.5.6 para hallar el polinomio mínimo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya calculado, por otro procedimiento, en el ejemplo C.

Su polinomio característico es $p_A(x) = (1 - x)(x^2 - 1)$. La matriz $A - xI_3$ es

$$A - xI_3 = \begin{pmatrix} 1 - x & 0 & 0 \\ 1 & -x & -1 \\ 1 & -1 & -x \end{pmatrix}.$$

Sus cofactores son

$$C_{11}(x) = x^2 - 1 \quad , \quad C_{12}(x) = x - 1 \quad , \quad C_{13} = -1 + x$$
$$C_{21}(x) = 0 \quad , \quad C_{22}(x) = -x(1 - x) \quad , \quad C_{23} = 1 - x$$
$$C_{31}(x) = 0 \quad , \quad C_{32}(x) = 1 - x \quad , \quad C_{33} = -x(1 - x).$$

El máximo común divisor de estos cofactores no nulos es $1 - x$. Por el Teorema 6.5.6

$$m_A(x) = \frac{(1-x)(x^2-1)}{(1-x)} = (x+1)(x-1).$$

* * *

Tanto en el ejemplo B como en el ejemplo C los factores irreducibles del polinomio característico son también factores irreducibles del polinomio mínimo. Esto sucede siempre y puede demostrarse usando la igualdad (5.4).

Proposición 6.5.7

Los factores irreducibles del polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son también factores irreducibles de su polinomio mínimo.

Demostración. Partiendo de (5.4) y tomando determinantes se obtiene

$$(-1)^n[m_A(x)]^n = |g(xI_n, A)|\, p_A(x).$$

Por tanto, si $r(x)$ divide a $p_A(x)$ también divide a $[m_A(x)]^n$. Si $r(x)$ es irreducible también debe dividir a $m_A(x)$. Esto se deduce de que si $r(x)$ divide a un producto $p(x)q(x)$ de dos polinomios y es irreducible, entonces $r(x)$ divide a $p(x)$ ó $r(x)$ divide a $q(x)$. Esto último se demuestra usando la identidad de Bezout.

En efecto, si $p(x)q(x) = r(x)c(x)$ con $r(x)$ irreducible y suponemos que $r(x)$ no divide a $p(x)$, el máximo común divisor de $r(x)$ y $p(x)$ sería 1. Por la identidad de Bezout (Lema 6.5.4) existirían $a_1(x)$, $a_2(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ tales que

$$1 = a_1(x)r(x) + a_2(x)p(x).$$

Luego

$$q(x) = a_1(x)r(x)q(x) + a_2(x)p(x)q(x) =$$
$$= [a_1(x)q(x) + a_2(x)c(x)]r(x)$$

y tendríamos que $r(x)$ divide a $q(x)$. ■

bser aci n Es fácil deducir de la Proposición 6.5.7 que si el polinomio característico no tiene factores múltiples, coincide con su polinomio mínimo. También, que todos los valores propios son raíces del polinomio mínimo.

* * *

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y A: $V \to V$ una aplicación lineal. Denotamos por $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a la matriz de A en una base fijada. Sabemos que si A tiene exactamente n valores propios distintos dos a dos, la aplicación lineal A es diagonalizable (ver Proposición 6.2.5).

A continuación demostraremos un resultado que nos da un criterio algebraico para saber cuando A es diagonalizable en función del polinomio característico $p_A(x) = |A - xI_n|$ de la matriz A.

Lema 6.5.8

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V de dimensión n. Sea λ un valor propio de A. Si s es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio $p_A(x) = |A - xI_n|$, entonces,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)) \leqslant s.$$

Demostración. Sea $r = \dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I))$ y $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r\}$ una base de $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$. Tomemos $v_{r+1}, ..., v_n$ en V tales que $B = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ sea una base de V (un algoritmo para obtener esta base lo proporciona el Teorema de Steiniz, Teorema 4.5.1). En la base B la aplicación lineal A tiene como matriz

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & T \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$$

donde N es una matriz de tamaño $(n - r) \times (n - r)$. Como el polinomio característico no depende de la base elegida en V,

$$p_A(x) = p_M(x) = (-1)^r(x - \lambda)^r p_N(x),$$

y como $p_N(x)$ puede tener $(x - \lambda)$ como factor, la multiplicidad de λ como raíz del polinomio $p_A(x)$ es al menos r. ■

Teorema 6.5.9 (Teorema de diagonalizaci n)

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Son equivalentes:

a) A es diagonalizable.
b) El polinomio característico de A se descompone en $P_{\mathbb{K}}[x]$ en factores lineales, $p_A(x) = c\prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{n_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, y además $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i I)) = n_i$, $i = 1, 2, ..., r$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Supongamos que A es diagonalizable. Por la Proposición 6.2.3 existe una base B formada por vectores propios de A con respecto a la cual la matriz de A es diagonal. Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j,\ \lambda_i \in \mathbb{K},$$

esta matriz diagonal, en donde hemos reordenado la base B para poder escribir D de esta manera. Observar que $n = n_1 + \cdots + n_r$. Escribamos

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$$

con $B_i = \{\vec{u}_{i1}, \vec{u}_{i2}, ..., \vec{u}_{in_i}\}$, $i = 1, 2, ..., r$, donde $A\vec{u}_{ij} = \lambda_i \vec{u}_{ij}$, $j = 1, ..., n_i$. Por tanto, $B_i \subset \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i I)$. Como B_i es parte de una base de V, B_i es un conjunto de vectores linealmente independientes. Luego

$$n_i \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i I)), \qquad i = 1, 2, ..., r. \tag{5.5}$$

Como el polinomio característico no depende de la base elegida en V,

$$p_A(x) = p_D(x) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda_i - x)^{n_i}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j,\ \lambda_i \in \mathbb{K},$$

por lo que $p_A(x)$ se descompone en $P_{\mathbb{K}}[x]$ en factores lineales. Además, la multiplicidad de λ_i es n_i. Por el Lema 6.5.8

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) \leqslant n_i, \qquad i = 1, 2, ..., r. \tag{5.6}$$

De (5.5) y (5.6) se deduce $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) = n_i$, $i = 1, 2, ..., r$.

b) $\Rightarrow$ a). Como $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) = n_i$, elijamos

$$B_i = \{\vec{u}_{i1}, ..., \vec{u}_{in_i}\}, \qquad i = 1, 2, ..., r,$$

una base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$. Sea

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r.$$

Como $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ porque $p_A(x) = c \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{n_i}$ y $p_A(x)$ es un polinomio de grado n, basta probar que B es un conjunto de vectores linealmente independiente, ya que entonces B es base de V formada por vectores propios. Por la Proposición 6.2.3, A será diagonalizable.

Probaremos que B es linealmente independiente por inducciónh en r. Si $r = 1$, el resultado es cierto porque B_1 es base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)$.

Supongamos que $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{t-1}$, $2 < t \leqslant r$ es linealmente independiente. Sea

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \vec{u}_{ij} = \vec{0} \tag{5.7}$$

una combinación lineal de los elementos de $B_1 \cup \cdots \cup B_t$. Aplicando A a (5.7) se deduce

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \lambda_i \vec{u}_{ij} = \vec{0} \tag{5.8}$$

y multiplicando (5.7) por λ_t obtenemos

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \lambda_t \vec{u}_{ij} = \vec{0}. \tag{5.9}$$

Restando (5.8) y (5.9) podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} (\lambda_i - \lambda_t) \vec{u}_{ij} = \vec{0}.$$

Como $B_1 \cup \cdots \cup B_{t-1}$ es linealmente independiente por la hipótesis de inducción, de esta igualdad se deduce $\alpha_{ij}(\lambda_i - \lambda_t) = 0$. Puesto que $\lambda_i \neq \lambda_t$, $1 \leqslant i < t$, obtenemos $\alpha_{ij} = 0$, $i = 1, ..., t - 1$, $j = 1, ..., n_i$. Sustituyendo en (5.7) obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n_t} \alpha_{tj} \vec{u}_{tj} = \vec{0},$$

de donde deducimos que $\alpha_{tj} = 0$, $j = 1, ..., n_t$, puesto que B_t es base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda_t I)$. ■

EJEMPLO E. Considerar la aplicación lineal A: $\mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ dada por

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3 + x_4, -x_3 + x_4).$$

Por el ejemplo B tenemos $p_A(x) = (1 - x)^2(x^2 - 2x + 2)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, como $x^2 - 2x + 2$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$ (no tiene raíces en $\mathbb{R}$), $p_A(x)$ no puede descomponerse en factores lineales sobre $\mathbb{R}$. Por el Teorema 6.5.9 la aplicación lineal A no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Pero $x^2 - 2x + 2 = 0$ tiene como raíces $\lambda = 1 - i$, $\lambda = 1 + i$ en $\mathbb{C}$. Por tanto, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$p_A(x) = (x - 1)^2(x - (1 - i))(x - (1 + i))$$

puede descomponerse en factores lineales. Si $\lambda = 1$

$$\text{Ker}\,(A + I_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

por lo que $\dim(\text{Ker}\,(A - I)) = 2$.

Como $\text{Ker}\,(A - \lambda I) \neq \{\bar{0}\}$ para $\lambda = 1 - i$, $\lambda = 1 + i$, entonces $\dim(\text{Ker}\,(A - \lambda I)) \geqslant 1$. Por otro lado como $\lambda = 1 - i$, $\lambda = 1 + i$ tienen multiplicidad 1, por el Lema 6.5.8.

$$\dim(\text{Ker}\,(A - (1 - i)I)) = 1 \quad \text{y} \quad \dim(\text{Ker}\,(A - (1 + i)I)) = 1.$$

En resumen

Autovalor λ	1	$1 - i$	$1 + i$
Multiplicidad	2	1	1
$\dim(\text{Ker}\,(A - \lambda I))$	2	1	1

Por el Teorema 6.5.9, A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

EJERCICIOS 6.5

1. Demostrar directamente que las siguientes matrices satisfacen su polinomio característico:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Determinar todas las matrices A tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Determinar todas las matrices A tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Explicar por qué la siguiente demostración del Teorema de Cayley-Hamilton es incorrecta: «Como $p_A(x) = |A - xI|$ si sustituimos x por A se tiene $p_A(A) = |A - AI| = |A - A| = 0$».

5. Hallar el polinomio mínimo de la matriz de la aplicación lineal A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3 + x_4, -x_3 + x_4).$$

(Observar que la aplicación A es la del ejemplo B de esta sección).

6. Hallar el polinomio mínimo de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Decidir razonadamente si las siguientes aplicaciones lineales son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$:

a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_1 + 2x_2, -2x_1 + 2x_2)$.

b) $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, -x_3 + x_4, x_3 - x_4)$.

c) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, -2x_1 - x_2 - x_3)$.

6.6. APLICACIONES LINEALES Y SUBESPACIOS INVARIANTES

Consideremos A: $V \to V$ una aplicación lineal no nula en un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si A no es inyectiva, siempre existen dos subespacios propios invariantes: el núcleo y la imagen de A. Es decir, siempre se tiene

$$A(\operatorname{Ker} A) \subset \operatorname{Ker} A \quad \text{y} \quad A(\operatorname{Im}(A)) \subset \operatorname{Im}(A).$$

La comprobación de estos hechos se deja al lector.

En esta sección daremos algunos resultados sobre subespacios invariantes de las aplicaciones lineales que nos a ayudarán en la demostración del Teorema de Jordan sobre la reducción de aplicaciones lineales a su forma «más sencilla».

Lema 6.6.1

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si λ es un valor propio de A, para todo $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^r)$$

es invariante por A.

Demostración. Recordar que $(A - \lambda I)^r$ es la composición de $(A - \lambda I)$ con sí misma r veces. Si $\vec{v} \in \operatorname{Ker}((A - \lambda I)^r)$ podemos escribir $A\vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} + \lambda\vec{v}$ y, por tanto, basta demostrar que $(A - \lambda I)\vec{v} \in \operatorname{Ker}((A - \lambda I)^r)$. Pero

$$(A - \lambda I)^r((A - \lambda I)\vec{v}) = (A - \lambda I)^{r+1}\vec{v} = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^r\vec{v} = \vec{0},$$

lo cual prueba el resultado deseado. ■

Si A: $V \to V$ es una aplicación definida en un espacio vectorial complejo de dimensión finita, con matriz A respecto de una base fijada, el polinomio característico

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

de esta aplicación tiene tantas soluciones complejas contadas con su multiplicidad como el grado del polinomio (este resultado se conoce con el nombre de *teorema fundamental del álgebra* y ha sido enunciado con anterioridad en el Capítulo 3). Si λ_0 es una solución de $p_A(\lambda) = 0$ y $\vec{v}_0$ es un autovector correspondiente a λ_0, el subespacio $L(\vec{v}_0) = \{a\vec{v}_0 : a \in \mathbb{C}\}$ es invariante:

$$A(a\vec{v}_0) = aA(\vec{v}_0) = a\lambda_0\vec{v}_0 \in L(\vec{v}_0).$$

Hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 6.6.2

Toda aplicación lineal en un espacio vectorial complejo V de dimensión finita posee un subespacio invariante de dimensión 1.

En el caso de que la aplicación lineal esté definida sobre un espacio vectorial *real*, su polinomio caracteristico puede tener todas las soluciones complejas y en este caso no podemos realizar el razonamiento anterior para obtener un subespacio de dimensión 1.

Observar que si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un número complejo y ponemos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la aplicación lineal f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \lambda z$ se transforma en la aplicación lineal φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

La matriz de φ en la base dada es $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Análogamente, si $A = U + iV$ es una matriz compleja de orden n con U y V matrices reales y $\vec{z} = \vec{x} + i\vec{y} \in \mathbb{C}^n$, la aplicación lineal f: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $f(\vec{z}) = A\vec{z}$ se transforma en la aplicación lineal φ: $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = ((U\vec{x} - V\vec{y})^t, (V\vec{x} + U\vec{y})^t).$$

La matriz de φ en las bases fijadas es

$$\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}.$$

En particular, si A es una matriz real, es decir si $V = 0$, la matriz de φ es

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Proposición 6.6.3

Toda aplicación lineal A en un espacio vectorial real V de dimensión finita posee un subespacio invariante de una o dos dimensiones.

Demostración. Si el polinomio característico $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ de la aplicación A tiene al menos una raíz real, se procede como en el caso complejo para encontrar un subespacio invariante de dimensión uno.

Supongamos, por el contrario, que $p_A(\lambda)$ no posee raíces reales y sea $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ una de sus raíces complejas con $\beta \neq 0$. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ que tiene por matriz la matriz real A, es decir, $f(\vec{z}) = A\vec{z}$. Así obtenemos que los elementos de $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)$ como subespacio de $\mathbb{C}^n$ satisfacen las ecuaciones matriciales

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha I_n & -\beta I_n \\ \hline \beta I_n & \alpha I_n \end{array}\right)\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

debido a los comentarios previos a esta proposición y a que $\lambda_0 I_n = \alpha I_n + i\beta I_n$. En consecuencia, si $\vec{z}_0 = \vec{x}_0 + i\vec{y}_0$ es un autovector complejo correspondiente a λ_0, el subespacio $W = L(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \subset \mathbb{R}^n$ es invariante por A pues se tiene

$$A\vec{x}_0 = \alpha\vec{x}_0 - \beta\vec{y}_0 \quad , \quad A\vec{y}_0 = \beta\vec{x}_0 + \alpha\vec{y}_0. \tag{6.1}$$

Falta probar que W tiene dimensión 2. Si $\vec{x}_0$ e $\vec{y}_0$ fueran proporcionales tendríamos $\vec{y}_0 = \gamma\vec{x}_0$ con $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Entonces

$$A\vec{x}_0 = (\alpha - \gamma\beta)\vec{x}_0$$

con lo que A tendría un valor propio real, en contra de lo supuesto. ∎

ota Si se mira la demostración anterior, se deduce de (6.1) que la matriz de A restringida a W con respecto a la base $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0\}$ es

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, con respecto a la base $\{\vec{x}_0, -\vec{y}_0\}$ la matriz de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ya que $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio de base y $C^{-1} = C$ (ver observación anterior al Teorema 6.3.3).

EJEMPLO A. El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

es $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (-4 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 8)$. El autovalor real $\lambda = -4$ nos permite obtener un subespacio invariante de A de dimensión 1, a saber $E_1(-4) = \operatorname{Ker}(A + 4I)$.

Como

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

$$E_1(-4) = \operatorname{Ker}(A + 4I) = \{a(0, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio invariante de A de dimensión 1.

Para uno de sus autovalores complejos $\mu_1 = 2 + 2i$, resolvemos

$$\begin{pmatrix} -1-2i & -1 & 0 \\ 5 & 1-2i & 0 \\ 2 & 0 & -6-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} (1+2i)z_1 + & z_2 & = 0 \\ 5z_1 + & (1-2i)z_2 & = 0 \\ 2z_1 & -(6+2i)z_3 & = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_2 = -(1+2i)z_1 \\ z_1 = (3+i)z_3 \end{array}\right\}.$$

Una solución no nula es $\vec{z}_1 = (3 + i, -1 - 7i, 1)$. Tomamos los vectores (reales)

$$\vec{x}_1 = (3, -1, 1) \quad , \quad \vec{y}_1 = (1, -7, 0).$$

Estos generan un subespacio

$$W = \{a(3, -1, 1) + b(1, -7, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

de dos dimensiones en $\mathbb{R}^3$ que es invariante por A. Con respecto a esta base $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1\}$ tenemos

$$A|_W = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El lector puede comprobar que si se hace el razonamiento anterior para el valor propio $\mu_2 = 2 - 2i$ se obtiene el mismo subespacio W.

* * *

La otra observación que haremos en esta sección se refiere a la matriz de una aplicación lineal A: $V \to V$ en un espacio vectorial V el cual puede descomponerse en suma directa de dos o más subespacios invariantes respecto de A.

Supongamos que $V = W_1 \oplus W_2$ es suma directa de los subespacios W_1, W_2 que son invariantes respecto de A; recordemos que $V = W_1 \oplus W_2$ si y solo si $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$. Sea $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_r\}$ una base de W_1 y $\{\vec{e}_{r+1}, ..., \vec{e}_n\}$ una base de W_2; como W_1 y W_2 son invariantes tenemos:

$$A(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^{r} a_{ki}\vec{e}_k \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

$$A(\vec{e}_j) = \sum_{k=r+1}^{n} a_{kj}\vec{e}_k \quad , \quad r+1 \leqslant j \leqslant n.$$

Luego la matriz de A respecto de la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, ..., \vec{e}_n\}$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

con A_1 matriz de dimensión r y A_2 matriz de dimensión $n - r$.

Se tiene, pues, que, en este caso, la matriz de A puede dividirse en «cajas» que corresponden a las matrices de A restringida a cada uno de los subespacios invariantes. Los elementos que están fuera de estas «cajas» son todos ceros.

Si se conocen m subespacios invariantes de A, que llenan todo V mediante una suma directa, la matriz de A puede escribirse de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

en una base convenientemente elegida.

La demostración de este último resultado es muy similar a la demostración del resultado anterior; el lector no tendrá ninguna dificultad para realizarla por sí solo.

EJERCICIOS 6.6

1. En los casos siguientes, hallar los autovalores (reales o complejos) y los correspondientes autovectores de $\mathbb{C}^n$, y cuando haya un valor propio complejo μ hallar el correspondiente subespacio invariante en $\mathbb{R}^n$, y la matriz respecto de la base $\{\text{Real}\,\overline{u}, \text{Img}\,\overline{u}\}$ de la restricción a este subespacio, donde $\overline{u}$ es un autovector complejo de autovalor μ.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$.

2. Sea $A \in L(V)$ una aplicación lineal invertible y W un subespacio vectorial de V invariante por A. Demostrar que W es también invariante por A^{-1}.

3. a) Sea $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio. Demostrar que el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

es $-p(x)$.

b) Sea $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio. Demostrar que el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix}$$

es $p(x)$.

c) Generalizar los resultados anteriores para polinomios mónicos de grado n.

4. Considerar las siguientes afirmaciones:

i) Todo polinomio $p(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$.

ii) Toda aplicación lineal $A\colon V \to V$, donde V es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, posee un subespacio invariante de dimensión 1.

El mismo argumento usado para demostrar la Proposición 6.6.2 permite probar que i) $\Rightarrow$ ii). Demostrar que ii) $\Rightarrow$ i) (por lo que i) y ii) son equivalentes). Sugerencia: usar el apartado c) del ejercicio 3 de esta sección.

5. Sea $A = U + iV$ una matriz compleja de orden n. Consideremos la aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ inducida por A, es decir

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = ((U\vec{x} - V\vec{y})^t, (V\vec{x} + U\vec{y})^t).$$

Demostrar que A es real, es decir $V = 0$, si y solo si $S \circ \varphi = \varphi \circ S$ donde S es la aplicación de $\mathbb{R}^{2n}$ que tiene como matriz

$$S = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}.$$

6.7. El Teorema de Jordan

Con la experiencia acumulada en los ejemplos que hemos realizado en las secciones precedentes, nos disponemos a demostrar a continuación el Teorema de Jordan para matrices y aplicaciones lineales, que es uno de los teoremas más profundos del álgebra lineal.

El lector que desee comenzar aprendiendo cómo se obtienen matrices de Jordan de una matriz compleja puede pasar directamente a la sección 6.8. Para matrices reales debe esperar hasta la sección 6.9. Es conveniente, sin embargo, que lea el enunciado del Teorema de Jordan que se expone a continuación.

Denominaremos *matriz elemental de Jordan* de orden k y autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ a la matriz $J_k(\lambda)$ de orden k cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que valen λ, y los situados inmediatamente encima de la diagonal principal, que son unos. Por ejemplo:

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente.

Llamaremos *matriz de Jordan a* cualquier matriz cuadrada formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de la diagonal, de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ \hline & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{array}\right). \tag{7.1}$$

Teorema 6.7.1 (Teorema de ordan)

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ los valores propios distintos de A en $\mathbb{K}$. Sean $m_1, ..., m_r$ números naturales no nulos tales que

$$\prod_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I)^{m_i} = 0. \tag{7.2}$$

Entonces, existe una base B, llamada *base de Jordan* de V para A, respecto de la cual la matriz de A es de la forma (7.1).

Reflexionemos sobre la condición (7.2). Al escribir $(A - \lambda_i I)^{m_i}$ estamos usando una notación para escribir la composición de $A - \lambda_i I$ con sí misma m_i veces. Al escribir

$$\prod_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I)^{m_i}$$

estamos usando una notación para escribir la composición $(A - \lambda_1 I)^{m_1} \circ \cdots \circ (A - \lambda_r I)^{m_r}$. Observar que, aunque la composición de aplicaciones no es conmutativa, en este caso sí conmutan ya que A conmuta con sí misma y con la identidad.

De forma más general, si A es una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan y $p(x)$, $q(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ son dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces

$$p(A) \circ q(A) = q(A) \circ p(A). \tag{7.3}$$

La demostración se deja para el lector (ver ejercicio 5b)) observando que basta verificar $A \circ q(A) = q(A) \circ A$ para cualquier polinomio $q(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ y luego proceder por inducción en el grado del polinomio $p(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$.

La condición (7.2) dice que la aplicación $\prod_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I)^{m_i}$ es la aplicación nula. Si A es la matriz de la aplicación A en una cierta base, (7.2) dice que el producto de las matrices $(A - \lambda_i I)^{m_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, es la matriz nula.

El Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 6.5.2) asegura que $p_A(A) = 0$ donde $p_A(x) = |A - xI|$ es el polinomio característico de A. Si $p_A(x)$ pudiera factorizarse en $\mathbb{K}$, es decir,

$$p_A(x) = c \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i} \quad , \quad \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K},$$

tendríamos satisfecha la condición (7.2). Esto sucede si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ya que por el Teorema fundamental del álgebra todas las raíces de un polinomio con coeficientes complejos estan en $\mathbb{C}$ y son tantas como el grado del polinomio (contando su multiplicidad). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esto no sucede siempre, y por tanto, no siempre podrá usarse el Teorema de Jordan.

Comenzaremos enunciando y demostrando algunos resultados que nos serán útiles en la demostración del Teorema de Jordan.

Lema 6.7.2

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Si $q_1(x)$, ..., $q_r(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ son polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ tales que

$$\text{m.c.d. } (q_i(x), q_j(x)) = 1 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

entonces

$$\operatorname{Ker} q_i(A) \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A) \right) = \{\vec{0}\}, \qquad i = 1, ..., r.$$

Demostración. Comenzaremos demostrando que si fijamos $i_0 \in \{1, ..., r\}$, para cada $l \in \{1, ..., r\} \setminus \{i_0\}$ se tiene

$$\operatorname{Ker} q_l(A) \subset \operatorname{Ker} \left(\prod_{j \neq i_0} q_j(A) \right). \tag{7.4}$$

En efecto, si $\vec{v} \in \operatorname{Ker} q_l(A)$, se tiene que $q_l(A)(\vec{v}) = \vec{0}$, y usando (7.3) concluimos

$$\left(\prod_{j \neq i_0} q_j(A) \right)(\vec{v}) = \left(\prod_{j \neq i_0, l} q_j(A) \right) \circ q_l(A)(\vec{v}) = \left(\prod_{j \neq i_0, l} q_j(A) \right)(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Como la suma de subespacios vectoriales contenidos en uno fijo W es un subespacio vectorial de W, de (7.4) concluimos

$$\sum_{l \neq i_0} \operatorname{Ker} q_l(A) \subset \operatorname{Ker} \left(\prod_{j \neq i_0} q_j(A) \right). \tag{7.5}$$

Ahora bien, nuestra hipótesis implica que $q_{i_0}(x)$ y $\prod_{j \neq i_0} q_j(x)$ son polinomios primos entre sí. Por la identidad de Bezout (Lema 6.5.4) existen $a(x)$, $b(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ tales que

$$a(x) q_{i_0}(x) + b(x) \prod_{j \neq i_0} q_j(x) = 1.$$

Luego

$$a(A) \circ q_{i_0}(A) + b(A) \circ \prod_{j \neq i_0} q_j(A) = I.$$

Entonces, si $\vec{v} \in \operatorname{Ker} q_{i_0}(A) \cap \operatorname{Ker} \left(\prod_{j \neq i_0} q_j(A) \right)$ se tiene

$$\vec{v} = I(\vec{v}) = a(A) \circ q_{i_0}(A)(\vec{v}) + b(A) \circ \prod_{j \neq i_0} q_j(A)(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Esto prueba que

$$\operatorname{Ker} q_{i_0}(A) \cap \operatorname{Ker} \left(\prod_{j \neq i_0} q_j(A) \right) = \{\vec{0}\}. \tag{7.6}$$

De (7.5) y (7.6) se deduce la conclusión del lema. ■

Corolario 6.7.3

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Si $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ son valores propios distintos de A y $m_1, ..., m_r$ son números naturales no nulos

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i} \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{r} \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j} \right) = \{\vec{0}\}, \qquad i = 1, ..., r.$$

Demostración. Aplicar el Lema 6.7.2 con $q_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$, $i = 1, 2, ..., r$, observando que los $q_i(x)$ son primos entre sí. ■

Lema 6.7.4

Sean A_1, A_2: $V \to V$ dos aplicaciones lineales en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ que conmutan. Entonces

$$\dim \operatorname{Ker}(A_1 \circ A_2) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(A_1) + \dim \operatorname{Ker}(A_2). \tag{7.7}$$

Demostración. Sea $W = \operatorname{Ker}(A_1 \circ A_2)$ y consideremos $\tilde{A}_i = A_i|_W$, $i = 1, 2$. Como A_1 y A_2 conmutan,

$$\tilde{A}_i \colon W \to W, \qquad i = 1, 2.$$

Por el Teorema 5.4.2

$$\dim W = \dim \operatorname{Im}(\tilde{A}_2) + \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_2) \tag{7.8}$$

Pero $\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2 = 0$ en W por definición de W. Entonces $\operatorname{Im}(\tilde{A}_2) \subset \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1)$ ya que si $\vec{v} \in \operatorname{Im}(\tilde{A}_2)$, $\vec{v} = \tilde{A}_2(\vec{u})$ con $\vec{u} \in W$ y se tiene $\tilde{A}_1(\vec{v}) = \tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2(\vec{u}) = \vec{0}$. Luego $\dim \operatorname{Im}(\tilde{A}_2) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1)$, por lo que de (7.8) se deduce

$$\dim W \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1) + \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_2) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(A_1) + \dim \operatorname{Ker}(A_2).$$ ■

A continuación mostramos que el Lema 6.7.4 puede extenderse al caso de que se consideren varias aplicaciones lineales.

Lema 6.7.5

Sean $A_1, ..., A_r$: $V \to V$ aplicaciones lineales en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ que conmutan entre sí. Entonces

$$\dim \operatorname{Ker}(A_1 \circ \cdots \circ A_r) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \operatorname{Ker}(A_j).$$

Demostración. El Lema 6.7.4 nos da el resultado para dos aplicaciones lineales. Supongamos, por inducción, que el resultado es cierto para cualquier número s de aplicaciones

lineales B_1, ..., B_s en un espacio vectorial con $s < r$. Tomemos ahora A_1, ..., A_r. Sea $W_r = \operatorname{Ker}(A_1 \circ \cdots \circ A_r)$ y consideremos

$$\tilde{A}_1 = A_1|_{W_r} \circ \cdots \circ A_{r-1}|_{W_r} \quad , \quad \tilde{A}_2 = A_r|_{W_r}.$$

Como las A_i conmutan entre sí A_j: $W_r \to W_r$ y por tanto

$$\tilde{A}_i \colon W_r \to W_r \quad , \quad i = 1, 2.$$

Aplicamos el Lema 6.7.4 a $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ y W_r para obtener

$$\dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1) + \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_2).$$

Por la hipótesis de inducción para $A_1|_{W_r}$, ..., $A_{r-1}|_{W_r}$ deducimos

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \dim \operatorname{Ker}(A_j|_{W_r}) + \dim \operatorname{Ker}(A_2|_{W_r}) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \operatorname{Ker}(A_j). \end{aligned}$$

Pero $\operatorname{Ker}(\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) = W_r = \operatorname{Ker}(A_1 \circ \cdots \circ A_r)$ por lo que queda probado el resultado. ■

Lema 6.7.6

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Sean $q_1(x)$, ..., $q_r(x) \in P_{\mathbb{K}}[x]$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ tales que

$$\text{m.c.d.}\,(q_i(x), q_j(x)) = 1 \qquad \text{si} \qquad i \neq j.$$

Si $q_1(A) \circ \cdots \circ q_r(A) = \prod_{j=1}^{r} q_j(A) = 0$ se tiene que

$$V = \operatorname{Ker} q_1(A) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} q_r(A).$$

Demostración. Las aplicaciones $q_j(A)$, $j = 1$, ..., r, conmutan entre sí por (7.3). Por el Lema 6.7.5.

$$\dim \operatorname{Ker}\left(\prod_{j=1}^{r} q_j(A) \right) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim (\operatorname{Ker} q_j(A)).$$

Puesto que $\prod_{j=1}^{r} q_j(A) = 0$, se da la igualdad $\operatorname{Ker}\left(\prod_{j=1}^{r} q_j(A) \right) = V$ y tenemos

$$\dim (V) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim (\operatorname{Ker} q_j(A)).$$

La conclusión del Lema 6.7.2 y la fórmula de Grassmann (Proposición 4.4.2) nos permiten escribir

$$\dim (V) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \operatorname{Ker} q_j(A) = \dim \left(\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A) \right).$$

Pero $\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A) \subset V$ por lo que la desigualdad anterior nos permite concluir $V = \sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker} q_j(A)$.

Que esta sea una suma directa es debido a la conclusión del Lema 6.7.2. ■

Corolario 6.7.7

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal como en el Teorema de Jordan. Si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ son valores propios distintos de A y $m_1, ..., m_r$ son números naturales no nulos tales que

$$(A - \lambda_1 I)^{m_1} \circ \cdots \circ (A - \lambda_r I)^{m_r} = 0,$$

entonces

$$V = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_r I)^{m_r}.$$

Demostración. Aplicar el Lema 6.7.6 con $q_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$, $i = 1, ..., r$, observando que los $q_i(x)$ son primos entre sí. ■

* * *

Avancemos en la demostración del Teorema de Jordan (Teorema 6.7.1). Si λ es un valor propio de la aplicación A y s es un número natural no nulo, escribiremos

$$E_s(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^s$$

para simplificar la escritura, como ya hicimos en secciones precedentes.

Con esta notación, el Corolario 6.7.7 nos permite escribir

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{m_i}(\lambda_i).$$

Por el Lema 6.6.1, los $E_{m_i}(\lambda_i)$ son invariantes por A. En consecuencia (ver la observación del final de la sección 6.6) cada elección de una base B_i de $E_{m_i}(\lambda_i)$, $i = 1, ..., r$, nos da una base

$$B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$$

de V respecto de la cual la matriz de A es diagonal por cajas de la forma

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

donde cada J_{λ_i} es la matriz de la restricción de A a cada subespacio invariante $E_{m_i}(\lambda_i)$.

Ahora tenemos que elegir, para cada $i = 1, ..., r$, una base adecuada B_i de $E_{m_i}(\lambda_i)$ de manera que J_{λ_i} sea una matriz diagonal por cajas y cada caja sea una matriz elemental de Jordan.

Fijemos un valor propio λ de A y formemos la sucesión de núcleos

$$E_1(\lambda) \subset E_2(\lambda) \subset \cdots \subset E_n(\lambda) \subset \cdots \subset V.$$

Como todos ellos están contenidos en un espacio vectorial de dimensión finita existe un número natural no nulo s tal que $E_s(\lambda) = E_{s+1}(\lambda)$; sea m el menor de estos números naturales. Este número tiene la propiedad de que a partir de él todos los subespacios $E_{m+1}(\lambda)$, $E_{m+2}(\lambda)$, ..., coinciden con $E_m(\lambda)$. Este resultado está contenido en el siguiente lema:

Lema 6.7.8

Si $E_m(\lambda) = E_{m+1}(\lambda)$, entonces $E_m(\lambda) = E_q(\lambda)$ para todo $q > m$.

Demostración. La demostración la realizamos por inducción en r, donde $q = m + r$. Si $r = 1$ la conclusión coincide con la hipótesis y no es necesario demostrar nada. Supongamos que el lema es cierto para $q = m + r$ y demostrémoslo para $q = m + r + 1$. Sea $\vec{x} \in E_{m+r+1}(\lambda)$, es decir,

$$(A - \lambda I)^{m+r}(A - \lambda I)\vec{x} = (A - \lambda I)^{m+r+1}\vec{x} = \vec{0}.$$

Por tanto, $(A - \lambda I)\vec{x} \in E_{m+r}(\lambda) = E_m(\lambda)$ (por la hipótesis de inducción); entonces $\vec{0} = (A - \lambda I)^m(A-\lambda I)\vec{x} = (A-\lambda I)^{m+1}\vec{x}$ y, por tanto, $\vec{x} \in E_{m+1}(\lambda) = E_m(\lambda)$. Hemos probado que $E_{m+r+1}(\lambda) \subset E_m(\lambda)$, de donde se deduce la igualdad puesto que la otra inclusión es trivial de verificar. ■

Para cada $i = 2, 3, ..., m$ consideremos la aplicación lineal

$$L_i\colon E_i(\lambda)/E_{i-1}(\lambda) \to E_{i-1}(\lambda)/E_{i-2}(\lambda)$$

entre espacios cociente dada por

$$L_i(\vec{v} + E_{i-1}(\lambda)) = (A - \lambda I)(\vec{v}) + E_{i-2}(\lambda).$$

Cada L_i es una aplicación inyectiva, $i = 2, 3, ..., m$. En efecto, si $L_i(\vec{v} + E_{i-1}(\lambda)) = \vec{0} + E_{i-2}(\lambda)$ se tendría $(A - \lambda I)(\vec{v}) \in E_{i-2}(\lambda)$ y por tanto

$$(A - \lambda I)^{i-2}(A - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0}.$$

Es decir, $\vec{v} \in E_{i-1}(\lambda)$, luego $\vec{v} + E_{i-1}(\lambda) = \vec{0} + E_{i-1}(\lambda)$. En consecuencia, la imagen por L_i de una base de $E_i(\lambda)/E_{i-1}(\lambda)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente en $E_{i-1}(\lambda)/E_{i-2}(\lambda)$.

Sea $p_i = \dim E_i(\lambda)$, $i = 1, 2, ..., m$. Con $p_0 = 0$ se tiene

$$q_i = \dim E_i(\lambda)/E_{i-1}(\lambda) = p_i - p_{i-1}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Además, por ser cada L_i inyectiva, $i = 2, ..., m$, se tiene

$$q_m \leqslant q_{m-1} \leqslant \cdots \leqslant q_2 \leqslant q_1 = p_1 - p_0 = p_1 = \dim E_1(\lambda).$$

Escribamos la secuencia de aplicaciones inyectivas L_i como

$$E_m(\lambda)/E_{m-1}(\lambda) \xrightarrow{L_m} E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda) \xrightarrow{L_{m-1}} E_{m-2}(\lambda)/E_{m-3}(\lambda) \to \cdots \to E_2(\lambda)/E_1(\lambda) \xrightarrow{L_2} E_1(\lambda).$$

Construyamos ahora la base de Jordan que nos permitirá escribir cada matriz J_λ de (7.9) como una matriz diagonal por cajas y que cada caja sea una matriz elemental de Jordan.

1er Tomemos $S_m = \{\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m,q_m}\}$ en $E_m(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m,1} + E_{m-1}(\lambda), ..., \vec{v}_{m,q_m} + E_{m-1}(\lambda)\}$$

sea una base de $E_m(\lambda)/E_{m-1}(\lambda)$ (ver sección 4.5).

Como L_m es inyectiva, los vectores

$$\begin{aligned} \vec{v}_{m-1,1} + E_{m-2}(\lambda) &= L_m(\vec{v}_{m,1} + E_{m-1}(\lambda)) \\ &\vdots \\ \vec{v}_{m-1,q_m} + E_{m-2}(\lambda) &= L_m(\vec{v}_{m,q_m} + E_{m-1}(\lambda)) \end{aligned}$$

son linealmente independientes en $E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda)$. Sea

$$S_{m-1} = \{\vec{v}_{m-1,1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_m}\} \subset E_{m-1}(\lambda).$$

2o A los vectores de S_{m-1} obtenidos en el paso anterior añadir vectores $\vec{v}_{m-1,q_m+1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_{m-1}}$, en $E_{m-1}(\lambda)$ tales que

$$\{v_{m-1,j} + E_{m-2}(\lambda)\}_{j=1}^{q_{m-1}}$$

sea una base de $E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda)$ (ver sección 4.5).

Como L_{m-1} es inyectiva, los vectores

$$\begin{aligned} \vec{v}_{m-2,1} + E_{m-3}(\lambda) &= L_{m-1}(\vec{v}_{m-1,1} + E_{m-2}(\lambda)) \\ &\vdots \\ \vec{v}_{m-2,q_{m-1}} + E_{m-3}(\lambda) &= L_{m-1}(\vec{v}_{m-1,q_{m-1}} + E_{m-2}(\lambda)) \end{aligned}$$

son linealmente independientes en $E_{m-2}(\lambda)/E_{m-3}(\lambda)$. Construimos así

$$S_{m-2} = \{\vec{v}_{m-2,1}, ..., \vec{v}_{m-2,q_{m-1}}\} \subset E_{m-2}(\lambda).$$

Continuaríamos este proceso $m - 2$ veces, habiendo elegido

$$S_2 = \{\vec{v}_{2,1}, ..., \vec{v}_{2,q_3}\} \subset E_2(\lambda)$$

de manera que

$$\vec{v}_{2,1} + E_1(\lambda), ..., \vec{v}_{2,q_3} + E_1(\lambda)$$

sean linealmente independientes en $E_2(\lambda)/E_1(\lambda)$. En el siguiente paso se añaden vectores $\vec{v}_{2,q_3+1}, ..., \vec{v}_{2,q_2}$ en $E_2(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{2,j} + E_1(\lambda)\}_{j=1}^{q_2}$$

sea una base de $E_2(\lambda)/E_1(\lambda)$ (ver sección 4.5).

Como L_2 es inyectiva, los vectores

$$\vec{v}_{1,1} = L_2(\vec{v}_{2,1} + E_1(\lambda)), \ldots, \vec{v}_{1,q_2} = L_2(\vec{v}_{2,q_2} + E_1(\lambda))$$

son linealmente independientes en $E_1(\lambda)$. Construimos así $S_1 = \{\vec{v}_{1,1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_2}\} \subset E_1(\lambda)$ que es un conjunto de vectores linealmente independiente en $E_1(\lambda)$. Finalizar añadiendo vectores $\vec{v}_{1,q_2+1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_1}$ en $E_1(\lambda)$ de manera que

$$\{\vec{v}_{1,1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_m}, \ldots, \vec{v}_{1,q_2+1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_1}\}$$

sea una base de $E_1(\lambda)$.

Es conveniente que el lector observe el gráfico de la figura 6.3 en donde se esquematiza la construcción realizada. Tomemos los vectores de la tabla de la figura 6.3 por columnas de izquierda a derecha, y dentro de cada columna de abajo a arriba. Es decir

$$\begin{aligned} B_\lambda = {} & \{\vec{v}_{1,1}, \ldots, \vec{v}_{m,1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_m}, \ldots, \vec{v}_{m,q_m}\} \cup \\ & \cup \{\vec{v}_{1,q_m+1}, \ldots, \vec{v}_{m-1,q_m+1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_{m-1}}, \ldots, \vec{v}_{m-1,q_{m-1}}\} \cup \cdots \cup \\ & \cup \{\vec{v}_{1,q_3+1}, \vec{v}_{2,q_3+1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_2}, \vec{v}_{2,q_2}\} \cup \{\vec{v}_{1,q_2+1}, \ldots, \vec{v}_{1,q_1}\}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

El cardinal del conjunto B_λ es

$$\begin{aligned} q_m + q_{m-1} + \cdots + q_2 + q_1 &= (p_m - p_{m-1}) + (p_{m-1} - p_{m-2}) + \cdots + \\ &+ (p_2 - p_1) + (p_1 - p_0) = p_m - p_0 = p_m = \dim E_m(\lambda). \end{aligned}$$

Luego B_λ será una base de $E_m(\lambda)$ si demostramos que B_λ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Para ello supongamos que tenemos una combinación lineal de la forma

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j} \vec{v}_{i,j} = \vec{0}.$$

Observar que i, j recorren los índices de los vectores de B_λ. Si no todos los c_{ij} fueran cero sea r el máximo índice tal que $c_{r,s} \neq 0$ para algún s. Por tanto

$$\sum_{j=1}^{q_r} c_{r,j} \vec{v}_{r,j} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j} \vec{v}_{i,j} = \vec{0}.$$

En el espacio cociente $E_r(\lambda)/E_{r-1}(\lambda)$ se tiene la igualdad

$$\sum_{j=1}^{q_r} c_{r,j}(\vec{v}_{r,j} + E_{r-1}(\lambda)) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j}(\vec{v}_{i,j} + E_{r-1}(\lambda)) = \vec{0} + E_{r-1}(\lambda).$$

Pero $\vec{v}_{i,j} \in E_{r-1}(\lambda)$ para $i = 1, \ldots, r-1$, por lo que la igualdad anterior se transforma en

$$\sum_{j=1}^{q_r} c_{r,j}(\vec{v}_{r,j} + E_{r-1}(\lambda)) = \vec{0} + E_{r-1}(\lambda).$$

Los vectores $\{\vec{v}_{r,j} + E_{r-1}\}_{j=1}^{q_r}$ son base de $E_r(\lambda)/E_{r-1}(\lambda)$ por lo que concluimos que $c_{r,j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, q_r$. Esto contradice que $c_{r,s} \neq 0$ para algún s. Por tanto $c_{i,j} = 0$ para todo i, j.

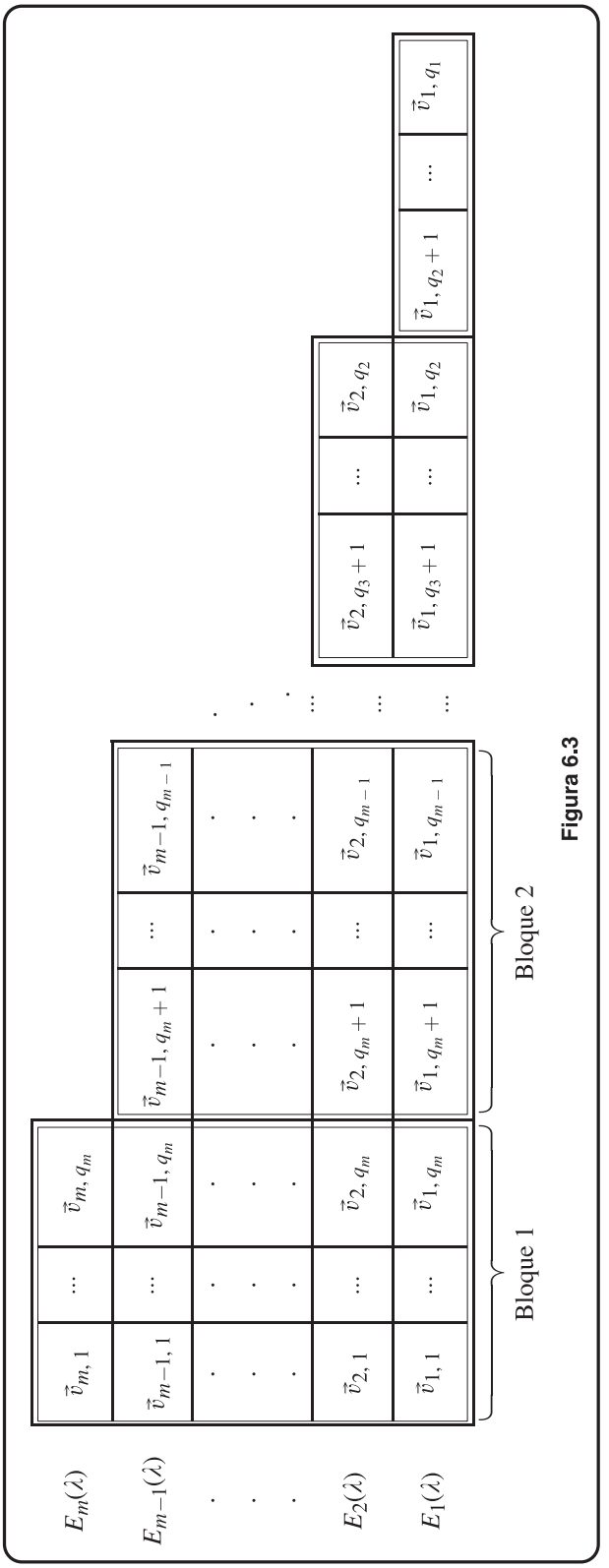

$E_m(\lambda)$
$E_{m-1}(\lambda)$
$E_2(\lambda)$
$E_1(\lambda)$
$\vec{v}_{m,1}$ ... $\vec{v}_{m,q_m}$
$\vec{v}_{m-1,1}$ ... $\vec{v}_{m-1,q_m}$ $\vec{v}_{m-1,q_m+1}$ ... $\vec{v}_{m-1,q_{m-1}}$
$\vec{v}_{2,1}$ ... $\vec{v}_{2,q_m}$ $\vec{v}_{2,q_m+1}$ ... $\vec{v}_{2,q_{m-1}}$ $\vec{v}_{2,q_3+1}$ ... $\vec{v}_{2,q_2}$
$\vec{v}_{1,1}$ ... $\vec{v}_{1,q_m}$ $\vec{v}_{1,q_m+1}$ ... $\vec{v}_{1,q_{m-1}}$ $\vec{v}_{1,q_3+1}$ ... $\vec{v}_{1,q_2}$ $\vec{v}_{1,q_2+1}$ ... $\vec{v}_{1,q_1}$
Bloque 1
Bloque 2

Figura 6.3

Veamos ahora cuál es la matriz de $A|_{E_m}(\lambda)$ en la base B_λ. Para los vectores de la primera columna de la izquierda de la tabla de la figura 6.3 tenemos

$$\left.\begin{array}{l} A(\vec{v}_{1,1}) = (A - \lambda I)(\vec{v}_{1,1}) + \lambda\vec{v}_{1,1} = \vec{0} + \lambda\vec{v}_{1,1} = \lambda\vec{v}_{1,1} \\ A(\vec{v}_{2,1}) = (A - \lambda I)(\vec{v}_{2,1}) + \lambda\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_{1,1} + \lambda\vec{v}_{2,1} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ A(\vec{v}_{m,1}) = (A - \lambda I)(\vec{v}_{m,1}) + \lambda\vec{v}_{m,1} = \vec{v}_{m-1,1} + \lambda\vec{v}_{m,1} \end{array}\right\}. \tag{7.11}$$

Esto produce una matriz elemental de Jordan de orden m y autovalor λ

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

El resto de las columnas del bloque 1 de la figura 6.3 también producen cajas de la forma $J_m(\lambda)$ sin mezclarse entre sí. Tenemos, por tanto, q_m matrices elementales de Jordan de la forma $J_m(\lambda)$ colocadas en la diagonal de J_λ. Análogamente, el bloque 2 de la figura 6.3 produce $q_{m-1} - q_m$ matrices elementales de Jordan de la forma $J_{m-1}(\lambda)$ colocadas en la diagonal de J_λ. Finalmente, el último bloque de la figura 6.3 produce $q_1 - q_2$ matrices elementales de Jordan de la forma $J_1(\lambda) = (\lambda)$ colocadas en la diagonal de J_λ.

Poniendo este resultado en (7.9) queda demostrado el Teorema de Jordan. ■

* * *

Sea A: $V \to V$ una aplicación lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Supongamos que el polinomio característico de A puede factorizarse en $P_{\mathbb{K}}[x]$ con factores lineales, es decir

$$p_A(x) = c \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{s_i} \tag{7.12}$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ y s_i números naturales no nulos (recordar que esto es siempre cierto cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pero no cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Por el Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 6.5.2) se cumple la condición (7.2) del Teorema de Jordan. En consecuencia, se puede elegir una base B de V respecto de la cual la matriz de A es de la forma (7.1).

Al construir la base B en la demostración del Teorema de Jordan hemos necesitado hallar para cada λ_i, $i = 1, ..., r$, el número natural no nulo m_i para el cual la sucesión de núcleos

$$E_1(\lambda_i) \subset E_2(\lambda_i) \subset \cdots \subset E_{m_i}(\lambda_i) \subset \cdots \subset V$$

se estabiliza; es decir $E_{m_i}(\lambda) = E_q(\lambda)$ para todo $q > m_i$ y m_i es el menor de estos números. Llamaremos a $E_{m_i}(\lambda_i)$ *autoespacio máximo* asociado con λ_i.

Aunque la condición para encontrar el autoespacio máximo asociado con λ_i es clara, puede resultar tediosa al tener que calcular las potencias de una matriz. El siguiente resultado nos dice

que hemos hallado el autoespacio máximo $E_{m_i}(\lambda_i)$ cuando $\dim E_{m_i}(\lambda_i) = s_i$, donde s_i es la multiplicidad de λ_i en el polinomio característico $p_A(x)$ (ver (7.12)).

Lema 6.7.9

Con las condiciones que acabamos de describir

$$\dim E_{m_i}(\lambda_i) = s_i, \qquad i = 1, ..., r.$$

Demostración. En la base de Jordan B dada en (7.10) la matriz de A es de la forma (7.9) y cada J_{λ_i} esta formada por yuxtaposición sobre su diagonal de matrices elementales de Jordan de distintos tamaños y autovalor λ_i. Como el polinomio característico no depende de la base elegida y cada caja J_{λ_i} tiene orden $p_{m_i} = \dim E_{m_i}(\lambda_i)$ se tiene

$$p_A(x) = p_J(x) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - x)^{p_{m_i}}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j.$$

Comparando esta expresión con (7.12) se deduce que $s_i = p_{m_i} = \dim E_{m_i}(\lambda_i)$, $i = 1, ..., r$. ■

EJERCICIOS 6.7

1. Escribir todos los tipos posibles de forma de Jordan de matrices de orden menor o igual que cuatro.

2. Sea A una matriz real de orden 2 y C la matriz de un cambio de base; demostrar directamente que traza (A) = traza $(C^{-1}AC)$, donde la traza de una matriz se define como la suma de los elementos de su diagonal principal.

3. a) Si A es una matriz de orden 3 y C la matriz de un cambio de base, demostrar que traza (A) = traza $(C^{-1}AC)$. [*Sugerencia*: utilizar el hecho de que el polinomio característico no depende de la base elegida.]

   b) Generalizar el resultado anterior para matrices de orden n.

4. a) Demostrar que $T^k - \lambda^k I = (T - \lambda I)(T^{k-1} + \lambda T^{k-2} + \cdots + \lambda^{k-1} I)$.

   b) Si $q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$ y $q(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m$, demostrar que: λ autovalor de $T \Rightarrow q(\lambda)$ autovalor de $q(T)$. (Este problema nos indica entre qué valores buscar los autovalores para casos sencillos.)

   c) Determinar los posibles autovalores que puede tener T si: 1) $T^2 = T$; 2) $T^2 = I$; 3) $T^n = I$, $n \geqslant 3$; 4) $T^2 = -I$.

   d) Si T es invertible y λ es autovalor de T, demostrar que λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

5. a) Supongamos que T y S conmutan, esto es, $TS = ST$. Demostrar que $\text{Ker}\,(S)$ e $\text{Img}\,(S)$ son invariantes por T.

   b) Probar que si p y q son polinomios, entonces $p(T)q(T) = q(T)p(T)$. En consecuencia, $\text{Ker}\,(q(T))$ e $\text{Img}\,(q(T))$ son invariantes por $p(T)$.

6. Dados $T, S \in L(V)$, $\dim V = n$, tales que ambos poseen n autovalores distintos dos a dos (no necesariamente iguales), probar que $TS = ST \Leftrightarrow T$ y S tienen los mismos autovectores.

7. Si λ_0 no es un autovalor de A, demostrar que $A - \lambda_0 I$ es un automorfismo de $E_p(\lambda)$, donde λ es un autovalor de A y $E_p(\lambda)$ es su autoespacio máximo.

* * *

Una aplicación lineal T se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = 0$; si, además, $T^{k-1} \neq 0$, a k se le llama *orden de nilpotencia de T*.

Dada $T \in L(V)$ nilpotente, se dice que es *nilcíclica* si existe $\vec{u} \in V$ tal que $V = L(\vec{u}, T\vec{u}, T^2\vec{u}, ..., T^{k-1}\vec{u})$, con $T^{k-1}\vec{u} \neq \vec{0}$.

8. Si T es nilcíclica con orden de nilpotencia k y $\vec{u} \in V$ es tal que $V = L(\vec{u}, T\vec{u}, ..., T^{k-1}\vec{u})$, demostrar que $\{\vec{u}, T\vec{u}, ..., T^{k-1}\vec{u}\}$ es una base de V.

9. Si $\vec{u}_1 = T^{k-1}\vec{u}$, $\vec{u}_2 = T^{k-2}\vec{u}$, ..., $\vec{u}_{k-1} = T\vec{u}$, $\vec{u}_k = \vec{u}$, con $\vec{u}$ y T como en el ejercicio 8, encontrar la matriz de T en esta base.

10. Si $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular T^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\lambda = 0$ es el único autovalor de un operador nilpotente (ver ejercicio 4).

6.8. OBTENCIÓN DE LA FORMA DE JORDAN COMPLEJA DE UNA MATRIZ

Ya hemos comentado en la sección anterior que el Teorema de Jordan se aplica cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ porque todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ puede factorizarse en factores lineales. En esta sección daremos ejemplos de cómo se obtiene la forma de Jordan compleja (a veces saldrá con elementos reales) de una aplicación lineal o de una matriz.

Comenzaremos haciendo un resumen de cómo se obtiene la base de Jordan, a modo de guía para seguir en los ejemplos de esta sección.

1) Dada una aplicación lineal A se comienza calculando los autovalores; sean estos $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$, con multiplicidades $s_1, ..., s_r$, respectivamente, con $s_1 + \cdots + s_r = n$ (n = dimensión del espacio vectorial V en el que está definida A).
2) Para cada autovalor λ se calcula la cadena de subespacios

$$E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq E_m(\lambda) = E_{m+1}(\lambda) = \cdots$$

donde $E_s(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^s$, $s = 1, 2, ...$ La secuencia anterior se estabiliza después de un cierto número de pasos m (el subespacio $E_m(\lambda)$ se denomina *autoespacio máximo* asociado a λ). El valor de m puede obtenerse sabiendo que $\dim E_m(\lambda)$ = multiplicidad de λ en $p_A(x)$.

Nota. Es conveniente ahora observar la figura 6.3.

3) Elegir $\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m,q_m}$ en $E_m(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m,1} + E_{m-1}(\lambda), ..., \vec{v}_{m,q_m} + E_{m-1}(\lambda)\}$$

sea una base de $E_m(\lambda)/E_{m-1}(\lambda)$ ($q_m = \dim E_m(\lambda) - \dim E_{m-1}(\lambda)$). Estos vectores forman la primera fila de la tabla de la figura 6.3.
4) Hallar

$$\vec{v}_{m-1,1} = (A - \lambda I)\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_m} = (A - \lambda I)\vec{v}_{m,q_m}$$

que son los q_m primeros vectores de la segunda fila de la tabla de la figura 6.3. Completar esta fila de la tabla con vectores $\vec{v}_{m-1,q_m+1}, ..., \vec{v}_{m-1,q_{m-1}}$ en $E_{m-1}(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m-1,j} + E_{m-2}(\lambda)\}_{j=1}^{q_{m-1}}$$

sea una base de $E_{m-1}(\lambda)/E_{m-2}(\lambda)$ ($q_{m-1} = \dim E_{m-1}(\lambda) - \dim E_{m-2}(\lambda)$).
5) Continuar el proceso anterior hasta obtener los elementos $\vec{v}_{1,1}, ..., \vec{v}_{1,q_m}, \vec{v}_{1,q_m+1}, ..., \vec{v}_{1,q_{m-1}}, ..., \vec{v}_{1,q_3+1}, ..., \vec{v}_{1,q_2}$ de $E_1(\lambda)$ que estan en la última fila. Si fuera necesario estos elementos se completan con los vectores $\vec{v}_{1,q_2+1}, ..., \vec{v}_{1,q_1}$ de manera que todos ellos sean una base de $E_1(\lambda)$.
6) Escribir la base B_λ en el siguiente orden: por columnas de izquierda a derecha y en cada columna de abajo hacia arriba (ver figura 6.3). La matriz de $A|_{E_m(\lambda)}$ en la base B_λ estará formada por matrices elementales de Jordan de la forma $J_k(\lambda)$ descritas al comienzo de la sección 6.7.
7) Repetir los pasos 2) a 6) para cada autovalor λ_i, $i = 1, ..., r$; por el Corolario 6.7.7, $B = B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_r}$ es la base de Jordan de A y en esta base la matriz de A es su forma de Jordan J.

i ra 6.4

EJEMPLO A. Tratemos de encontrar una forma de Jordan J de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y una matriz P tal que $AP = PJ$.

Puesto que $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$, los autovalores de A son $\lambda = 1$ (triple) y $\mu = 2$ (simple). Calculamos $E_1(1) = \text{Ker}\,(A - I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{Bmatrix},$$

$$E_1(1) = L\,\{(1, 0, 0, 0)\,, (0, 1, 0, 0)\}.$$

Calculamos $E_2(1) = \text{Ker}\,(A - I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4 = 0,$$

$$E_2(1) = L\,\{(1, 0, 0, 0)\,, (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Como $\dim\,(E_2(1)) = 3$, que es la multiplicidad de $\lambda = 1$, $E_2(1)$ es el autoespacio máximo correspondiente a $\lambda = 1$.

Como $E_2(1)/E_1(1)$ tiene dimensión $3 - 2 = 1$, tomamos

$$\vec{v}_{2,1} = (0, 0, 1, 0)$$

de manera que $\vec{v}_{2,1} + E_1(1)$ es base de $E_2(1)/E_1(1)$. Hallamos

$$\vec{v}_{1,1} = (A - I)(\vec{v}_{2,1}) = (2, -1, 0, 0) \in E_1(1).$$

Finalmente elegimos

$$\vec{v}_{1,2} = (1, 0, 0, 0) \in E_1(1)$$

de manera que $\{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{1,2}\}$ sea base de $E_1(1)$. Para

$$B_1 = \{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}, \vec{v}_{1,2}\},$$

base de $E_2(1)$ se tiene

$$A(\vec{v}_{1,1}) = (A - I)\vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{1,1} = \vec{v}_{1,1}$$

$$A(\vec{v}_{2,1}) = (A - I)\vec{v}_{2,1} + \vec{v}_{2,1} = \vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{2,1}$$

$$A(\vec{v}_{1,2}) = (A - I)\vec{v}_{1,2} + \vec{v}_{1,2} = \vec{v}_{1,2},$$

luego en la base B_1 la matriz de $A|_{E_2(1)}$ es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Finalmente calculamos $E_1(2) = \operatorname{Ker}(A - 2I)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} -x_1 & & + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ & -x_2 - & x_3 + 3x_4 = 0 \\ & & - x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3x_4 \end{array} \right\},$$

$$E_1(2) = L\{(0, 0, 3, 1)\}.$$

Tomando $\vec{v}_4 = (0, 0, 3, 1)$ se tiene que

$$B = \{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}, \vec{v}_{1,2}, \vec{v}_4\}$$

es una base de Jordan de A y su matriz de Jordan es

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

con $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz del cambio de base.

Ejemplo B. *Reducir la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *a su forma de Jordan y encontrar* P *tal que* $AP = PJ$.

Puesto que $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)^4(\lambda - 2)$, los autovalores de A son $\lambda = 1$ (cuádruple), $\mu = 2$. Calculamos $E_1(1) = \operatorname{Ker}(A - I)$:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$

$$E_1(1) = L\{(1, 0, 0, 0, 0)\}.$$

Calculamos $E_2(1) = \operatorname{Ker}(A - I)^2$:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $E_2(1)$ tiene por ecuaciones implícitas $4x_3 + 6x_4 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Por tanto:

$$E_2(1) = L\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}.$$

Calculamos $E_3(1) = \text{Ker}\,(A - I)^3$:

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$E_3(1) = L\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}.$$

Calculamos $E_4(1) = \text{Ker}\,(A - I)^4$:

$$(A - I)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$E_4(1) = L\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, -1)\}.$$

Como $\dim E_4(1) = 4$ es la multiplicidad de $\lambda = 1$, $E_4(1)$ es el autoespacio máximo. Como las dimensiones de $E_i(1)$, $i = 1, 2, 3, 4$ son 1, 2, 3, 4, basta elegir

$$\vec{v}_{4,1} = (0, 0, 1, -1) \in E_4(1)$$

puesto que $\vec{v}_{4,1} \notin E_3(1)$. A continuación tomar

$$\begin{aligned} \vec{v}_{3,1} &= (A - I)\vec{v}_{4,1} = (0, 0, 2, 0, 0) \in E_3(1) \\ \vec{v}_{2,1} &= (A - I)\vec{v}_{3,1} = (6, 4, 0, 0, 0) \in E_2(1) \\ \vec{v}_{1,1} &= (A - I)\vec{v}_{2,1} = (8, 0, 0, 0, 0) \in E_1(1). \end{aligned}$$

Para el conjunto $B_1 = \{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}, \vec{v}_{3,1}, \vec{v}_{4,1}\}$ se tiene

$$\begin{aligned} A(\vec{v}_{1,1}) &= (A - I)\vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{1,1} = \vec{v}_{1,1} \\ A(\vec{v}_{2,1}) &= (A - I)\vec{v}_{2,1} + \vec{v}_{2,1} = \vec{v}_{1,1} + \vec{v}_{2,1} \\ A(\vec{v}_{3,1}) &= (A - I)\vec{v}_{3,1} + \vec{v}_{3,1} = \vec{v}_{2,1} + \vec{v}_{3,1} \\ A(\vec{v}_{4,1}) &= (A - I)\vec{v}_{4,1} + \vec{v}_{4,1} = \vec{v}_{3,1} + \vec{v}_{4,1}. \end{aligned}$$

Luego la matriz de $A|_{E_4(1)}$ en la base B_1 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $\operatorname{Ker}(A - 2I) = E_1(2)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\},$$

$$E_1(2) = L\{(14, 4, 2, 1, 0)\}.$$

Tomar $\vec{v}_5 = (14, 4, 2, 1, 0)$. En la base

$$B = \{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}, \vec{v}_{3,1}, \vec{v}_{4,1}, \vec{v}_5\},$$

que es una base de Jordan de A, la matriz de la aplicación A es

$$J = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

y la matriz del cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

* * *

EJEMPLO C. Tratemos de hallar la forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores satisfacen la ecuación $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$ y, por tanto, son $\lambda = i$, $\mu = -i$ (ambos dobles).

Calculamos $E_1(i) = \operatorname{Ker}(A - iI)$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 - i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -iz_1 + z_2 - z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 - iz_3 = 0 \\ z_4 = (1 + i)z_2 \end{array} \right\},$$

$$E_1(i) = L\{(i, 0, 1, 0)\}.$$

Calculamos $E_2(i) = \text{Ker}\,(A - iI)^2$:

$$(A - iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2-2i & 2i & 1 \\ 0 & -2+2i & 0 & -2i \\ -2i & -2i & -2 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1+i)z_2 = iz_4 \\ 2z_1 + (1+i)z_2 - 2iz_3 = 0 \end{cases},$$

$$E_2(i) = L\{(i, 0, 1, 0), (0, 1 + i, 1, 2i)\}\,.$$

Puesto que $\dim E_2(i) = 2 =$ multiplicidad de i, aquí se estabiliza la cadena de subespacios. Tomamos

$$\vec{v}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \vec{v}_{1,1} = (A - iI)\vec{v}_{2,1} = \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de $A|_{E_2(i)}$ en la base $B_i = \{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}\}$ es

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Para calcular $E_1(-i) = \text{Ker}\,(A + iI)$ observamos que $A + iI = \overline{A - iI}$; luego el sistema $(A + iI)\vec{z} = \vec{0}$ es equivalente al sistema $(A - iI)\overline{\vec{z}} = \vec{0}$, que coincide con el sistema utilizado para calcular $\text{Ker}\,(A - iI)$ excepto que $\vec{z}$ es sustituido por $\overline{\vec{z}}$. Entonces

$$E_1(-i) = L\{(-i, 0, 1, 0)\}.$$

De manera similar se tiene

$$E_2(-i) = L\{(-i, 0, 1, 0), (0, 1 - i, 1, -2i)\},$$

Aquí se estabiliza esta cadena de subespacios ya que $\dim E_2(-i) = 2 =$ multiplicidad de $-i$. Podemos elegir

$$\vec{u}_{2,1} = (0, 1 - i, i, -2i) \quad , \quad \vec{u}_{1,1} = (-i, 0, 1, 0)$$

que son los vectores conjugados de $\vec{v}_{2,1}$ y $\vec{v}_{1,1}$ respectivamente. Como

$$A(\vec{v}_{1,1}) = (A - iI)\vec{v}_{1,1} + i\vec{v}_{1,1} = i\vec{v}_{1,1}$$

$$A(\vec{v}_{2,1}) = (A - iI)\vec{v}_{2,1} + i\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_{1,1} + i\vec{v}_{2,1}$$

$$A(\vec{u}_{1,1}) = (A + iI)\vec{u}_{1,1} - i\vec{u}_{1,1} = -i\vec{u}_{1,1}$$

$$A(\vec{u}_{2,1}) = (A + iI)\vec{u}_{2,1} - i\vec{u}_{2,1} = \vec{u}_{1,1} - i\vec{u}_{2,1}$$

la matriz

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right)$$

es la forma de Jordan (compleja) de A en la base $B = \{\vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}, \vec{u}_{1,1}, \vec{u}_{2,1}\}$.

* * *

EJEMPLO D. Considerar la aplicación lineal A: $\mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ dada por

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3x_1, 2x_2, x_2 + 2x_3, 4x_4 - 4x_5, x_4, -x_4 + 3x_5 + 2x_6)$$

en una cierta base. La matriz de A con respecto a esta base es

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Su polinomio característico es $p_A(x) = |A - xI| = (3 - x)(2 - x)^5$. Pongamos $\lambda_1 = 3$ (simple), $\lambda_2 = 2$ (quíntuple).

Para $\lambda_1 = 3$ tenemos

$$E_1(3) = L\{(1, 0, 0, 0, 0, 0)\},$$

con lo que podemos tomar $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Para $\lambda_2 = 2$ calculamos $E_1(2) = \text{Ker}\,(A - 2I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases},$$

$$E_1(2) = L\{(0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Calculamos $E_2(2) = \text{Ker}\,(A - 2I)^2$:

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-2&0\end{pmatrix};\qquad \begin{Bmatrix} x_1=0\\ x_4-2x_5=0\end{Bmatrix},$$

$$E_2(2)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\in\mathbb{C}^6:\quad x_1=0,\quad x_4-2x_5=0\}.$$

Se comprueba que

$$E_3(2)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\in\mathbb{C}^6:\quad x_1=0\},$$

por lo que $\dim E_3(2)=5=$ multiplicidad de λ_2. Tenemos las dimensiones $(p_1,p_2,p_3)=(2,4,5)$ por lo que la nomenclatura de la figura 6.3 es en este caso

$\vec{v}_{3,1}$	
$\vec{v}_{2,1}$	$\vec{v}_{2,2}$
$\vec{v}_{1,1}$	$\vec{v}_{1,2}$

Elegimos $\vec{v}_{3,1}=(0,0,0,1,0,0)$ de manera que $\vec{v}_{3,1}+E_2(2)$ es base de $E_3(2)/E_2(2)$ porque $\vec{v}_{3,1}\in E_3(2)\setminus E_2(2)$. Tomar

$$\vec{v}_{2,1}=(A-2I)\vec{v}_{3,1}=(0,0,0,2,1,-1)\in E_2(2).$$

Elegir $\vec{v}_{2,2}=(0,1,0,0,0,0)\in E_2(2)$ de manera que

$$\{\vec{v}_{2,1}+E_1(2),\vec{v}_{2,2}+E_1(2)\}$$

es base de $E_2(2)/E_1(2)$. Elegimos

$$\vec{v}_{1,1}=(A-2I)\vec{v}_{2,1}=(0,0,0,0,0,1)\in E_1(2)$$
$$\vec{v}_{1,2}=(A-2I)\vec{v}_{2,2}=(0,0,1,0,0,0)\in E_1(2)$$

Se tiene

$$A(\vec{v}_{1,1})=(A-2I)\vec{v}_{1,1}+2\vec{v}_{1,1}=2\vec{v}_{1,1}$$
$$A(\vec{v}_{2,1})=(A-2I)\vec{v}_{2,1}+2\vec{v}_{2,1}=\vec{v}_{1,1}+2\vec{v}_{2,1}$$
$$A(\vec{v}_{3,1})=(A-2I)\vec{v}_{3,1}+2\vec{v}_{3,1}=\vec{v}_{2,1}+2\vec{v}_{3,1}$$
$$A(\vec{v}_{1,2})=(A-2I)\vec{v}_{1,2}+2\vec{v}_{1,2}=2\vec{v}_{1,2}$$
$$A(\vec{v}_{2,2})=(A-2I)\vec{v}_{2,2}+2\vec{v}_{2,2}=\vec{v}_{1,2}+2\vec{v}_{2,2}.$$

Luego en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{v}_{1,1}, \vec{v}_{2,1}, \vec{v}_{3,1}, \vec{v}_{1,2}, \vec{v}_{2,2}\}$ la matriz de A es

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

EJERCICIOS 6.8

En los ejercicios siguientes hallar la forma de Jordan de la matriz dada y la matriz del cambio.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Calcular la forma de Jordan de la matriz A para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-2a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Hallar la forma canónica de Jordan de la aplicación derivación, D, en $P^{(3)}_{\mathbb{R}}[x]$.

6.9. FORMA DE JORDAN REAL DE MATRICES REALES CON AUTOVALORES COMPLEJOS

Aunque una aplicación lineal esté definida en un espacio vectorial real, su forma de Jordan, obtenida como en las secciones 6.7 y 6.8, puede ser compleja. Dos muestras se tienen en el ejemplo B de la sección 6.3 y en el ejemplo C de la sección 6.8. En esta sección trataremos de dar una «forma de Jordan real» de toda aplicación lineal definida en un espacio vectorial real de dimensión finita.

Si la forma de Jordan de una matriz A obtenida mediante el procedimiento de las secciones 6.7 y 6.8 es real, a esta se le llama *forma de Jordan real de A*; si, por el contrario, alguno de los autovalores de A es complejo se dará en esta sección su *forma de Jordan real*.

Comencemos con una matriz real A de orden 2. Si su polinomio característico tiene una raíz compleja $\lambda = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, también su conjugada $\overline{\lambda} = \alpha + i\beta$ es raíz. Hemos probado en la sección 6.3 que A es equivalente a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

y mostrado cómo se halla el cambio de base tomando las partes reales e imaginarias de un autovector complejo del autovalor λ. En el caso de matrices reales de orden 2 todas las posibilidades se han descrito en el Teorema 6.3.3.

Estudiemos ahora el caso de una matriz real A de orden 3. Si su polinomio característico tiene una raíz compleja, debe tener su conjugada como raíz, ya que el polinomio tiene coeficientes reales. Por tanto, al menos una de sus raíces debe ser real. Sean

$$\lambda_1 \in \mathbb{R},\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C},\ \lambda_3 = \alpha + \mathrm{i}\beta = \overline{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$$

con $\beta \neq 0$, los tres valores propios de A. Como son distintos, la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ (ver Proposición 6.2.5). Sea $\vec{u}_1$ un autovector real de A con autovalor λ_1 y sean $\vec{z}_2, \vec{z}_3$ vectores propios complejos de A con valores propios λ_2 y λ_3 respectivamente. En la base $\{\vec{u}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$ la matriz de la aplicación A es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la forma de Jordan real de A se procede de la siguiente manera. Escribir $\vec{z}_2 = \vec{x}_2 + i\vec{y}_2$ con $\vec{x}_2, \vec{y}_2$ vectores reales. De $A(\vec{z}_2) = (\alpha - i\beta)\vec{z}_2$ se deduce

$$A(\vec{x}_2) + iA(\vec{y}_2) = (\alpha - i\beta)(\vec{x}_2 + i\vec{y}_2) = (\alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2) + i(\alpha\vec{y}_2 - \beta\vec{x}_2)$$

por lo que se tiene

$$\left.\begin{aligned} A(\vec{x}_2) &= \alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{y}_2 \\ A(\vec{y}_2) &= -\beta\vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_2 \end{aligned}\right\}.$$

La matriz de A en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2\}$ es

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{array}\right)$$

que es una forma de Jordan real de A en este caso.

Teniendo en cuenta también los casos en los que los valores propios sean reales, del Teorema de Jordan (Teorema 6.7.1) se deduce el resultado siguiente.

Teorema 6.9.1

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de una cualquiera de las formas

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{array}\right)$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, y una matriz $R \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con determinante no nulo tal que

$$A = RJR^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan real* de A.

Observación. El Teorema 6.9.1 tiene también una versión para aplicaciones lineales $A\colon V \to V$, donde V es un espacio vectorial real de dimensión 3. Se invita al lector a que escriba el enunciado.

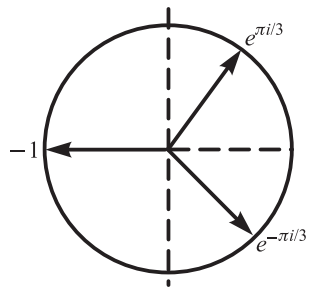
EJEMPLO A. *Encontrar una forma de Jordan real J de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y una matriz real R tal que $AR = RJ$.

La ecuación característica de A es $-\lambda^3 - 1 = 0$, con lo que sus autovalores son las soluciones de $\lambda^3 = -1$, es decir,

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = e^{-\pi i/3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{\lambda}_2 = e^{\pi i/3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$



Al autovalor $\lambda_1 = -1$ le corresponde la matriz elemental de Jordan $J_1(-1) = (-1)$ y al par de autovalores conjugados λ_2 y $\bar{\lambda}_2$ le corresponde la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Para encontrar R calculamos $E_1(-1) = \text{Ker}\,(A+I)$ y $E_1\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \text{Ker}\left(A - \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)I\right)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3x_1 = 3x_3 \\ x_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E_1(-1) = L\{(0,\,1,\,0)\}.$$

$$\begin{pmatrix} 3/2+(\sqrt{3}/2)i & 0 & -3 \\ 0 & -3/2+(\sqrt{3}/2)i & 0 \\ 1 & 0 & -3/2-(\sqrt{3}/2)i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z_2 = 0 \\ z_1 = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$E_1\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = L\left\{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\,0,\,1\right)\right\}.$$

Tomando

$$\vec{u}_1 = (0,\,1,\,0), \quad \vec{x}_2 = \left(\frac{3}{2},\,0,\,1\right), \quad \vec{y}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\,0,\,0\right)$$

se tiene

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El lector puede comprobar ahora que en la base $\{\vec{u}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2\}$ la aplicación dada por A tiene como matriz J.

* * *

Consideremos ahora $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Denotemos por A a la aplicación lineal definida en $\mathbb{R}^n$ que tiene a A como matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, esto es $A(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$. Si A tiene n autovalores reales (contando su multiplicidad) se puede aplicar el Teorema de Jordan (Teorema 6.7.1) y su forma de Jordan real es de la forma (7.1) con $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$.

Supongamos que al menos uno de sus autovalores es complejo. Sea $\lambda = \alpha - i\beta$ $(\beta \neq 0)$ este autovalor. Como A tiene elementos reales, $\bar{\lambda} = \alpha + i\beta$ es también autovalor de A ya que si $|A - \lambda I| = 0$ se tiene

$$|A - \bar{\lambda}I| = |\overline{A - \lambda I}| = 0.$$

La matriz A también define una aplicación lineal A: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $A(\vec{z}) = A \cdot \vec{z} = A \cdot (\vec{x} + i\vec{y}) = A \cdot \vec{x} + iA \cdot \vec{y}$, cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^n$ sigue siendo A.

Como las ecuaciones $(A - \lambda I)^k \cdot \vec{z} = \vec{0}$ son equivalentes a $(A - \overline{\lambda} I)^k \cdot \vec{z} = \vec{0}$, las bases de los autoespacios máximos $E_{m_1}(\lambda)$ y $E_{m_2}(\overline{\lambda})$, que producen la base de Jordan (ver figura 6.3) pueden elegirse conjugadas y $m_1 = m_2$.

Recordar que cada columna de la tabla de la figura 6.3 producía una matriz de Jordan elemental. Vamos a mostrar como se obtiene una matriz de Jordan elemental real a partir de cada una de estas columnas para el autovalor λ y su correspondiente columna de vectores conjugados para $\overline{\lambda}$. Sean

$$E = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \quad , \quad \overline{E} = \{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_m\}$$

los vectores de esta columna, con $\overline{w}_j$ conjugado de $\vec{v}_j$, $j = 1, ..., m$. Las relaciones (7.11) se escriben en este caso como

$$\left.\begin{aligned} A(\vec{v}_1) &= \lambda \vec{v}_1 \\ A(\vec{v}_j) &= \vec{v}_{j-1} + \lambda \vec{v}_j \quad , \quad j = 2, \ ..., \ m \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} A(\overline{w}_1) &= \overline{\lambda}\, \overline{w}_1 \\ A(\overline{w}_j) &= \overline{w}_{j-1} + \overline{\lambda}\, \overline{w}_j \quad , \quad j = 2, \ ..., \ m \end{aligned}\right\}. \tag{9.1}$$

Sean

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_j &= \mathrm{Re}\,(\vec{v}_j) = \frac{1}{2}\ (\vec{v}_j + \overline{w}_j) \\ \vec{y}_j &= \mathrm{Img}\,(\vec{v}_j) = \frac{1}{2i}\ (\vec{v}_j - \overline{w}_j) \end{aligned}\right\} \quad , \quad j = 1, ..., m, \tag{9.2}$$

vectores con coordenadas reales que son las partes reales e imaginarias de $\vec{v}_j$, respectivamente.

El conjunto de vectores dado en (9.2) es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$; en efecto, si tenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{y}_j = \vec{0} \quad , \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},$$

se tiene

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{\vec{v}_j + \overline{w}_j}{2} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \frac{\vec{v}_j - \overline{w}_j}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - i\beta_j)\vec{v}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + i\beta_j)\overline{w}_j. \end{aligned}$$

Como $E \cup \overline{E}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$ se tiene $\alpha_j - i\beta_j = 0$, $\alpha_j + i\beta_j = 0$, de donde se deduce $\alpha_j = \beta_j = 0$, $j = 1, ..., m$.

Utilizando (9.1) se tiene

$$\begin{aligned} A(\vec{x}_1) &= \frac{1}{2}\,[A(\vec{v}_1) + A(\overline{w}_1)] = \frac{1}{2}\,(\alpha - i\beta)\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\,(\alpha + i\beta)\overline{w}_1 \\ &= \alpha\, \frac{\vec{v}_1 + \overline{w}_1}{2} + \beta\, \frac{\vec{v}_1 - \overline{w}_1}{2i} = \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{y}_1, \end{aligned}$$

$$A(\vec{y}_1) = \frac{1}{2i}\,[A(\vec{v}_1) - A(\overline{\vec{w}}_1)] = \frac{1}{2i}\,(\alpha - i\beta)\vec{v}_1 - \frac{1}{2i}\,(\alpha + i\beta)\overline{\vec{w}}_1$$

$$= \alpha\,\frac{\vec{v}_1 - \overline{\vec{w}}_1}{2i} - \beta\,\frac{\vec{v}_1 + \overline{\vec{w}}_1}{2} = \alpha\vec{y}_1 - \beta\vec{x}_1.$$

De nuevo por (9.1) para $k = 2, ..., m$ se tiene

$$A(\vec{x}_k) = \frac{1}{2}\,[A(\vec{v}_k) + A(\overline{\vec{w}}_k)] = \frac{1}{2}\,[\vec{v}_{k-1} + (\alpha - i\beta)\vec{v}_k] + \frac{1}{2}\,[\overline{\vec{w}}_{k-1} + (\alpha + i\beta)\overline{\vec{w}}_k] =$$

$$= \vec{x}_{k-1} + \alpha\vec{x}_k + \beta\vec{y}_k\,,$$

$$A(\vec{y}_k) = \frac{1}{2i}\,[A(\vec{v}_k) - A(\overline{\vec{w}}_k)] = \frac{1}{2i}\,[\vec{v}_{k-1} + (\alpha - i\beta)\vec{v}_k] - \frac{1}{2i}\,[\overline{\vec{w}}_{k-1} + (\alpha + i\beta)\overline{\vec{w}}_k] =$$

$$= \vec{y}_{k-1} + \alpha\vec{y}_k - \beta\vec{x}_k\,.$$

Por tanto, si elegimos

$$B = \{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, ..., \vec{x}_m, \vec{y}_m\}$$

la matriz de la aplicación A restringida al espacio vectorial real generado por B es

$$\begin{pmatrix}
\begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ \hline\end{array} & & & \\
 & \begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ \hline\end{array} & & 0 \\
 & & \ddots & \\
 & & & \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \\ \hline\end{array}
\end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Esta matriz está formada por la yuxtaposición sobre su diagonal principal de las matrices $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, que corresponden a matrices de la aplicación lineal A restringida a subespacios invariantes de dimensión dos asociados a $\lambda = \alpha - i\beta$, con matrices identidad de orden 2 encima de la diagonal principal y ceros en el resto. Las matrices (9.3) son *matrices elementales de Jordan reales* para el autovalor complejo $\lambda = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$).

Con las indicaciones dadas ya podemos hallar matrices de Jordan reales, como se muestra en el siguiente ejemplo. El enunciado del teorema, así como la demostración de que siempre se obtiene una base con el procedimiento descrito se muestran después del ejemplo.

EJEMPLO B. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz del ejemplo C de la sección 6.8. Sabemos que sus autovalores son $\lambda = -i$, $\lambda = i$ (dobles) y los autoespacios máximos (complejos) son $E_2(-i)$, $E_2(i)$ y ambos tienen dimensión 2. Por el ejemplo C de la sección 6.8 una base de Jordan compleja para la aplicación definida por A es

$$\vec{v}_1 = (-i, 0, 1, 0),\ \vec{v}_2 = (0, 1 - i, 1, -2i),\ \vec{w}_1 = (i, 0, 1, 0),\ \vec{w}_2 = (0, 1 + i, 1, 2i).$$

Tomando

$$\vec{x}_1 = (0, 0, 1, 0),\ \vec{y}_1 = (-1, 0, 0, 0),\ \vec{x}_2 = (0, 1, 1, 0),\ \vec{y}_2 = (0, -1, 0, -2)$$

se tiene que $B = \{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2\}$ es base de $\mathbb{R}^4$ y en esta base la matriz de A es

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Este resultado puede comprobarse directamente aplicando A a cada uno de los vectores de B ya que

$$A(\vec{x}_1) = \vec{y}_1, \quad A(\vec{y}_1) = -\vec{x}_1, \quad A(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{y}_2, \quad A(\vec{y}_2) = \vec{y}_1 - \vec{x}_2.$$

Teorema 6.9.2 (Teorema de ordan real)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ siempre puede encontrarse una matriz $J \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ formada por yuxtaposición sobre la diagonal principal de matrices elementales de Jordan $J_k(\lambda)$ y matrices de la forma (9.3) con $\beta \neq 0$, y una matriz $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con determinante no nulo tal que

$$A = RJR^{-1}.$$

La matriz J se denomina *matriz de Jordan real* de A.

El lector puede escribir este resultado para aplicaciones lineales definidas sobre un espacio vectorial real de dimensión finita.

Demostración. El polinomio característico de A puede escribirse de la forma

$$p_A(x) = c \prod_{j=1}^{n_1} (x - \lambda_j)^{s_j} \cdot \prod_{j=1}^{n_2} (x - \mu_j)^{t_j},\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ \mu_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ distintos.} \tag{9.4}$$

Si $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$, puesto que A es real sabemos que $\bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$ es también raíz del polinomio característico. Como

$$(x - \mu_j)(x - \bar{\mu}_j) = (x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 = q_j(x),$$

a partir de (9.4) podemos escribir

$$p_A(x) = c \prod_{j=1}^{n_1} (x - \lambda_j)^{s_j} \cdot \prod_{j=1}^{m_2} [(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2]^{t_j}, \tag{9.5}$$

que es la factorización real de $p_A(x)$. La factorización se ha elegido de manera que todos los factores son distintos. Puesto que $p_A(A) = 0$ por el Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 6.5.2), por el Lema 6.7.6 podemos escribir

$$V = \left(\bigoplus_{j=1}^{n_1} \operatorname{Ker} (A - \lambda_j I)^{s_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m_2} \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j} \right). \tag{9.6}$$

Sean

$$E_1 = \bigoplus_{j=1}^{n_1} \operatorname{Ker} (A - \lambda_j I)^{s_j} \quad , \quad E_2 = \bigoplus_{j=1}^{m_2} \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}.$$

En cada subespacio $\operatorname{Ker} (A - \lambda_j I)^{s_j}$ puede encontrarse una base de Jordan como se indicó en la sección 6.7, que estará formada por vectores reales ya que $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Además, aplicando el Lema 6.7.9 a $A|_{E_1}$ se tiene que

$$\dim \operatorname{Ker} (A - \lambda_j I)^{s_j} = s_j, \qquad j = 1, ..., n_1. \tag{9.7}$$

La base que hallaremos en $\operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$ se hará siguiendo el procedimiento descrito antes del ejemplo B. Como

$$\prod_{k=1}^{n_2} (x - \mu_k)^{t_k} = \prod_{j=1}^{m_2} (x - \mu_j)^{t_j} \prod_{j=1}^{m_2} (x - \bar{\mu}_j)^{t_j}$$

con $2m_2 = n_2$ podemos considerar los autoespacios complejos

$$\operatorname{Ker} (A - \mu_j I)^{t_j} \quad , \quad \operatorname{Ker} (A - \bar{\mu}_j I)^{t_j}.$$

En cada uno de estos autoespacios tenemos una base de Jordan compleja

$$E = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{t_j}\} \quad , \quad \overline{E} = \{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_{t_j}\}$$

que pueden elegirse conjugadas, es decir $\overline{w}_i$ es conjugado de $\vec{v}_i$, $i = 1, ..., t_j$. El cardinal de cada una de estas bases es t_j por el Lema 6.7.9.

Escribimos ahora

$$\vec{x}_i = \frac{\vec{v}_i + \overline{w}_i}{2} \quad , \quad \vec{y}_i = \frac{\vec{v}_i - \overline{w}_i}{2i} \quad , \quad i = 1, ..., t_j.$$

Un razonamiento similar al que sigue a (9.2) prueba que

$$B = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_{t_j}, \vec{y}_1, ..., \vec{y}_{t_j}\} \tag{9.8}$$

es un conjunto de vectores linealmente independiente. Además $B \subset \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$ ya que

$$\begin{aligned} q_j(A)^{t_j}(\vec{x}_i) &= \frac{1}{2}\left[q_j(A)^{t_j}(\vec{v}_i) + q_j(A)^{t_j}(\vec{w}_i)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[(A - \bar{\mu}_j I)^{t_j}(A - \mu_j I)^{t_j}(\vec{v}_i) + (A - \mu_j I)^{t_j}(A - \bar{\mu}_j I)^{t_j}(\vec{w}_j)\right] = \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

porque $\vec{v}_i \in \operatorname{Ker}(A - \mu_j I)^{t_j}$, $\vec{w}_i \in \operatorname{Ker}(A - \bar{\mu}_j I)^{t_j}$. Nótese que en las igualdades anteriores se ha usado la propiedad de conmutación (7.3). Por tanto $\vec{x}_i \in \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$. De manera similar se prueba que $\vec{y}_i \in \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$, $i = 1, ..., t_j$.

Lo único que falta probar es que B, dada en (9.8), es base de $\operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$. Ya sabemos que

$$\dim \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j} \geqslant 2t_j\,, \tag{9.9}$$

ya que B es un conjunto de vectores linealmente independiente en $\operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$. De (9.5)

$$n = \sum_{j=1}^{n_1} s_j + 2\sum_{j=1}^{m_2} t_j$$

y de (9.6) y (9.7)

$$\begin{aligned} n &= \sum_{j=1}^{n_1} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{s_j} + \sum_{j=1}^{m_2} \dim \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j} = \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} s_j + \sum_{j=1}^{m_2} \dim \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}. \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{m_2} \dim \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j} = \sum_{j=1}^{m_2} 2t_j$$

y como se tiene (9.9) ha de ser $\dim \operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j} = 2t_j$, $j = 1, ..., m_2$. Por tanto, B es base de $\operatorname{Ker} q_j(A)^{t_j}$.

La ordenación de los elementos de B para obtener matrices de Jordan del tipo (9.3) se hace siguiendo el orden señalado en la demostración del Teorema de Jordan (ver figura 6.3) y alternando las partes reales e imaginarias como en la base en la que se tiene (9.3). ■

EJERCICIOS 6.9

1. Encontrar la forma de Jordan real de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Sea $G = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de $G \in L(\mathbb{R}^3)$ en la base canónica, con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Hallar los subespacios invariantes de G, así como los autovalores.

3. Sea $G = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ la matriz de $G \in L(\mathbb{R}^2)$ en la base canónica.

   a) Hallar los autovalores y autovectores de G.

   b) Probar que G es un giro de ángulo φ determinado por $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \operatorname{sen}\varphi$.

   c) Si $\vec{z} = \vec{u} + i\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ es autovector de G, probar que la matriz de G en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es A^t ó A dependiendo de que el autovalor correspondiente sea $\lambda = \alpha + i\beta$ ó $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$.

4. a) Sea V un espacio vectorial real y sea $V_{\mathbb{C}} = \{x_1 + ix_2 : x_1, x_2 \in V\}$ con las operaciones

$$(x_1 + ix_2) + (y_1 + iy_2) = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2),$$
$$(a + ib)(x_1 + ix_2) = (ax_1 - bx_2) + i(bx_1 + ax_2).$$

   Demostrar que $V_{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial complejo.

   b) Si $A \in L(V)$, demostrar que $A_{\mathbb{C}}$ definida en $V_{\mathbb{C}}$ por $A_{\mathbb{C}}(x_1 + ix_2) = A(x_1) + iA(x_2)$ es una aplicación lineal en $V_{\mathbb{C}}$.

5. Sea λ un número complejo con $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Sea J una aplicación lineal en $\mathbb{C}^4$ tal que en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ tiene por matriz

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{array}\right).$$

   a) Demostrar que los vectores $S = \{\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_1, \vec{v}_3, \overline{\lambda}\vec{v}_3\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

   b) Pongamos $(x - \lambda)(x - \overline{\lambda}) = x^2 + a_1x + a_0$. Demostrar que la matriz de J restringida al subespacio vectorial real $L(S)$ es

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right).$$

Biografía

amille ordan nació el 5 de enero de 1838 en Lyon y murió el 20 de enero de 1922 en Milán. Fue un matemático cuyos trabajos en grupos de permutaciones y en la teoría de ecuaciones hizo posible un perfecto entendimiento de las teorías del matemático francés Évariste Galois.

Jordan comenzó trabajando en geometría. Su *Traité des substitutions et des equations algébriques* (1870) (*Tratado sobre las permutaciones y ecuaciones algebraicas*), por el cual obtuvo el premio Poncelet de la Academia de Ciencias de Francia, fue fundamental en el entendimiento de la teoría de Galois sobre los grupos de permutaciones, lo cual fue aplicado para la resolución de ecuaciones algebraicas. También resolvió un problema propuesto por Niels Henrick Abel acerca de la no solubilidad de una cierta ecuación algebraica mediante radicales. Jordan publicó sus lecciones y sus investigaciones en análisis en *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (3 vols., 1882) (*Curso de análisis de la Escuela Politécnica*).

En la tercera edición (1909-1915) de su trabajo en análisis, la cual contiene muchas más investigaciones de Jordan que la primera, trató la teoría de funciones desde un punto de vista moderno, trabajando con funciones de variación acotada. Las álgebras de Jordan se llaman así en su honor.

En topología, Jordan probó (1887) que un arco simple no divide al plano y que una curva cerrada simple divide a un plano en dos partes. A pesar de que estas afirmaciones son intuitivamente obvias, su demostración requiere sofisticados métodos.

C. Jordan fue profesor de matemáticas en la École Polytechnique (París, 1876-1912). También fue editor de la revista matemática *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1885-1922).

Ejercicios de repaso

Capítulos 1 a 6.

A continuación presentamos varios ejercicios que pueden servir para repasar los conceptos introducidos anteriormente. Los ejercicios del 1 al 27 están ordenados de acuerdo con el orden de los capítulos de este libro. El resto son problemas que se han propuesto en varias convocatorias a los alumnos de primer curso de los estudios en Matemáticas y Físicas de la Universidad Autónoma de Madrid.

1. Utilizar el método de eliminación de Gauss para encontrar todas las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & + & x_2 & - 2\,x_3 & + & x_4 & = 1 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & & + 3\,x_4 & = -2 \\ 4\,x_1 & + & x_2 & - 4\,x_3 & + 6\,x_4 & = 0 \end{array}\right\}.$$

2. Sea r el mayor número de soluciones linealmente independientes del sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & + 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & - & 3\,x_4 & = 0 \\ 3\,x_1 & + 5\,x_2 & + & 6\,x_3 & - & 4\,x_4 & = 0 \\ 4\,x_1 & + 5\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 3\,x_4 & = 0 \\ 3\,x_1 & + 8\,x_2 & + 24\,x_3 & & - 19\,x_4 & & = 0 \end{array}\right\}.$$

   Hallar r y encontrar r soluciones linealmente independientes de este sistema.

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = 1 \end{array}\right\}.$$

4. Estudiar la compatibilidad o incompatibilidad del sistema

$$\left.\begin{array}{rrrl} & + & y + a & = 1 \\ & + & by + & = 1 \\ 2 & + & y + & = 1 \end{array}\right\}$$

según los valores reales de a y b y encontrar sus soluciones en los casos en que sea compatible.

5. Sean a y b dos números reales, no nulos y distintos. Estudiar el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de $\in \mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} & b & a & b \\ b & & b & a \\ a & b & & b \\ b & a & b & \end{pmatrix}.$$

6. Hallar la inversa de la siguiente matriz siempre que sea posible:

$$= \begin{pmatrix} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

7. Encontrar todos los vectores $\vec{} \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\vec{}) = -\vec{}$, donde

$$(\ _1,\ \ _2,\ \ _3) = (-2\ _1 +\ \ _3,\ -\ \ _2,\ -\ \ _1).$$

8. a) Sean $\vec{}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{}_2 = (0, 1, 1)$ y $\vec{}_3 = (3, -1, a)$. Decir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $= \{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Si es la base anterior con $a = 1$ y $(\ '_1,\ \ '_2,\ \ '_3)$ son las coordenadas del vector $(\ _1,\ \ _2,\ \ _3) \in \mathbb{R}^3$ respecto de la base , hallar la ecuación en coordenadas $(\ '_1,\ \ '_2,\ \ '_3)$ del plano

$$\pi\colon 2\ _1 -\ \ _2 + 3\ \ _3 = 0.$$

   c) Hallar un cambio de coordenadas $(\ ''_1,\ \ ''_2,\ \ ''_3)$ tales que la ecuación de π sea $\ ''_3 = 0$.

9. Calcular el siguiente determinante de orden $n + 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}.$$

10. Probar que

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 & a_1 - b_4 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 & a_2 - b_4 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 & a_3 - b_4 \\ a_4 - b_1 & a_4 - b_2 & a_4 - b_3 & a_4 - b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Si $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ no es invertible, demostrar que existe $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\neq 0$, tal que $= 0$.

12. En los siguientes casos hallar los valores de para los cuales el determinante de la matriz dada es nulo:

a) $= \begin{pmatrix} 3- & -1 & 0 \\ 6 & -3- & 2 \\ 8 & -6 & 5- \end{pmatrix}$ b) $= \begin{pmatrix} 4- & -5 & 7 \\ 1 & -4- & 9 \\ -4 & 0 & 5- \end{pmatrix}$

c) $= \begin{pmatrix} 3- & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5- & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3- & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1- \end{pmatrix}$.

13. a) Encontrar la matriz del cambio de base de $= \{1, \ , \ ^2, \ ^3, \ ^4\}$ a $' = \{1, \ -1, (\ -1)^2, (\ -1)^3, (\ -1)^4\}$ en $^{(4)}_{\mathbb{R}}[\ ]$.

b) Encontrar las coordenadas del polinomio

$$(\ ) = 5 + 4\ + 3\ ^2 + 2\ ^3 + \ ^4$$

con respecto a la base $'$.

14. Encontrar la dimensión y una base del subespacio vectorial generado por los vectores

$$\vec{}_1 = (1, 0, 0, -1), \quad \vec{}_2 = (2, 1, 1, 0), \quad \vec{}_3 = (1, 1, 1, 1),$$
$$\vec{}_4 = (1, 2, 3, 4), \quad \vec{}_5 = (0, 1, 2, 3).$$

Encontrar la ecuaciones cartesianas de este subespacio.

15. Dados los vectores $\vec{}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{}_2 = (3, 0, 1)$ y $\vec{}_3 = (1, 2, -3)$, determinar el subespacio que generan y hallar la intersección de dicho subespacio con el generado por $\vec{v}_1 = (5, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 1)$.

16. a) Encontrar las ecuaciones de la simetría en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la recta $(\ , y, \ ) = t(-1, 1, 2)$.

b) Hallar las ecuaciones de la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $+ y - \ = 0$.

17. Si , : $\to$ son aplicaciones lineales, demostrar que $\text{Ker}(\ ) \cap \text{Ker}(\ ) \subset \text{Ker}(\ + \ )$.

18. Sean $\to$ $\to$ aplicaciones lineales. Si $\circ$ es suprayectiva y $\dim(\ ) = \dim(\ )$, probar que y son suprayectivas.

19. a) Sea $\in L(\mathbb{R}^{2n+1})$; demostrar que $\text{Ker}(\ ) \neq \text{Img}(\ )$.

b) Sea $\in L(\mathbb{R}^{2n})$; demostrar que $\text{Ker}(\ ) = \text{Img}(\ )$ si y solo si $^2 = \ \circ \ = 0$ y $\dim(\text{Img}(\ )) = n$.

20. a) Hallar las ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Ker}(\ )$ y de $\mathrm{Img}(\ )$, si $\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dada por

$$(\ _1,\ _2,\ _3) = (\ _1 + 2\ _2 + \ _3,\ -\ _1 + 2\ _2,\ 2\ _2 + \ _3).$$

b) Encontrar la intersección de $\mathrm{Ker}(\ )$ e $\mathrm{Img}(\ )$.

21. Encontrar la forma de Jordan de las matrices

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

indicando el cambio de base.

22. Encontrar la forma de Jordan de $\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y calcular $\ ^3$.

23. Decir si la matriz $\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable justificando la respuesta.

24. Encontrar la forma de Jordan de las matrices

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ambas de orden n.

25. Dada la matriz $\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 15 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

a) El polinomio característico y la forma de Jordan de $\ $.

b) $-\ ^3 + 4\ ^2 - 5\ + 2$.

c) $(\ )$, donde $(\ ) = -\ ^6 + 4\ ^5 - 5\ ^4 + 2\ ^3 - 3$.

26. Sea $\ _n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que $\ _n$ es diagonalizable para todo n.

b) Calcular $\ _n^{-1}$ cuando exista.

c) Si $\ _n^{-1}$ no existe, encontrar $\mathrm{Ker}(\ _n)$ e $\mathrm{Img}(\ _n)$.

27. Encontrar (razonadamente) los autovalores de ^{10} si es la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

* * *

28. Discutir, según los valores reales de a y b, el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrl} a & - & y + 2 & = 1 \\ & + & ay - 4 & = 0 \\ - & + & y - 2 & = b \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

29. Encontrar bases del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal L: $^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ] \to {}^{(2)}_{\mathbb{C}}[\ ]$ dada por

$$L(a^{\ 3} + b^{\ 2} + \quad + \ ) = (a - \quad + 2\ )^{\ 2} + (-2a + b)\ \ + (b - 2\ \ + 4\ ).$$

30. a) Estudiar si la aplicación $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\ _1,\ \ _2,\ \ _3) = \frac{1}{6}(-4\ _1 + 4\ _2, 5\ _1 + 4\ _2, -\ _1 - 2\ _2 - 6\ _3)$$

es diagonalizable.

b) Encontrar los subespacios invariantes de dimensión 1 de la aplicación .

31. La suma de tres números positivos no nulos es 10; el primero, más el doble del segundo, menos el triple del tercero es 5 y el primero, más el triple del segundo, menos 7 veces el tercero es 0. Encontrar estos tres números.

32. Dados los conjuntos de vectores $_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y $_2 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$, determinar:

a) La relación de inclusión entre $L(\ _1)$ y $L(\ _2)$.

b) $L(\ _1) \cap L(\ _2)$.

c) $L(\ _1) + L(\ _2)$.

33. Encontrar la matriz, en la base canónica, de la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que lleva $\vec{}$ en $\vec{v}$, donde

$$\vec{}_1 = (2, 3, 5), \quad \vec{}_2 = (0, 1, 2), \qquad \vec{}_3 = (1, 0, 0),$$
$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 1, -1), \quad \vec{v}_3 = (2, 1, 2).$$

34. Estudiar para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, los vectores $\vec{}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{}_2 = (a, 1, 1, a)$, $\vec{}_3 = (2, 0, 2, 0)$ y $\vec{}_4 = (-1, a, 1, a)$ son linealmente dependientes y encontrar la relación que existe entre estos vectores para los valores de a que los hagan linealmente dependientes.

35. Se considera la base de $\mathbb{C}^3$ siguiente:

$$= \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 2)\}$$

y la aplicación lineal , de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^2$, que cumple:

$$(1, 1, 1) = (i, 1), \quad (1, 1, 0) = (1, -i), \quad (0, -1, 2) = (2 + i, 1 - 2i).$$

a) Determinar la matriz de en las bases canónicas de $\mathbb{C}^3$ y $\mathbb{C}^2$.

b) Determinar bases del núcleo y de la imagen de la aplicación .

36. Estudiar la posibilidad de diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ según los distintos valores de a.

Capítulo 7

La geometría del plano y del espacio.

7.1. Rectas en un plano.

7.2. Rectas y planos en el espacio.

7.3. Distancias y ángulos. Producto escalar.

7.4. Figuras sencillas en el plano y en el espacio: sus ecuaciones.

7.5. Áreas y volúmenes. Producto vectorial.

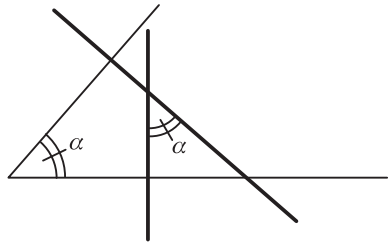
Introducción

La geometría es la rama de la matemática que estudia la forma y el tamaño de las figuras, así como las trasformaciones que sobre ellas se ejercen. Dependiendo de que las figuras estén en un plano o en el espacio se obtienen las geometrías planas o tridimensionales.

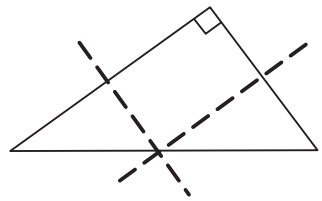
La antigua civilización griega poseía muchos conocimientos acerca de la geometría. Estos conocimientos fueron recogidos por uno de sus mejores exponentes, Euclides, que los recopiló en un libro denominado *Lo elemento* . La traducción de este libro, que llegó a Europa a través de la civilización árabe, ha sido la base de todo el estudio de la geometría hasta finales del siglo XIX. *Lo elemento* están basados en un sistema de verdades evidentes, denominadas *a ioma* , a partir de las cuales se deducen las propiedades de las figuras mediante un razonamiento lógico.

Ejemplos de propiedades de las figuras son los siguientes:

1) Los ángulos formados por rectas perpendiculares entre sí son iguales.



2) Las mediatrices de los catetos de un triángulo rectángulo se cortan en el punto medio de la hipotenusa.



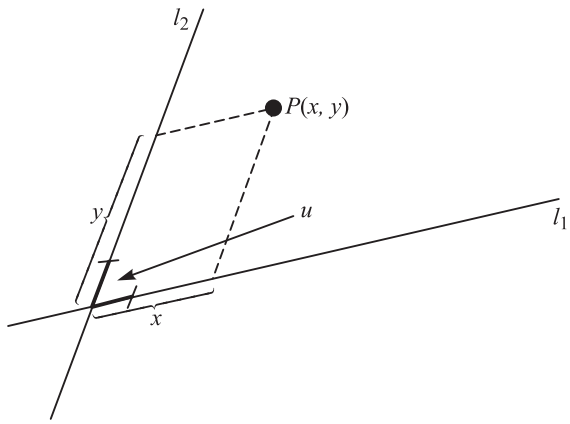
En el siglo XVII el filósofo y matemático francés R. Descartes introdujo la noción de coordenadas de un punto; todo punto tiene una representación con respecto a unas rectas dadas que se cortan. Los trabajos de los matemáticos durante los dos siglos siguientes mostraron que las propiedades geométricas de las figuras pueden demostrarse más fácilmente útilizando el sistema de representación mediante coordenadas cartesianas. Esta forma de estudiar la geometría se denomina *geometría analíti a*.

La geometría analítica sustituyó a la geometría de *Lo elemento* de Euclides a finales del siglo XIX y actualmente es la forma más extendida de estudiar la geometría.

La geometría analítica del plano y del espacio ocupará gran parte de nuestra exposición en este capítulo; dedicaremos también alguna sección a estudiar propiedades de las figuras desde el punto de vista euclídeo.

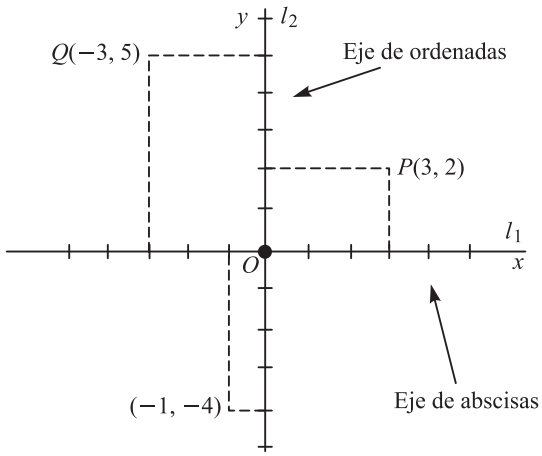
7.1. RECTAS EN UN PLANO

Dadas dos rectas en un plano que se cortan en un punto , cualquier otro punto del plano queda determinado por dos números que reciben el nombre de *om onente* con respecto a las rectas dadas. Estas componentes se obtienen de la siguiente manera. Fijada una unidad de medida en cada una de las rectas l_1, l_2, todo punto del plano tiene como componentes e y, donde es la distancia, medida con la unidad , del punto a la recta l_2 siguiendo una paralela a l_1, e y es la distancia del punto a la recta l_1 siguiendo una paralela a l_2, midiendo la distancia con respecto a la unidad de medida (figura 7.1).



i ra 7.1

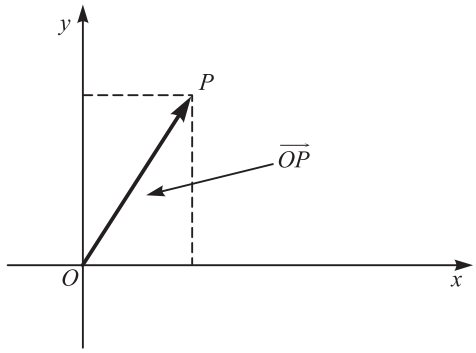
Si las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares, diremos que tenemos un sistema de coordenadas *re tang lare* o *arte iana* . La primera componente se denomina *ab i a* del punto y la segunda *or ena a*. De acuerdo con esta nomenclatura la recta l_1 se denomina *e e e ab i a* y l_2 se denomina *e e e or ena a* , denotándose también por y , respectivamente. A la izquierda de en la recta l_1 y por debajo de en la recta l_2 se toman medidas negativas. El punto de intersección se denomina *origen e oor ena a* (figura 7.2)



i ra 7.2

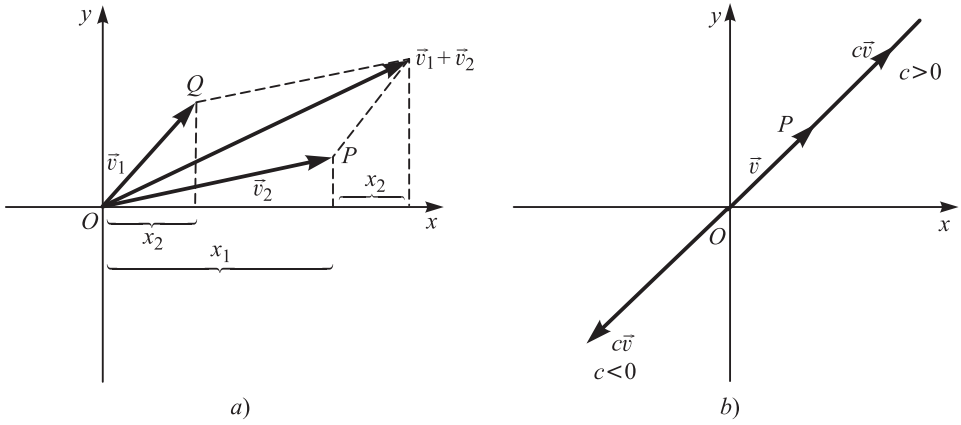
Un plano dotado de un sistema de coordenadas se designa por $\mathbb{R}^2$.

Otra forma de tratar a los puntos de $\mathbb{R}^2$ es considerarlos como el extremo de un vector cuyo origen es el origen de coordenadas (véase la figura 7.3).



i ra 7.3

El álgebra de los vectores se ha estudiado en la sección 1.2. La suma de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es la diagonal del paralelogramo que tiene como lados los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ (véase figura 7.4.*a*)). El producto de un vector $\vec{v}$ por un número real es otro vector cuyo extremo es el punto que tiene como componentes veces las componentes de $\vec{v}$; el vector $\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$ si es positivo y distinto sentido si es negativo (ver figura 7.4.*b*)).



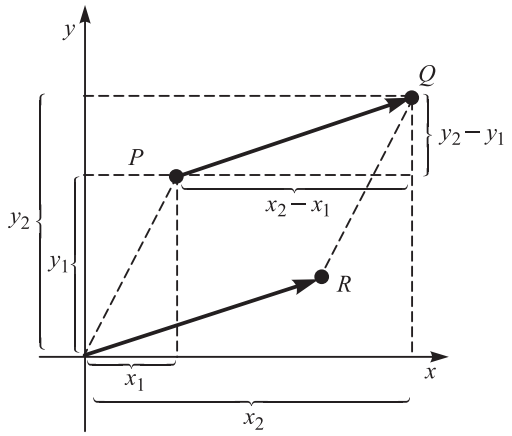
i ra 7.4.

Dados dos puntos = (1, y_1) y = (2, y_2), se denomina vector , al vector con origen en y extremo en ; sus componentes son

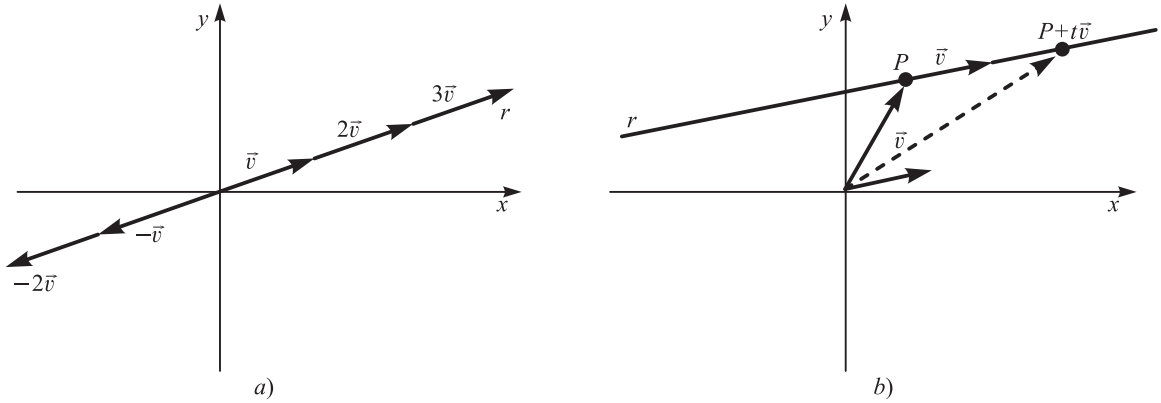
$$= (\ _2 - \ _1, y_2 - y_1)$$

y, por tanto, es equivalente al vector que tiene como origen y extremo un punto de coordenadas (2 − 1, $y_2 - y_1$) (véase figura 7.5).

Dado un vector $\vec{v}$, el conjunto de puntos extremos $t\vec{v}$, donde t es un número real, determina la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene a $\vec{v}$ como vector director (ver figura 7.6.*a*)).



i ra 7.5



i ra 7.6

La recta *r* que pasa por el punto y tiene a $\vec{v}$ como vector director se representa mediante el conjunto de puntos

$$+ t\vec{v}$$

donde *t* es un número real. Si $= (\ _1,\ _2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ cualquier punto $(\ , y)$ de la recta *r* se escribe de la forma

$$(\ , y) = (\ _1,\ _2) + t(v_1, v_2).$$

Igualando componentes se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &= \ _1 + tv_1 \\ y &= \ _2 + tv_2 \end{aligned}\right\}$$

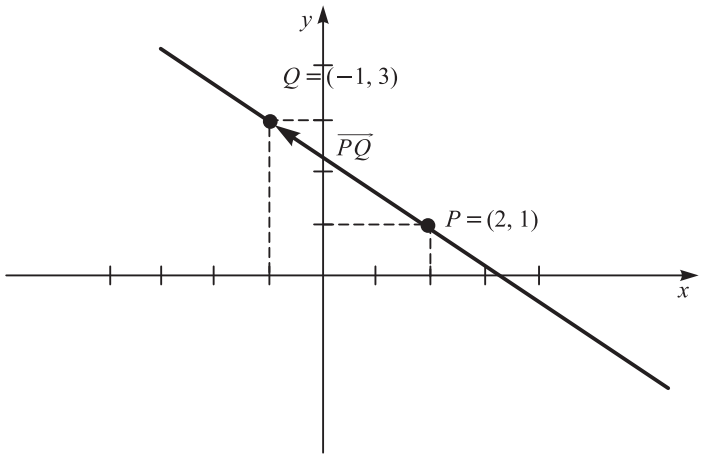
que se denominan *e a ione aram tri a* de la recta *r*.

EJEMPLO A. Para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $= (2, 1)$ y $= (-1, 3)$ observamos que uno de sus vectores directores es $= (-3, 2)$ y puesto que pasa por el punto $= (2, 1)$ se tiene

$$(\ , y) = (2, 1) + t(-3, 2)$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} &= 2 - 3t \\ y &= 1 + 2t \end{aligned}\right\}$$



i ra 7.7

Nota. La representación paramétrica de una recta no es única; en el ejemplo anterior podríamos tomar $\frac{1}{2}\overrightarrow{\quad} = \vec{v}$ como vector director y como uno de los puntos de la recta; se obtendrían en este caso la ecuación

$$(, y) = (-1, 3) + t\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

que representa la misma recta.

* * *

En la recta de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} &= {}_1 + tv_1 \\ y &= {}_2 + tv_2 \end{aligned}\right\}$$

podemos eliminar la variable real t despejándola en cada una de las ecuaciones e igualando los resultados; si v_1 y v_2 son no nulos, se tiene

$$t = \frac{- {}_1}{v_1} \quad , \quad t = \frac{y - {}_2}{v_2}$$

y, por tanto:

$$\frac{- {}_1}{v_1} = \frac{y - {}_2}{v_2}$$

siempre que v_1 y v_2 sean no nulos. La igualdad anterior puede escribirse de la forma

$$v_2 \ - v_1 y + v_1 \ {}_2 - v_2 \ {}_1 = 0$$

o bien

$$a\ + by + \ = 0,$$

con *a*, *b* y números reales, que se denomina *e a i n general o im lí ita e la re ta* en coordenadas cartesianas, o *e a i n arte iana*.

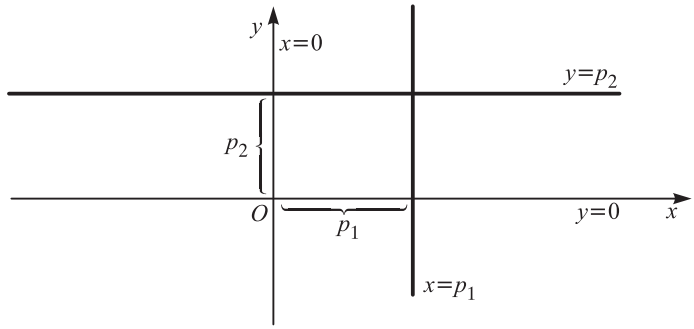
i $v_1 = 0$, las ecuaciones paramétricas de una recta se escriben de la forma

$$\left.\begin{aligned} &= \ _1 \\ y &= \ _2 + tv_2 \end{aligned}\right\}.$$

Puesto que de la primera de las ecuaciones ya se ha eliminado el parámetro *t*, la ecuación general de esta recta es

$$= \ _1.$$

Si $v_2 = 0$, la ecuación general de la recta es $y = \ _2$. Estos casos particulares corresponden a rectas paralelas a los ejes de coordenadas (ver figura 7.8).



i ra 7.8

EJEMPLO B. Para encontrar las ecuación cartesiana de la recta que pasa por el punto = (2, 1) y tiene como vector director (− 1, 5) escribimos sus ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} &= 2 - t \\ y &= 1 + 5t \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

y eliminamos *t*:

$$t = \frac{-2}{-1} = \frac{y-1}{5}.$$

Por tanto:

$$5\ + y - 11 = 0.$$

Otra forma de eliminar *t* en (1.1) es considerar que tenemos un sistema de dos ecuaciones con una incógnita *t*, mientras que e *y* son constantes, es decir, el sistema

$$\left.\begin{aligned} -t &= \ -2 \\ 5t &= y - 1 \end{aligned}\right\}.$$

Puesto que fijados e y este sistema tiene una sola solución en t, del teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) se deduce que

$$r\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & y-1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $r\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1$ hemos de tener que $r\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & y-1 \end{pmatrix} = 1$, y esto es equivalente a

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & y-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando este determinante se obtiene

$$-y + 1 - 5 \quad + 10 = 0,$$

que es el mismo resultado que obtuvimos anteriormente.

* * *

Dadas dos rectas en un plano pueden darse los siguientes casos:

a) Las dos rectas se cortan en un solo punto.
b) Las dos rectas son paralelas.
c) Las dos rectas coinciden.

Si se conocen las ecuaciones de las rectas en coordenadas cartesianas podemos determinar su posición relativa, es decir, cada uno de los casos anteriores, estudiando las soluciones del sistema formado por las dos ecuaciones. Si las ecuaciones son

$$\left.\begin{aligned} r_1 \equiv a_1 \quad + b_1 y + \ _1 = 0 \\ r_2 \equiv a_2 \quad + b_2 y + \ _2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

tendremos el caso a) si el sistema (1.2) posee una sola solución; por el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) esto sucede solamente cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En el caso b) el sistema (1.2) no posee solución, y, por tanto, se ha de tener

$$r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & - \ _1 \\ a_2 & b_2 & - \ _2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si las rectas coinciden el sistema (1.2) posee infinitas soluciones y, por tanto, se ha de tener que

$$r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & - \ _1 \\ a_2 & b_2 & - \ _2 \end{pmatrix} < 2.$$

En los ejercicios no es conveniente memorizar los resultados obtenidos, sino obtenerlos en cada caso mediante la utilización del teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4).

EJEMPLO C. Las rectas de ecuaciones $3\ \ + 2y - 7 = 0$ y $6\ \ + 4y + 1 = 0$ son paralelas, ya que

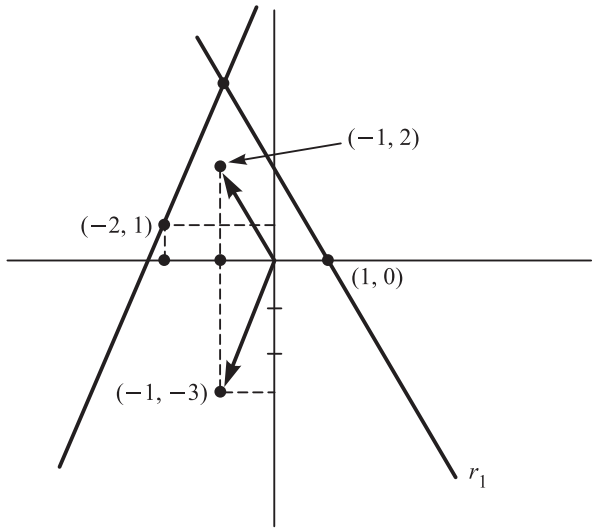
$$r\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad r\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

* * *

Si las rectas están dadas por sus ecuaciones paramétricas podemos estudiar su posición relativa pasando a su ecuación general en coordenadas cartesianas. Sin embargo, también puede conocerse su posición a partir de sus ecuaciones paramétricas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO D. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r_1 : (\ , y) = (1, 0) + t(-1, 2)$$
$$r_2 : (\ , y) = (-2, 1) + \ (-1, -3)$$



i ra 7.9

ambas se cortan si y solo si existe un único valor de t y un único valor de para los cuales se obtiene el mismo resultado de e y. Por tanto, el sistema

$$(1, 0) + t(-1, 2) = (-2, 1) + \ (-1, -3)$$

tiene solución única en t y . Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{aligned} 1 - t &= -2 - \\ 2t &= \ \ 1 - 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -t + \ \ &= -3 \\ 2t + 3 \ &= \ \ 1 \end{aligned}\right\}.$$

Este sistema posee solución única, ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0.$$

Por tanto, las rectas dadas se cortan en un único punto. Para encontrar las coordenadas del punto de corte encontramos los valores de t y que satisfacen el sistema anterior y sustituimos en las ecuaciones de las rectas:

$$t = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2 \quad ; \quad = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$(1, 0) + 2(-1, 2) = (-1, 4) \quad ; \quad (-2, 1) + (-1)(-1, -3) = (-1, 4).$$

Se trata, por tanto, del punto $(-1, 4)$. Observar que solamente es necesario calcular el valor de t o el de , pero no ambos, para obtener el punto de corte. El hallar los dos valores sirve de adecuada comprobación.

* * *

Supongamos que las rectas de ecuaciones

$$+ t\vec{} = (\ _1, \ _2) + t(\ _1, \ _2)$$
$$+ \ \vec{v} = (\ _1, \ _2) + \ (v_1, v_2)$$

son paralelas o coincidentes. En el primer caso el sistema

$$\left.\begin{aligned} {}_1 + t\ {}_1 &= \ {}_1 + \ v_1 \\ {}_2 + t\ {}_2 + \ {}_2 + \ v_2 \end{aligned}\right\}$$

no posee soluciones y en el segundo posee infinitas soluciones. En cualquier caso, aplicando el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) el rango de la matriz de los coeficientes del sistema ha de ser 1 y, por tanto, se tiene

$$\begin{vmatrix} {}_1 & -v_1 \\ {}_2 & -v_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} {}_1 & v_1 \\ {}_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Puesto que los vectores $\vec{}$ y $\vec{v}$ son no nulos, por el teorema del menor básico (Teorema 2.5.2) se obtiene que $\vec{}$ es una combinación lineal de $\vec{v}$, es decir:

$$\vec{} = \ \vec{v}.$$

Por tanto, los vectores $\vec{}$ y $\vec{v}$ son proporcionales.

Recíprocamente, si $\vec{}$ y $\vec{v}$ son dos vectores proporcionales, las rectas que los tienen como vectores directores son paralelas o coincidentes.

Ejemplo E. Las rectas $(1, 2) + t(-1, 4)$ y $(-\ 1, 0) + \ (2, -8)$ son paralelas o coincidentes, ya que $(2, -8) = -2(-1, 4)$. Para determinar si son paralelas o coincidentes escribimos el sistema que se obtiene de igualar las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \ t &= -1 + 2 \\ 2 + 4t &= \quad -8 \end{aligned}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} -t - 2 \ &= -2 \\ 4t + 8 \ &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Puesto que

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

tenemos que

$$r\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 1,$$

y puesto que

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 8 = 10 \neq 0,$$

se tiene que

$$r\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Las rectas, por tanto, son paralelas.

* * *

Para terminar esta sección observamos que la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & & y \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

determina una recta que pasa por los puntos $= (a_1, a_2)$ y $= (b_1, b_2)$. Para probar este resultado observar que desarrollando el determinante por la primera fila se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

que es la forma general de la ecuación de una recta en coordenadas cartesianas; además, la recta pasa por los puntos $= (a_1, a_2)$ y $= (b_1, b_2)$, ya que al sustituir e y por los correspondientes valores de y se obtiene un determinante con dos filas iguales.

EJERCICIOS 7.1

1. Dados $= (1, 0)$, $= (-1, 2)$, $\vec{} = (1, -1)$ y $\vec{v} = (3, -2)$, hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes rectas, y dibujarlas:
   - **a)** Recta que pasa por y tiene como vector director $2\vec{}$.
   - **b)** Recta que pasa por y tiene como vector director $\vec{} + \vec{v}$.
   - **c)** Recta que pasa por y tiene como vector director $\vec{} - 2\vec{v}$.

2. Demostrar que la ecuación de una recta que pasa por los puntos $= (\ _1, \ _2)$ y $= (\ _1, \ _2)$ puede escribirse de la forma

$$y - \ _2 = \frac{\ _2 - \ _2}{\ _1 - \ _1}(\ - \ _1), \quad \text{si} \quad \ _1 - \ _1 \neq 0.$$

[*ota*: El número $(\ _2 - \ _2)/(\ _1 - \ _1)$ se denomina *en iente* de la recta.]

3. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas y encontrar el punto de intersección si se cortan:

   a) $(, y) = (2, 1) + t(1, 1)$ y $(, y) = (1, 0) + (-5, -5)$.

   b) $+ y = 1$ y $2 - y = 2$.

   c) $2 - y = 4$ y $(, y) = (2, 0) + t(-2, -4)$.

   d) $(, y) = t(-1, 2)$ y $(, y) = (1, 0) + (2, 3)$.

4. Determinar ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas, y dibujarlas:

   a) $- 2y = 5$; b) $2 - y = 3$; c) $= 3$; d) $y = 0$.

   [*ota*: El resultado no es necesariamente único.]

5. Dada la recta de ecuación $a + by + = 0$, demostrar que todas las rectas paralelas a ella tienen una ecuación de la forma $a + by + ' = 0$ con $' \in \mathbb{R}$. [*ota*: El conjunto de las rectas paralelas a una dada se denomina *a e re ta* con la propiedad citada.] Encontrar la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta que pasa por (1, 2) y tiene $(-1, 1)$ como vector director.

6. Encontrar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes rectas:

   a) Paralela a $(, y) = (3, 3) + t(2, 1)$ que pasa por (1, 0).

   b) Paralela a $2 - y = 5$ que pasa por $(1, -2)$.

   c) Paralela por el punto $(-2, -3)$ a la recta que pasa por (1, 0) y (0, 1).

7. Demostrar que la recta que pasa por los puntos y tiene como ecuaciones paramétricas

$$(1 - t) + t$$

   o bien

$$+ t \quad \text{con} \quad + t = 1$$

   con t y números reales.

8. Dadas las rectas secantes de ecuaciones

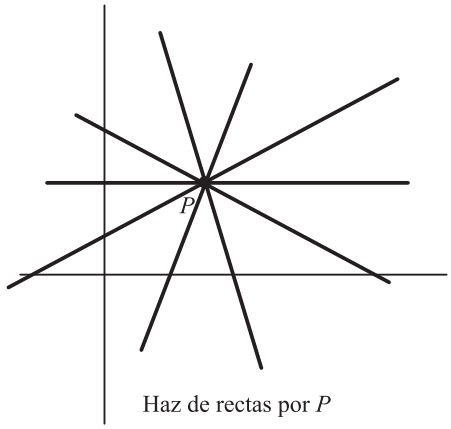
$$a_1 + b_1 y + {}_1 = 0$$
$$a_2 + b_2 y + {}_2 = 0$$

   comprobar que para cada par de valores reales t, la ecuación

$$t(a_1 + b_1 y + {}_1) + (a_2 + b_2 y + {}_2) = 0 \quad (*)$$

   es una recta que pasa por el punto de intersección de las anteriores y que todas ellas se obtienen así.

   [*ota*: ( ) se denomina la ecuación del *a e re ta* que pasan por .]



Haz de rectas por P

9. Utilizar el problema anterior para encontrar:
   a) La recta que pasa por (1, 1) y por la intersección de $+y=2$, $2+y=5$.
   b) Ecuaciones del haz de rectas que pasan por el punto (1, 4).
   c) Ecuaciones del haz de rectas que pasan por el punto (0, 0).

7.2. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

De manera análoga a como se hizo en el plano puede introducirse en el espacio un sistema de coordenadas de manera que todo punto del espacio quede determinado por tres números, que se denominan sus *coordenadas* o *componentes*. Basta para ello considerar tres rectas que se cortan en un solo punto, que será el *origen*, y cualquier otro punto queda determinado por su «distancia» a cada uno de los planos que determinan dos de las rectas dadas tomada paralelamente a la tercera (ver figuras 7.10 y 7.11).

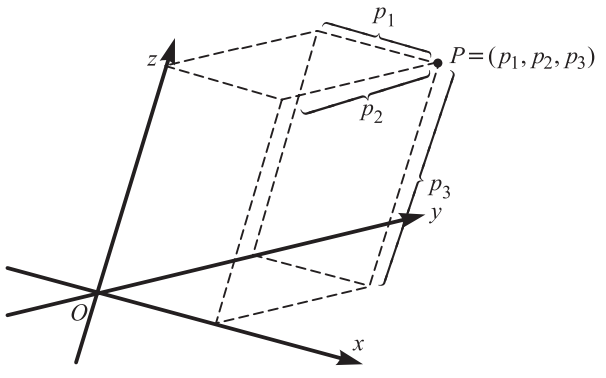


Figura 7.10

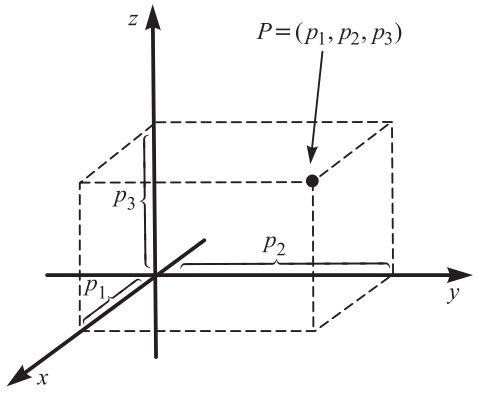


Figura 7.11

Si las rectas dadas, que se denominan *ejes coordenados*, son perpendiculares, tenemos un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano. Cada punto del espacio queda determinado por sus tres componentes, que se denotan por (x, y, z) ó (x_1, x_2, x_3).

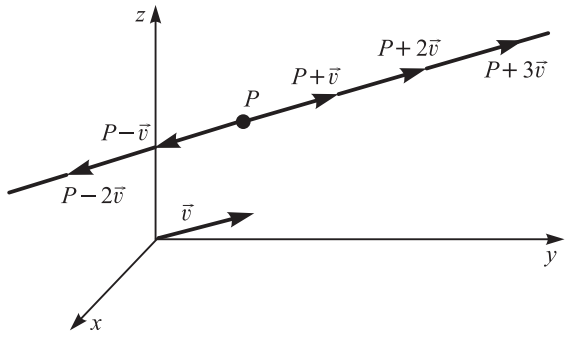
En $\mathbb{R}^3$ consideremos un sistema de coordenadas rectangulares. Todo punto de $\mathbb{R}^3$ puede interpretarse como un vector que tiene como origen el origen de coordenadas y como extremo el punto . La suma de vectores y el producto de un vector por un número real tienen en $\mathbb{R}^3$ la misma interpretación geométrica que en el plano (ver sección 7.1).

Dados un punto $\in \mathbb{R}^3$ y un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, el conjunto de puntos que se representa de la forma

$$+ t\vec{v},$$

donde t es un número real, determina la *re ta e a a or en la ire i n e* $\vec{v}$ (ver figura 7.12). Si $= (\ _1,\ _2,\ _3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ podemos escribir sus ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} &= \ _1 + tv_1 \\ y &= \ _2 + tv_2 \\ &= \ _3 + tv_3 \end{aligned}\right\}. \tag{2.1}$$



i ra 7.12

EJEMPLO A. La recta que pasa por el punto $= (1, 2, 3)$ y tiene a $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ como vector director tiene como ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} &= 1 - \ t \\ y &= 2 + \ t \\ &= 3 + 2t \end{aligned}\right\}.$$

* * *

Dados dos puntos y en $\mathbb{R}^3$, la ecuación de la recta que pasa por y tiene como ecuaciones paramétricas

$$+ t(\ -\ )$$

ya que uno de sus vectores de dirección es $\vec{v} =\ -\ $. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por y pueden escribirse de la forma

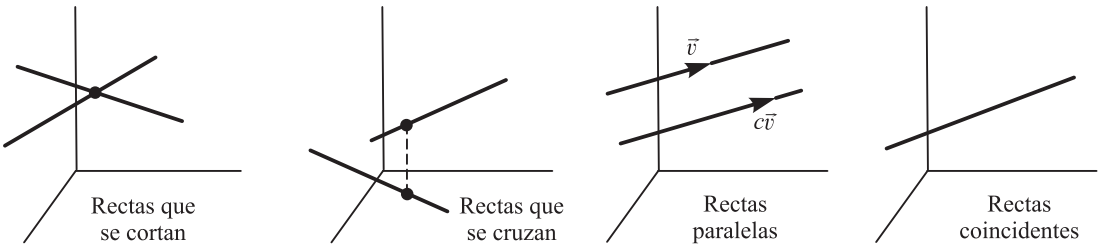
$$(1 - t)\ + t$$

o bien

$$+ t \qquad \text{con} \qquad + t = 1.$$

Dadas dos rectas en el espacio, existen cuatro posiciones en las cuales pueden encontrarse (ver figura 7.13). O bien se cortan en un solo punto, o se cruzan sin cortarse, o son paralelas en el sentido de que sus vectores directores son proporcionales o son coincidentes.

La posición relativa de dos rectas en el espacio puede determinarse estudiando el sistema formado al igualar las correspondientes coordenadas de las dos rectas dadas y determinando si sus vectores directores son o no proporcionales en los casos segundo y tercero.



i ra 7.13

EJEMPLO B. Para determinar la posición relativa de las rectas

$$(, y,) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 0)$$

y

$$(, y,) = (0, 1, 2) + (2, 0, 1),$$

igualamos las correspondientes coordenadas para obtener el sistema

$$(1, 0, 1) + t(-1, 1, 0) = (0, 1, 2) + (2, 0, 1)$$

o equivalentemente:

$$\left.\begin{array}{rcl} -t-2 & = & -1 \\ t & = & 1 \\ - & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Puesto que

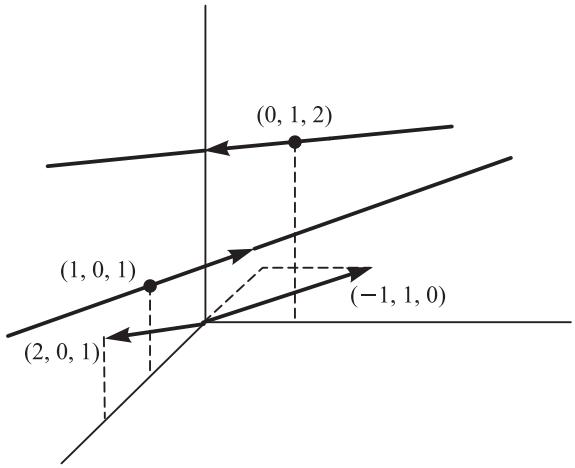
$$r\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

y

$$r\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$



i ra 7.14

el sistema no posee ninguna solución. Por tanto, las rectas dadas se cruzan o son paralelas. Puesto que sus vectores directores no son proporcionales (¿por qué?), ambas rectas se cruzan.

* * *

Dada una recta por sus ecuaciones paramétricas como en (2.1), podemos despejar t de cada una de las igualdades para obtener:

$$t = \frac{- \ _1}{v_1}, \quad t = \frac{y - \ _2}{v_2}, \quad t = \frac{- \ _3}{v_3}$$

siempre que v_1, v_2 y v_3 sean no nulos. Tenemos, por tanto, las igualdades

$$\frac{- \ _1}{v_1} = \frac{y - \ _2}{v_2} = \frac{- \ _3}{v_3} \tag{2.2}$$

que se transforman en las tres igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} v_2 \ - v_1 y = v_2 \ _1 - v_1 \ _2 \\ v_3 y - v_2 \ = v_3 \ _2 - v_2 \ _3 \\ v_3 \ - v_1 \ = v_3 \ _1 - v_1 \ _3 \end{array}\right\}$$

cada una de las cuales es consecuencia de las otras dos como se deduce fácilmente de la forma en que se han obtenido. Por tanto, podemos escribir

$$\left.\begin{array}{l} v_2 \ - v_1 y = v_2 \ _1 - v_1 \ _2 \\ v_3 y - v_2 \ = v_3 \ _2 - v_2 \ _3 \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

como las ecuaciones de la recta dada, que reciben el nombre de *e a ione arte iana* .

EJEMPLO C. Para hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por los puntos = (1, 0, 1) y = (−2, 1, 2) escribimos su ecuación paramétrica

$$(\ , y, \ ) = (1, 0, 1) + t(-3, 1, 1).$$

Tenemos, por tanto:

$$\frac{-1}{-3} = \frac{y-0}{1} = \frac{-1}{1}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} +3y &= 1 \\ y- &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

* * *

Si alguna o algunas de las componentes del vector $\vec{v}$ son nulas (¡no todas pueden ser nulas!) se obtienen rectas en posiciones especiales con respecto a los ejes y planos coordenados. Por ejemplo, si $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 \neq 0$ se obtiene una recta paralela al eje que pasa por el punto $= (\ _1,\ _2,\ _3)$; esta recta tiene como ecuaciones cartesianas

$$= \ _1, \quad y = \ _2.$$

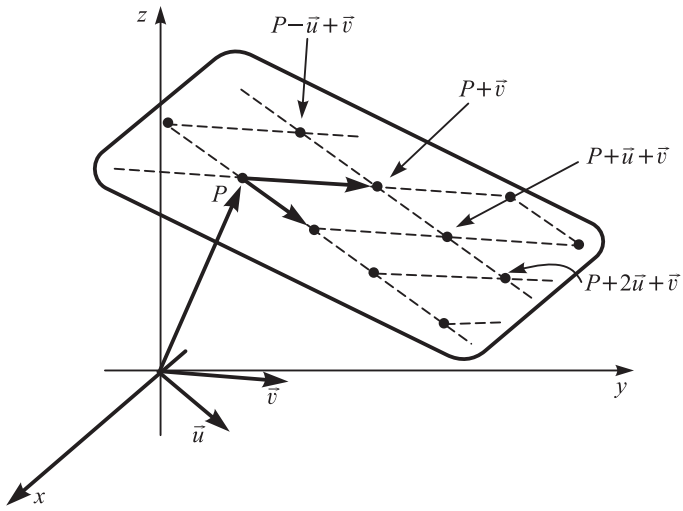
Se invita al lector a buscar otros casos particulares.

* * *

Dados dos vectores $^{\rightarrow}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ no proporcionales y un punto de $\mathbb{R}^3$ el conjunto de puntos que se representa de la forma

$$+ t^{\rightarrow} + \vec{v}$$

con t y números reales es un plano que pasa por el punto y tiene $^{\rightarrow}$ y $\vec{v}$ como *ve tore ire tore* .



i ra 7.15

Si $= (\ _1,\ _2,\ _3)$, $^{\rightarrow} = (\ _1,\ _2,\ _3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ el plano que pasa por y tiene $^{\rightarrow}$ y $\vec{v}$ como vectores directores puede describirse con las igualdades

$$\left.\begin{aligned} &= {}_1 + t\ {}_1 + v_1 \\ y &= {}_2 + t\ {}_2 + v_2 \\ &= {}_3 + t\ {}_3 + v_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

que reciben el nombre de *e a ione aram tri a* del plano considerado.

Si queremos encontrar las *e a ione arte iana* de este plano, es decir, ecuaciones que solamente contengan , *y* y y no los parámetros *t* y , basta con eliminar estos parámetros entre las tres ecuaciones de (2.4). Esto puede hacerse mediante el método de sustitución, pero es más conveniente considerar (2.4) como un sistema de tres ecuaciones con incógnitas *t* y que, fijadas , *y*, , solo posee una solución; por el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) se ha de tener

$$r\begin{pmatrix} {}_1 & v_1 \\ {}_2 & v_2 \\ {}_3 & v_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} {}_1 & v_1 & - {}_1 \\ {}_2 & v_2 & y - {}_2 \\ {}_3 & v_3 & - {}_3 \end{pmatrix}.$$

Para que esto se cumpla es necesario que

$$\begin{vmatrix} {}_1 & v_1 & - {}_1 \\ {}_2 & v_2 & y - {}_2 \\ {}_3 & v_3 & - {}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Por la propiedad 3 de los determinantes (ver sección 2.2) para columnas se tiene

$$\begin{vmatrix} {}_1 & v_1 & \\ {}_2 & v_2 & y \\ {}_3 & v_3 & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} {}_1 & v_1 & {}_1 \\ {}_2 & v_2 & {}_2 \\ {}_3 & v_3 & {}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el primero de los determinantes por la última columna se tiene

$$\begin{vmatrix} {}_2 & v_2 \\ {}_3 & v_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} {}_1 & v_1 \\ {}_3 & v_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} {}_1 & v_1 \\ {}_2 & v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} {}_1 & v_1 & {}_1 \\ {}_2 & v_2 & {}_2 \\ {}_3 & v_3 & {}_3 \end{vmatrix} = 0$$

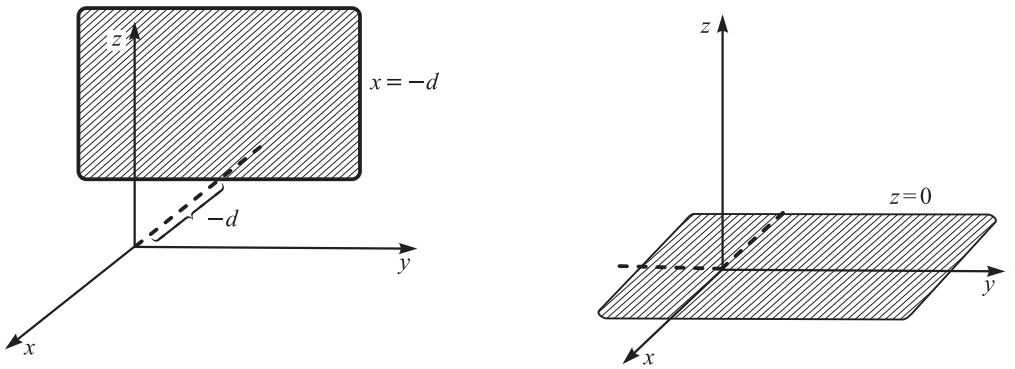
que podemos escribir de la forma

$$a\ + by + \ + \ = 0,$$

donde *a*, *b* y son números reales. Esta ecuación recibe el nombre de *e a i n arte iana* o *im lí ita* de un plano.

Casos particulares de esta ecuación son, por ejemplo, = − ó = 0. El primero es un plano que contiene a todos los puntos de la forma (− , $_2$, $_3$) con $_2$, $_3$ cualesquiera números reales y, por tanto, es un plano paralelo al plano determinado por los ejes y que pasa a distancia − del origen (ver figura 7.16). El segundo es el plano determinado por los ejes y (ver figura 7.16).

Se invita al lector a tratar de visualizar geométricamente otros casos particulares de la ecuación cartesiana de un plano.



i ra 7.16

EJEMPLO D. Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto = (1, 1, 0) y tiene como vectores directores ¯ = (−1, 0, 2) y $\vec{v}$ = (1, 3, 3) son

$$\left.\begin{array}{rl} = 1 - & t + \\ y = 1 & + 3 \\ = & 2t + 3 \end{array}\right\}.$$

Su ecuación cartesiana es

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & y-1 \\ 2 & 3 & \end{vmatrix} = 0.$$

Tenemos, por tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & y-1 \\ 2 & 3 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & y-1 \\ 0 & 5 & +2 \quad -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & y-1 \\ 5 & +2 \quad -2 \end{vmatrix} =$$

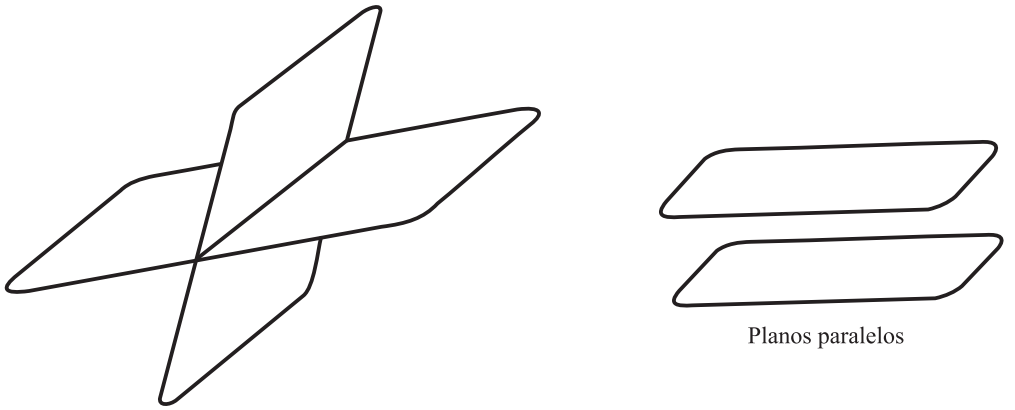
$$= -3 \quad -6 \quad +6 + 5y - 5 = -6 \quad +5y - 3 \quad +1.$$

* * *

Las posibles posiciones relativas de dos planos en el espacio son las siguientes (ver figura 7.17):

a) Los dos planos se cortan en una recta.
b) Los dos planos son paralelos.
c) Ambos planos coinciden.

La posición relativa de dos planos puede determinarse a partir de sus ecuaciones, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) para determinar el número de puntos en común que ambos poseen. Un estudio de este tipo se realiza en los dos próximos ejemplos.



Planos que se cortan en una recta

Planos paralelos

i ra 7.17

EJEMPLO E. Para hallar la posición relativa de los planos de ecuaciones $2 \ + 3y - \ = 1$ y $- \ - 2y + \ = 0$ estudiamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2 \ + 3y - \ = 1 \\ - \ - 2y + \ = 0 \end{array}\right\}.$$

Puesto que

$$r\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 = r\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 3 = \text{número de incógnitas}$$

el sistema tiene infinitas soluciones. Puesto que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ es un menor básico de la matriz de los coeficientes, las soluciones dependen de un solo parámetro y, por tanto, los planos se cortan en una recta.

Para determinar la ecuación de esta recta escribimos el sistema en la forma

$$\left.\begin{array}{r} 2 \ + 3y = 1 + \\ - \ - 2y = \ - \end{array}\right\}$$

y lo resolvemos utilizando la regla de Cramer (Teorema 2.4.3):

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 + & 3 \\ - & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 - 2 \ + 3}{-1} = 2 -$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 + \\ -1 & - \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 \ + 1 +}{-1} = \ - 1.$$

Haciendo $\quad = t$, se tiene

$$(\ , y, \ ) = (2 - t, t - 1, t) = (2, -1, 0) + t(-1, 1, 1)$$

que es la ecuación paramétrica de la recta intersección de los dos planos dados.

* * *

EJEMPLO F. Dados los planos de ecuaciones paramétricas

$$(\ , y, \ ) = (1, 0, 1) + t(1, 1, 0) + \ (0, 1, -1)$$
$$(\ , y, \ ) = (0, 0, 3) + l(1, 2, -1) + m(2, 1, 1)$$

tratamos de determinar su posición relativa. Igualando las correspondientes coordenadas obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 1 + t = & & l + 2m \\ t + \ = & & 2l + \ m \\ 1 - \ = 3 - & & l + \ m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rrrrr} t & - & l - 2m = -1 \\ t + & - & 2l - \ m = \ 0 \\ - & + & l - \ m = \ 2 \end{array}\right\}.$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el rango de la matriz de los coeficientes del sistema anterior es 2. Por otro lado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

y, por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3. Esto nos lleva a deducir que no existen soluciones del sistema anterior y, por tanto, los *lano a o on aralelo* .

* * *

Observar que en el ejemplo F los vectores directores del segundo plano son combinación lineal de los vectores directores del primer plano, ya que

$$(1, 2, -1) = (1, 1, 0) + (0, 1, -1)$$

y

$$(2, 1, 1) = 2(1, 1, 0) - (0, 1, -1).$$

Este resultado es cierto en general: *i o lano on aralelo , lo ve tore ire tore e no e ello on ombina i n lineal e lo ve tore ire tore el otro y el re í ro o tambi n e ierto*. La demostración de este resultado se pide en el ejercicio 7 al final de esta sección.

EJEMPLO G. Tratemos de hallar el plano paralelo al de ecuación $\ + y + \ = 0$ que pasa por el punto $\ = (1, 1, 1)$.

Escribimos el plano dado en ecuaciones paramétricas; para ello basta con determinar tres de sus puntos que no estén alineados; por ejemplo:

$$= (0, 0, 0), \quad = (1, -1, 0), \quad = (0, 1, -1).$$

Estos puntos no están alineados, ya que los vectores

$$\vec{} = \overrightarrow{} = (1, -1, 0) \quad \text{y} \quad \vec{v} = \overrightarrow{} = (0, 1, -1)$$

no son proporcionales (¿por qué?). Puesto que el plano dado pasa por el punto $= (0, 0, 0)$ y tiene $\vec{}$ y $\vec{v}$ como vectores directores su ecuación paramétrica es

$$(, y,) = (0, 0, 0) + t(1, -1, 0) + (0, 1, -1).$$

Como vectores directores de un plano paralelo a este pueden tomarse $\vec{}$ y $\vec{v}$ y debido a que el plano pedido pasa por el punto $= (1, 1, 1)$ su ecuación paramétrica es

$$(, y,) = (1, 1, 1) + t(1, -1, 0) + (0, 1, -1).$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & y-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +y-2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + +y-2 = +y+ -3,$$

es decir,

$$+y+ = 3.$$

Otra forma de resolver este problema es utilizando el resultado del ejercicio 8 al final de esta sección; en él se pide demostrar que las ecuaciones de todos los planos paralelos al plano de ecuación $a + by + + = 0$ pueden escribirse de la forma $a + by + + \prime = 0$, donde $\prime$ toma valores en los números reales.

Aceptando este resultado, la ecuación del plano que se busca es de la forma $+y+ + \prime = 0$; el valor de $\prime$ se calcula imponiendo que el punto $= (1, 1, 1)$ sea un punto de este nuevo plano; por tanto:

$$1 + 1 + 1 + \prime = 0.$$

La ecuación del plano buscado es

$$+y+ - 3 = 0$$

que es el mismo resultado que se obtuvo anteriormente.

* * *

Observación 1. Dados dos planos de ecuaciones

$$\begin{aligned} a + by + &= \\ a' + b'y + \prime &= \prime \end{aligned} \tag{2.5}$$

ambos determinan una recta si y solo si

$$r\begin{pmatrix} a & b & \\ a' & b' & ' \end{pmatrix} = 2. \tag{2.6}$$

Por tanto, dos ecuaciones de la forma que aparecen en (2.5) son también ecuaciones cartesianas de una recta siempre que se cumpla la condición (2.6).

Observación 2. Son numerosos los diferentes ejercicios que pueden hacerse referentes a rectas y planos en el espacio. Al lector se le invita a que realice todos los ejercicios propuestos al final de esta sección y que también realice algunos de su propia cosecha.

Es conveniente también que, siempre que sea posible, se realicen adecuadas representaciones geométricas de las rectas y planos que aparecen en un problema.

EJERCICIOS 7.2

1. Dados $= (1, 1, -1)$, $= (0, 1, 2)$, $^{\rightarrow} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (1, -1, -1)$, hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$, y dibujarlas:

   a) Recta que pasa por con vector director $^{\rightarrow} - \vec{v}$.

   b) Recta que pasa por y .

   c) Recta que pasa por con vector director $3\vec{v}$.

2. Dados los siguientes pares de rectas en $\mathbb{R}^3$, determinar su posición relativa y, si se cortan, encontrar el punto de intersección:

   a) $(, y,) = (-1, 2, 1) + t(4, 3, 2)$ y $(, y,) = (0, 1, 0) + (1, 3, 2)$.

   b) $(, y,) = (0, 1, 5) + t(1, 3, -2)$ y $(, y,) = (5, 5, 3) + (4, 1, 0)$.

   c) $\left.\begin{aligned} 2 + 3y - &= 3 \\ -3y &= 4 \end{aligned}\right\}$ y $\left.\begin{aligned} + y &= 2 \\ y - &= -1 \end{aligned}\right\}$.

3. Hallar la ecuación de la recta paralela a la de ecuación

$$\left.\begin{aligned} 3 - y + &= 1 \\ + y - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

   que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

4. De todas las rectas que pasan por el punto $= (0, 2, -1)$, hallar la que corta a las rectas de ecuaciones

$$(1, 1, 2) + t(2, -1, 0)$$

   y

$$(0, 1, 1) + (-3, 1, 2).$$

5. Dados $= (1, 2, 3)$, $= (-1, -2, -3)$, $= (0, 1, -1)$, $^{\rightarrow} = (0, 1, -1)$ y $\vec{v} = (5, 1, 2)$, hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los siguientes planos:

   a) Plano que pasa por , y .

b) Plano que pasa por y y es paralelo a la recta que pasa por y tiene $\vec{} - \vec{v}$ como vector director.

c) Plano que contiene a en la dirección de $+ 2\vec{v}$ y $2\vec{} + \vec{v}$.

6. Determinar, si es posible, la intersección de los siguientes pares de planos en $\mathbb{R}^3$:

a) $- y + = 1$ y $2 + 2y - 3 = 4$.

b) $(, y,) = t(1, 1, -1) + (0, 1, -2)$ y $(, y,) = (0, 1, 0) + l(0, 1, -1) + m(2, 3, 5)$.

c) $(, y,) = (2, 3, 1) + (0, 1, 2) + (3, 1, -5)$ y $- 6y + 3 + 1 = 0$.

7. Demostrar que dos planos son paralelos o coinciden si y solo si los vectores directores de uno de ellos son combinación lineal de los vectores directores del otro.

8. Demostrar que las ecuaciones de los planos paralelos al plano de ecuación $a + by + + = 0$ pueden escribirse de la forma $a + by + + ' = 0$ con $'$ un número real.

9. Escribir las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los siguientes planos y rectas en $\mathbb{R}^3$:

a) Recta que pasa por $= (0, 2, 1)$ y es paralela al plano

$$\pi : 3 - + 2 = 0$$

y al plano que pasa por $= (1, 0, 1)$, y el origen.

b) Plano paralelo a la recta

$$r : (2, 1, 0) + t(1, 2, 1)$$

por el punto y que contiene al punto $(1, 3, 0)$.

c) Todas las rectas que pasan por y son paralelas a π y, entre ellas, la que corta a r.

d) El plano que pasa por $= (2, 1, 1)$ y contiene a la recta

$$: \left.\begin{array}{r} 3 + y - = 2 \\ -2y + = 1 \end{array}\right\}.$$

e) La recta que une con la intersección de y el plano $- y = 1$.

f) Haz de rectas que une con los puntos de .

g) Haz de planos que pasa por . [*geren ia*: generalizar el problema 8 de la sección anterior.]

10. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & & y & \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de un plano que pasa por los puntos $= (a_1, a_2, a_3)$, $= (b_1, b_2, b_3)$ y $= ({}_1, {}_2, {}_3)$.

7.3. DISTANCIAS Y ÁNGULOS. PRODUCTO ESCALAR

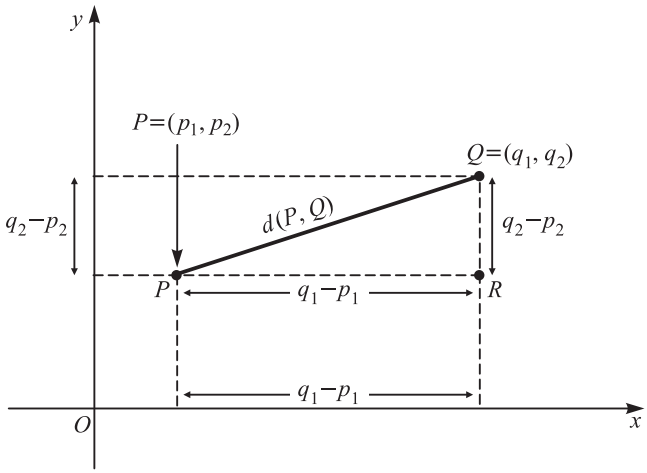
Dados dos puntos y en el plano, de coordenadas

$$= (\ _1,\ _2)$$

$$= (\ _1,\ _2)$$

con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, del teorema de Pitágoras se deduce que la distancia de a se puede calcular mediante la fórmula (ver figura 7.18).

$$(\ ,\ ) = \sqrt{(\ _1 - \ _1)^2 + (\ _2 - \ _2)^2}.$$



i ra 7.18

Si los puntos y están en $\mathbb{R}^3$ y tienen como coordenadas

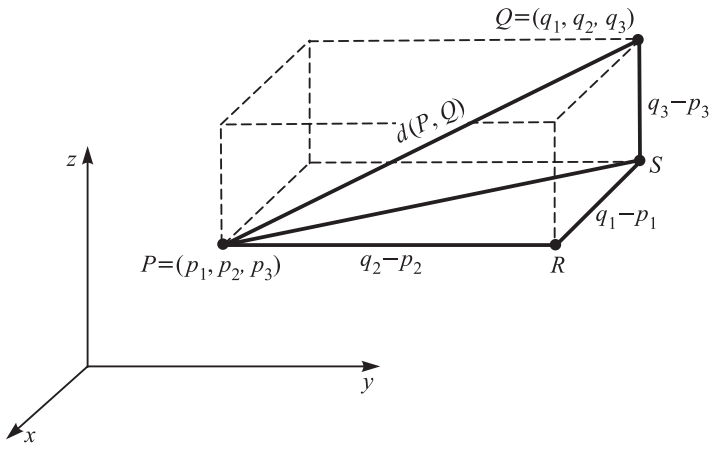
$$= (\ _1,\ _2,\ _3)$$

$$= (\ _1,\ _2,\ _3),$$

aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos y (ver figura 7.19), se obtiene el siguiente resultado:

$$(\ ,\ ) = \sqrt{(\ _1 - \ _1)^2 + (\ _2 - \ _2)^2 + (\ _3 - \ _3)^2}.$$

Dado un vector $\vec{v} = \overrightarrow{\ \ }$ en el plano o en el espacio se denomina *longit* de $\vec{v}$ y se designa por $\|\vec{v}\|$ a la distancia entre y . Palabras sinónimas de longitud de un vector son *m lo* de un vector y *norma* de un vector.



i ra 7.19

EJEMPLO A. La longitud del vector $\vec{v} = \overrightarrow{\quad}$, donde $\quad = (1, -1, 2)$ y $\quad = (3, 4, -5)$, es

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (4+1)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{4 + 25 + 49} = \sqrt{78}.$$

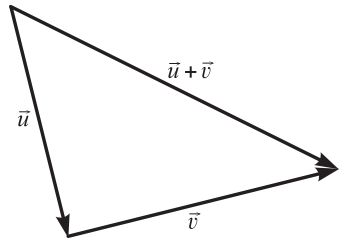
* * *

La longitud de un vector posee las siguientes propiedades:

$\| \vec{v}\| = | \, | \|\vec{v}\|$, donde $\quad$ es un número real y $| \, |$ denota el valor absoluto de $\quad$.
$\|\vec{} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{}\| + \|\vec{v}\|$.

La segunda propiedad se denomina *e ig al a triang lar* y geométricamente se expresa diciendo que cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos. Esta propiedad puede demostrarse utilizando la ley del coseno, a saber:

$$\|\vec{} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{}\| \, \|\vec{v}\| \cos \measuredangle(\vec{}, \vec{v}).$$



Puesto que $\cos \measuredangle(\vec{}, \vec{v}) \geqslant -1$, se obtiene que

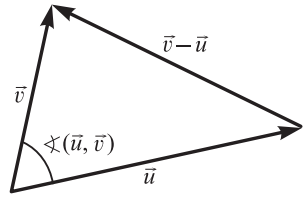
$$\|\vec{} + \vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{}\| \, \|\vec{v}\| = (\|\vec{}\| + \|\vec{v}\|)^2,$$

de donde se deduce el resultado tomando raíces cuadradas en ambos lados.

El *ng lo* que forman dos vectores $\vec{}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ puede obtenerse utilizando el teorema del coseno; ello nos permite calcular el coseno del ángulo que forman, el cual queda unívo-

camente determinado si suponemos que $0 \leqslant \measuredangle(\vec{\ }, \vec{v}) \leqslant \pi$. Puede obtenerse una fórmula para calcular $\cos \measuredangle(\vec{\ }, \vec{v})$; si $\vec{\ } = (\ _1, \ _2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, del teorema del coseno se deduce que

$$(v_1 - \ _1)^2 + (v_2 - \ _2)^2 = \ _1^2 + \ _2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2\,\|\vec{\ }\|\,\|\vec{v}\| \cos \measuredangle(\vec{\ }, \vec{v}).$$



Simplificando obtenemos

$$-2\ _1v_1 - 2\ _2v_2 = -2\|\vec{\ }\|\,\|\vec{v}\| \cos \measuredangle(\vec{\ }, \vec{v})$$

de donde se deduce que

$$\cos \measuredangle(\vec{\ }, \vec{v}) = \frac{_1v_1 + \ _2v_2}{\|\vec{\ }\|\,\|\vec{v}\|}. \tag{3.1}$$

La expresión que aparece en el numerador de la parte derecha de esta fórmula recibe el nombre de *ro to e alar* de los vectores $\vec{\ }$ y $\vec{v}$ y se denota por $(\vec{\ }, \vec{v})$. Si los vectores tienen dos componentes tenemos

$$(\vec{\ }, \vec{v}) = \ _1v_1 + \ _2v_2.$$

Si tienen tres componentes se tendría

$$(\vec{\ }, \vec{v}) = \ _1v_1 + \ _2v_2 + \ _3v_3$$

y la fórmula para calcular el ángulo que forman es similar a la (3.1).

EJEMPLO B. El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{\ } = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\cos \measuredangle(\vec{\ }, \vec{v}) = \frac{(\vec{\ }, \vec{v})}{\|\vec{\ }\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Observar que el ángulo es agudo, ya que su coseno es positivo.

* * *

Nota. De acuerdo con la fórmula (3.1) *o ve tore on er en i lare i y olo i ro to e alar e ero*, ya que es en este caso cuando su coseno es cero y, por tanto, el ángulo que forman es $\pi/2$.

De la definición de producto escalar pueden deducirse las siguientes propiedades:

1) $(\vec{\ }, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{\ })$ para todo par de vectores $\vec{\ }$ y $\vec{v}$.
2) $(\vec{\ } + \vec{v}, \vec{\omega}) = (\vec{\ }, \vec{\omega}) + (\vec{v}, \vec{\omega})$ para cualesquiera tres vectores $\vec{\ }$, $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$.
3) $(\ \vec{\ }, \vec{v}) = \ (\vec{\ }, \vec{v})$ para todo número real $\ $ y todo par de vectores $\vec{\ }$ y $\vec{v}$.
4) $(\vec{\ }, \vec{\ }) = \|\vec{\ }\|^2 \geqslant 0$ para todo vector $\vec{\ }$.

Con la noción de producto escalar pueden atacarse problemas en el plano y en el espacio sobre perpendicularidad y ángulos que forman algunas de las figuras anteriormente estudiadas. Lo que sigue es una serie de problemas relativos a estos temas; esta serie no es exhaustiva y sería conveniente que el lector se propusiera sus propios problemas sobre estas nociones.

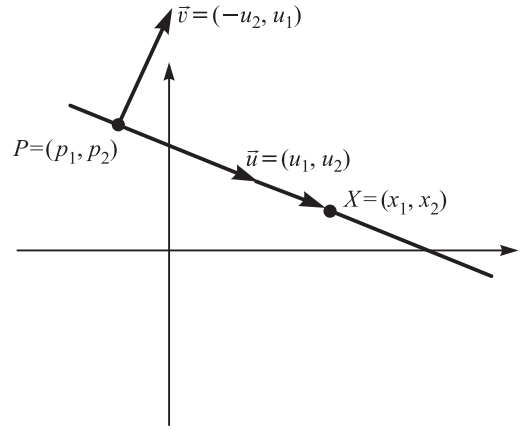
* * *

Comenzamos hallando las *e a ione arte iana e na re ta en n lano* sin necesidad de hallar sus ecuaciones paramétricas; supongamos que la recta pasa por el punto $= (\ _1,\ _2)$ y tiene a $\bar{} = (\ _1,\ _2)$ como vector director. Un vector perpendicular a $\bar{}$ es

$$\vec{v} = (-\ _2,\ _1)$$

ya que

$$(\bar{}, \vec{v}) = -\ _1\ _2 + \ _2\ _1 = 0.$$



i ra 7.20

Un punto $= (\ _1,\ _2)$ está en la recta pedida si y solo si $\overrightarrow{\ \ }$ es perpendicular a $\vec{v}$; por tanto:

$$0 = (\overrightarrow{\ \ }, \vec{v}) = -(\ _1 - \ _1)\ _2 + (\ _2 - \ _2)\ _1 = -\ _2\ _1 + \ _1\ _2 +$$

donde $= \ _1\ _2 - \ _2\ _1$. Esta es la ecuación cartesiana de la recta que tiene a $\vec{v} = (-\ _2,\ _1)$ como vector perpendicular y pasa por el punto . Un vector perpendicular a una recta dada se denomina también un *ve tor ara terí ti o* de la recta.

Dada la ecuación $a_1\ _1 + a_2\ _2 =$ que determina una recta en un plano, un vector perpendicular a ella es $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Para demostrar esto basta escribir la ecuación de la recta en la forma $(\vec{a}, \bar{}) =$, donde $\bar{} = (\ _1,\ _2)$; si $= (\ _1,\ _2)$ es un punto de la recta se tiene $(\vec{a}, \bar{}) =$, con $\bar{} = (\ _1,\ _2)$; por tanto, tenemos $(\vec{a}, \bar{}) = (\vec{a}, \bar{})$, o equivalentemente:

$$(\vec{a}, \bar{} - \bar{}) = 0.$$

Esto nos dice que $(\vec{a}, \bar{}) =$ es la ecuación de la recta que pasa por y tiene a $\vec{a}$ como vector perpendicular.

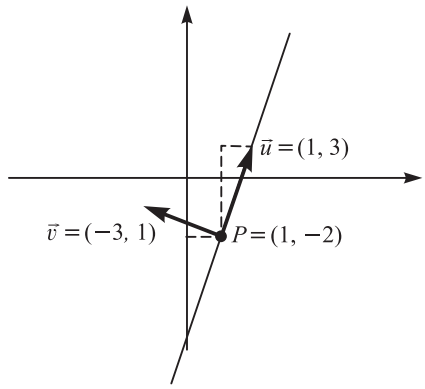
EJEMPLO C. Para hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $= (1, -2)$ y tiene a $\vec{} = (1, 3)$ como vector director, observamos que $\vec{v} = (-3, 1)$ es un vector perpendicular a $\vec{}$; por tanto:

$$(\vec{v}, \vec{}) = -3\ _1 + \ _2 =$$

es la forma de la ecuación pedida; para determinar sustituimos el punto $= (1, -2)$ y obtenemos

$$-3 - 2 = \ .$$

Por tanto, $-3\ _1 + \ _2 = -5$ es la ecuación de la recta.



i ra 7.21

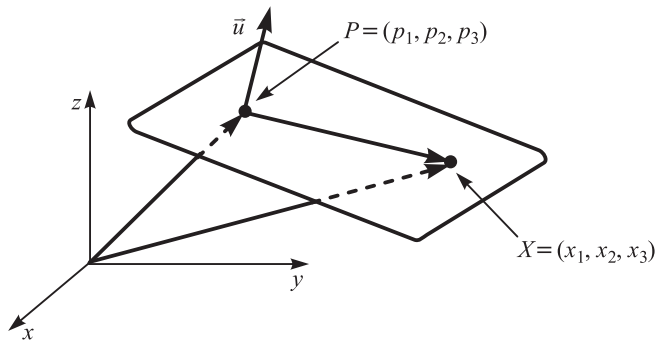
* * *

Utilizando el producto escalar puede encontrarse la *e a i n arte iana e n lano* en el espacio cuando se conocen un punto del plano y un vector perpendicular a él. Si $= (\ _1, \ _2, \ _3)$ es un punto del plano y $\vec{} = (\ _1, \ _2, \ _3)$ es un vector perpendicular a él, cualquier punto $= (\ _1, \ _2, \ _3)$ del plano satisface

$$(\vec{}, \overrightarrow{\ \ }) = 0,$$

como puede fácilmente observarse en la figura 7.22. La igualdad anterior puede escribirse de la forma

$$_1\ _1 + \ _2\ _2 + \ _3\ _3 = \ .$$



i ra 7.22

Recíprocamente, una fórmula como la anterior determina un plano que es perpendicular al vector $\vec{\ } = (\ _1,\ _2,\ _3)$. La demostración es similar a la realizada para la recta en el plano y se deja como ejercicio.

EJEMPLO D. El plano que pasa por el punto $= (1, 3, -2)$ y tiene a $\vec{\ } = (2, -1, 4)$ como vector perpendicular o característico tiene como ecuación una expresión de la forma

$$2\ _1 - \ _2 + 4\ _3 = \ .$$

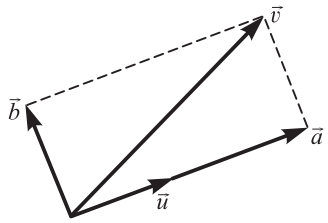
El valor de se determina imponiendo que pertenezca al plano: $2 \cdot 1 - 3 + 4(-2) = = -9 = \ $. Por tanto, $2\ _1 - \ _2 + 4\ _3 = -9$ es la ecuación del plano.

* * *

Sea $\vec{\ }$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. El producto escalar puede utilizarse para descomponer todo vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ en una suma de dos vectores

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

donde $\vec{a}$ es un múltiplo de $\vec{\ }$ y $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{\ }$ (ver figura 7.23).



i ra 7.23

Puesto que $\vec{a}$ es un múltiplo de $\vec{\ }$ hemos de tener $\vec{a} = \ \vec{\ }$, con $\in \mathbb{R}$, y, por tanto:

$$\vec{v} = \ \vec{\ } + \vec{b}.$$

Multiplicando escalarmente los dos lados de la igualdad anterior por $\vec{\ }$ y teniendo en cuenta que $(\vec{b}, \vec{\ }) = 0$, ya que $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{\ }$, se tiene que

$$(\vec{v}, \vec{\ }) = \ (\vec{\ }, \vec{\ }).$$

De aquí deducimos que

$$\vec{a} = \ \vec{\ } = \frac{(\vec{v},\ \vec{\ })}{(\vec{\ },\ \vec{\ })}\vec{\ } \tag{3.2}$$

y, por tanto:

$$\vec{b} = \vec{v} - \vec{a} = \vec{v} - \frac{(\vec{v},\ \vec{\ })}{\|\vec{\ }\|^2}\vec{\ }.$$

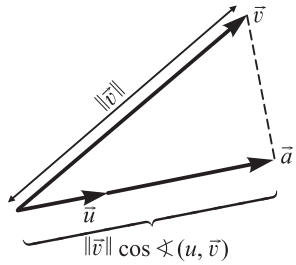
De la fórmula (3.2) y de la fórmula del coseno del ángulo que forman dos vectores deducimos que

$$\vec{a} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{\ }\|}\,[\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{v})]\,\vec{\ }$$

y si $\vec{\ }$ es un vector *nitario*, es decir, de longitud 1, se tiene

$$\vec{a} = \|\vec{v}\|[\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{v})]\,\vec{\ },$$

lo cual demuestra que $\vec{a}$ es un vector en la dirección de $\vec{\ }$ que tiene $\|\vec{v}\|[\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{v})]$ como módulo (ver figura 7.24).



i ra 7.24

EJEMPLO E. Para descomponer $\vec{v} = (1, 3, -1)$ en un vector paralelo a $\vec{\ } = (-1, 0, 1)$ y otro perpendicular a él, escribimos

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \ \vec{\ } + \vec{b},$$

donde $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{\ }$. Del razonamiento anterior deducimos que

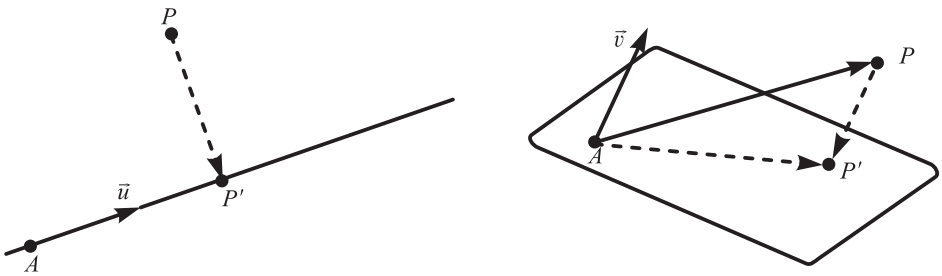
$$= \frac{(\vec{v},\ \vec{\ })}{\|\vec{\ }\|^2} = \frac{1\cdot(-1) + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Por tanto:

$$\vec{a} = -1\vec{\ } = (1, 0, -1) \quad \text{y} \quad \vec{b} = \vec{v} - \vec{a} = (0, 3, 0).$$

* * *

Dado un punto se denomina *roye i n* de sobre una recta o un plano a un punto $'$, de la recta o del plano, tal que $\overrightarrow{\ \ '}$ es perpendicular a la recta o al plano dados (ver figura 7.25).



i ra 7.25

El problema de hallar la proyección de un punto sobre una recta o un plano se resuelve con métodos análogos a los que se utilizaron para descomponer un vector en sus componentes paralela y perpendicular a un vector fijado. En lugar de encontrar fórmulas de manera teórica preferimos realizar algunos ejemplos.

EJEMPLO F. Queremos hallar la proyección del punto $= (1, 2)$ sobre la recta r de ecuación

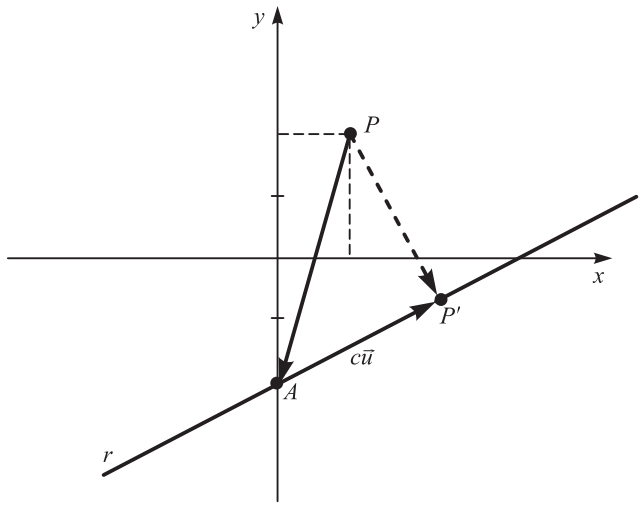
$$-2 + 3y = -6$$

en el plano. Un vector perpendicular a la recta dada es $\vec{v} = (-2, 3)$ y, por tanto, $\vec{} = (3, 2)$ es un vector director de la recta. Si tomamos un punto de la recta, por ejemplo, $= (0, -2)$, $'$ será de la forma: $' = + \vec{}$. Además, $\overrightarrow{\ \ }'$ es perpendicular a $\vec{}$ y, por tanto,

$$0 = (\overrightarrow{\ \ }', \vec{}) = (\overrightarrow{\ \ } + \vec{}, \vec{}) = (\overrightarrow{\ \ }, \vec{}) + (\vec{}, \vec{}) =$$
$$= ((-1, -4), (3, 2)) + ((3, 2), (3, 2)) = -11 + \cdot 13.$$

De aquí deducimos que $= 11/13$ y, por tanto,

$$' = (0, -2) + \frac{11}{13}(3, 2) = \left(\frac{33}{13}, -\frac{4}{13}\right).$$



i ra 7.26

EJEMPLO G. Queremos hallar la proyección del punto $= (1, 2, 3)$ sobre el plano π de ecuación $+ y - 2 = 3$; sabemos que un vector perpendicular a este plano es $\vec{v} = (1, 1, -2)$. Si $'$ es la proyección de sobre el plano π hemos de tener $\overrightarrow{\ \ }' = \vec{v}$; además (ver figura 7.25), si es un punto del plano, por ejemplo, $= (1, 2, 0)$, se tiene que $\overrightarrow{\ \ }'$ es perpendicular a $\vec{v}$. Por tanto:

$$0 = (\overrightarrow{\ \ }', \vec{v}) = (\overrightarrow{\ \ } + \overrightarrow{\ \ }', \vec{v}) = (\overrightarrow{\ \ }, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{v}) =$$
$$= ((0, 0, 3), (1, 1, -2)) + ((1, 1, -2), (1, 1, -2)) = -6 + 6 .$$

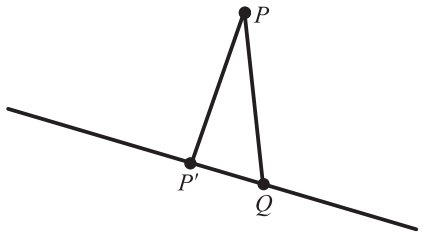
Así pues, $= 1$ y $\overrightarrow{\ \ }' = \vec{v} = (1, 1, -2)$. Como $' = + \overrightarrow{\ \ }'$, se tiene

$$' = (1, 2, 3) + (1, 1, -2) = (2, 3, 1).$$

* * *

Se denomina *i tan ia e n nto a na re ta o a n lano* a la menor de las distancias del punto a cada uno de los puntos de la recta o del plano. Utilizando el teorema de Pitágoras se demuestra que la distancia de a una recta o a un plano coincide con la distancia de a la proyección ′ de sobre la recta o el plano considerados. Para demostrar esto basta observar que si es otro punto de la recta o del plano (ver figura 7.27) se tiene

$$\|\overrightarrow{\quad}\|^2 = \|\overrightarrow{\quad}'\|^2 + \|\overrightarrow{\quad'\quad}\|^2 > \|\overrightarrow{\quad}'\|^2$$



i ra 7.27

si ≠ ′. Puesto que ya sabemos calcular la proyección ′ de también sabemos calcular la distancia de un punto a una recta o a un plano.

En los casos de la distancia de un punto a una recta en un plano o de un punto a un plano en el espacio se obtiene una fórmula sencilla.

Proposición 7.3.1 (Distancia de un punto a un plano)

La distancia del punto = (1, 2, 3) al plano π de ecuación $a_1\ _1 + a_2\ _2 + a_3\ _3 + \ = 0$ está dada por la fórmula

$$(\ , \pi) = \frac{|a_1\ _1 + a_2\ _2 + a_3\ _3 + \ |}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Demostración. La ecuación del plano puede escribirse de la forma

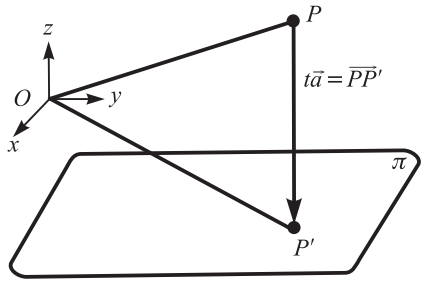
$$(\vec{a}, \vec{\ }) + \ = 0$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{\ } = (\ _1, \ _2, \ _3)$. Puesto que $\vec{a}$ es un vector perpendicular al plano, la distancia (, π) del punto al plano π es de la forma $\|t\vec{a}\|$, donde t debe de ser elegido de manera que (ver figura 7.28)

$$+ t\vec{a} = \ ' \in \pi.$$

Para obtener t sustituimos en la ecuación del plano:

$$0 = (\vec{a}, \overrightarrow{\quad}') + \ = (\vec{a}, \overrightarrow{\quad} + t\vec{a}) + \ = (\vec{a}, \overrightarrow{\quad}) + t(\vec{a}, \vec{a}) + \ .$$



i ra 7.28

De aquí deducimos que

$$t = \frac{-(\vec{a}, \overrightarrow{\quad}) -}{\|\vec{a}\|^2}$$

y, por tanto,

$$(\ , \pi) = \|t\vec{a}\| = \left\| \frac{-(\vec{a}, \overrightarrow{\quad}) -}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a} \right\| = \frac{|(\vec{a}, \overrightarrow{\quad}) + \ |}{\|\vec{a}\|}$$

que coincide con la fórmula anunciada en la proposición. ■

Un razonamiento similar al anterior permite obtener el siguiente resultado, que se deja como ejercicio.

Proposición 7.3.2 (Distancia de un punto a una recta en el plano)

La distancia del punto $= (\ _1, \ _2)$ a la recta r de ecuación $a_1\ _1 + a_2\ _2 + \ = 0$ está dada por la fórmula

$$(\ , r) = \frac{|a_1\ _1 + a_2\ _2 + \ |}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

EJEMPLO H. La distancia del punto $= (1, 3, -2)$ al plano de ecuación

$$\pi : 3\ _1 - 2\ _2 + 7\ _3 = 5$$

es

$$(\ , \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2}} = \frac{|-22|}{\sqrt{62}} = \frac{22}{\sqrt{62}}.$$

* * *

Tratamos de hallar ahora las *bi e tri e e o re ta a a* que se cortan. Tanto en el plano como en el espacio sus ecuaciones serán de la forma

$$+ t\vec{\ } \quad \text{y} \quad + \vec{v}$$

donde es el punto de corte, $\vec{\ }$ es el vector director de una de las rectas y $\vec{v}$ es el vector director de la otra recta. Puesto que $\frac{\vec{\ }}{\|\vec{\ }\|}$ y $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ son vectores de igual longitud es fácil demostrar que

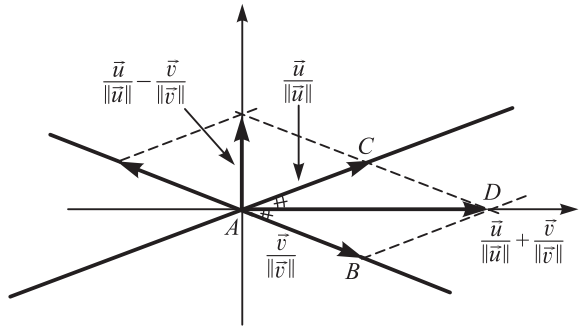
$$\frac{\vec{\ }}{\|\vec{\ }\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

y

$$\frac{\vec{\ }}{\|\vec{\ }\|} - \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

son vectores que tienen la dirección de cada una de las bisectrices buscadas. Basta para ello observar que los triángulos y de la figura 7.29 son isósceles y semejantes. Las ecuaciones de las bisectrices serán

$$+ t\left(\frac{\vec{\ }}{\|\vec{\ }\|} \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right).$$



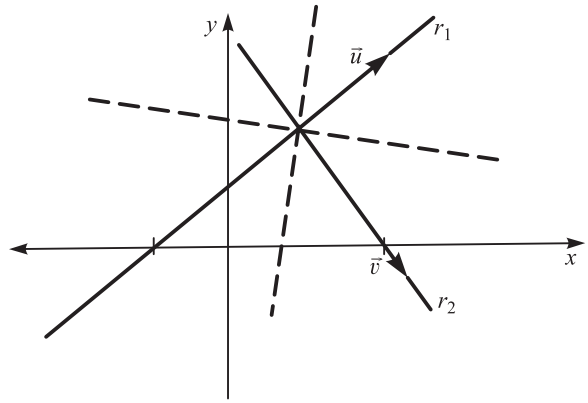
i ra 7.29

EJEMPLO I. Deseamos hallar las bisectrices de las rectas de ecuaciones

$$r_1: \quad - y = -1, \qquad r_2: 2 \quad + y = 4.$$

Un vector perpendicular a r_1 es $(1, -1)$, luego un vector director de r_1 es

$$\vec{\ } = (1, 1).$$



i ra 7.30

Un vector perpendicular a r_2 es (2, 1), luego un vector director de r_2 es

$$\vec{v} = (1, -2).$$

Los vectores directores de las bisectrices serán

$$\frac{\vec{\ }}{\|\vec{\ }\|} \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \pm \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}}.$$

Un punto por el que pasan las bisectrices es el punto de intersección de las rectas dadas; el lector puede comprobar que este punto es = (1, 2). Por tanto:

$$(, y) = (1, 2) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

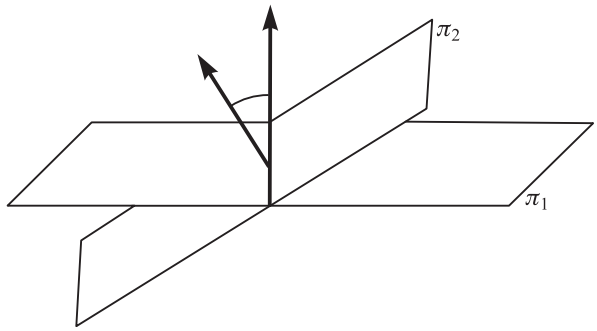
son las ecuaciones paramétricas de las bisectrices.

* * *

Para terminar esta sección recordamos que el *ng lo e orman o lano* se define como el ángulo que forman sus vectores perpendiculares (ver figura 7.31). Por tanto, el coseno del ángulo que forman dos planos puede calcularse mediante la fórmula obtenida al comienzo de esta sección.

Si el lector desea realizar algún ejercicio relacionado con este concepto puede intentar hallar el ángulo que forman los planos de ecuaciones

$$3 \ - 2y + \ = 0 \quad \text{y} \quad 2 \ + y - 3 \ = 0$$



i ra 7.31

EJERCICIOS 7.3

1. Dados los puntos = (1, 0), = (−1, 1) y = (2, 1) y las rectas

$$r_1 : 3 \ + y = 4, \ r_2 : \ - 2y = -1$$

se pide:

a) Distancia de a .

b) El coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{\ }$ y $\overrightarrow{\ }$.

c) El coseno del ángulo que forman las rectas r_1, y r_2.

d) Ecuación cartesiana de la recta que pasa por y es perpendicular a r_1.

e) Ecuación cartesiana de la recta que pasa por y es perpendicular a r_2.

f) Descomponer el vector en un vector paralelo a la recta r_1 y en otro perpendicular a ella.

g) Hallar la proyección del punto sobre la recta r_2.

) Hallar la distancia de a r_2 y de a r_1.

i) Hallar el simétrico del punto con respecto a la recta r_1.

) Encontrar las ecuaciones cartesianas de las bisectrices de r_1 y r_2.

2. Dados los puntos $= (1, 0, 0)$, $= (1, 0, 1)$ y $= (2, 3, -2)$ y los planos

$$\pi_1 : 3 \quad - y + \quad = 3, \quad \pi_2 : \quad + 2y - \quad = 2$$

se pide:

a) Distancia de a y de a .

b) El coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

c) Ecuación del plano perpendicular al vector que pasa por .

d) La proyección del punto sobre el plano π_1.

e) Descomponer el vector en un vector perpendicular a π_2 y otro paralelo a π_2.

f) Encontrar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular al plano π_1 que pasa por .

g) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta intersección de los dos planos dados y que pasa por .

) Distancia de a π_2 y de a π_1.

i) Hallar el punto simétrico de respecto del plano π_1.

3. Dados los puntos $= (0, 0, 1)$ y $= (0, 3, 0)$ y las rectas de ecuaciones:

$$r_1 : (1, 1, 0) + t(2, 0, 1), \quad r_2 : (0, 0, \ - \ 2) + \ (1, \ -1, 3)$$

se pide:

a) Demostrar que r_1 y r_2 se cruzan.

b) Ecuación del plano perpendicular a r_1 que pasa por .

c) Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta paralela a r_1 que corta a r_2 en el punto $(0, 0, -2)$.

d) Ecuaciones de las bisectrices de la recta r_2 y la encontrada en el apartado anterior.

e) La proyección del punto sobre r_1.

f) Distancia de a r_1 y de a r_2.

g) Descomponer el vector en un vector paralelo y otro perpendicular a r_1.

) Ecuación del plano paralelo a r_1 que contiene a r_2.

i) Ecuación del plano paralelo a r_2 que contiene a r_1.

) Distancia de r_1 a r_2. [*geren ia*: hallar la distancia entre los planos de los apartados **)** e **i)**.]

4. Utilizar vectores para demostrar que las diagonales de un rectángulo son perpendiculares si y solo si el rectángulo es un cuadrado.

5. Demostrar que las bisectrices de dos rectas que se cortan son perpendiculares.

6. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r_1: \begin{cases} -y + = 1 \\ 2 + y = 3 \end{cases}, \qquad r_2: \begin{cases} y + = 2 \\ -2y + = 0 \end{cases},$$

demostrar que se cortan y hallar las ecuaciones paramétricas de sus bisectrices.

7. Hallar la ecuación del plano cuyo punto más cercano al origen es $= (1, -2, 1)$.

8. Hallar la ecuación de un plano que determine con los ejes coordenados segmentos de longitudes 2, 3 y 1, respectivamente.

9. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano de ecuación $2 - 3y - 6 - 14 = 0$ y que dista 5 unidades del origen.

10. Encontrar la ecuación del plano perpendicular al de ecuación $- 2y - 2 + 9 = 0$ que pasa por los puntos $= (2, -1, 6)$ y $= (1, -2, 4)$.

7.4. FIGURAS SENCILLAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO: SUS ECUACIONES

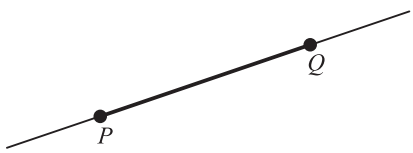
En las secciones anteriores hemos estudiado las rectas y los planos por medio de sus ecuaciones. En esta sección estudiaremos otras figuras en el plano y en el espacio. En todas ellas se observará que si sus ecuaciones paramétricas solo dependen de un parámetro las figuras son curvas o trozos de curvas, mientras que si dependen de dos parámetros se trata de superficies o trozos de superficies.

Comenzamos con el segmento que une los puntos y como en la figura 7.32, donde y pueden ser puntos del plano o del espacio. La recta que contiene a y tiene como ecuación paramétrica

$$+ t(\overrightarrow{\quad}) = + t(-) = (1 - t) + t$$

donde t es un número real. Si imponemos la restricción

$$0 \leqslant t \leqslant 1$$



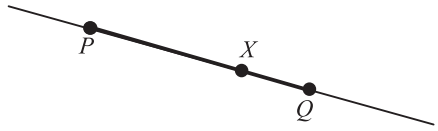
i ra 7.32

se obtienen todos los puntos del segmento $\overline{\quad}$ y solamente estos. Por tanto, el segmento $\overline{\quad}$ puede representarse de la forma

$$(1 - t) \quad + t \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Dado un punto en el segmento $\overline{\quad}$ se denomina *ra n e* con *re e to a y* al cociente

$$r = \frac{\|\overrightarrow{\quad}\|}{\|\overrightarrow{\quad}\|}.$$



i ra 7.33

La razón de un punto con respecto a otros dos es, por tanto, un número real positivo.

Dado un número real positivo r siempre puede encontrarse un punto tal que su razón con respecto a dos puntos dados y distintos de sea r. Para encontrar observamos que

$$r = \frac{\|\overrightarrow{\quad}\|}{\|\overrightarrow{\quad}\|}$$

y además:

$$= (1 - t) \quad + t \quad = \quad + t\overrightarrow{\quad}$$

para algún $t \in (0, 1)$. Para encontrar este valor de t sustituimos en la fórmula que nos da la razón r y obtenemos

$$r = \frac{\|t\overrightarrow{\quad}\|}{\|(1 - t)\overrightarrow{\quad}\|} = \frac{t}{1 - t}.$$

De aquí podemos despejar t en función de r:

$$t = \frac{r}{1 + r}.$$

El punto medio del segmento $\overline{\quad}$ es un punto cuya razón es 1 con respecto a y y, por tanto, $t = 1/2$. De aquí deducimos que el punto medio de $\overline{\quad}$ es

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad + \frac{1}{2} \quad = \frac{+}{2}.$$

EJEMPLO A. Queremos hallar un punto que tenga razón 2 con respecto a los puntos $= (1, 2, 0)$ y $= (-1, 0, 3)$. El punto será de la forma $= (1 - t) \quad + t$, donde

$$t = \frac{r}{1 + r} = \frac{2}{3}.$$

Por tanto:

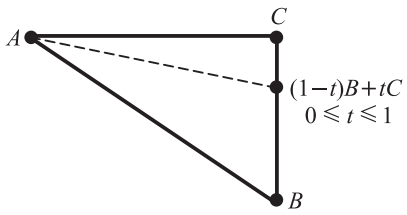
$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right)(1, 2, 0) + \frac{2}{3}(-1, 0, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\right).$$

Observar que es un punto que dista $\frac{2}{3}\|\overrightarrow{\ }\|$ de y $\frac{1}{3}\|\overrightarrow{\ }\|$ de .

* * *

Tres puntos no alineados , y , en el plano o en el espacio, determinan un triángulo como el de la figura 7.34. Los puntos del triángulo y su interior pueden describirse paramétricamente. Los puntos del lado tienen como ecuación paramétrica

$$(1-t) \quad + t \quad , 0 \leqslant t \leqslant 1.$$



i ra 7.34

Uniendo con todos los puntos del lado se tiene el triángulo y su interior, que satisface la ecuación

$$(1- \quad) \quad + \quad [(1-t) \quad + t \quad] \quad , \quad 0 \leqslant \quad \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Esto puede escribirse de la forma

$$(1- \quad) \quad + \quad (1-t) \quad + \quad t \quad , \quad 0 \leqslant \quad \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

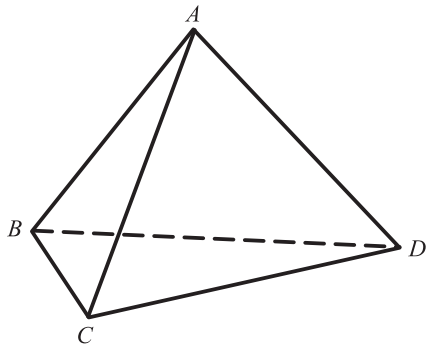
o bien

$$a \quad + b \quad + \quad , \quad a + b + \quad = 1 \quad , \quad 0 \leqslant a, b, \quad \leqslant 1.$$

La demostración de esta última afirmación se deja como ejercicio para el lector.

Cuatro puntos , , y no coplanarios en el espacio determinan un poliedro de cuatro caras triangulares, es decir, un tetraedro, como el de la figura 7.35. Puede demostrarse con un razonamiento análogo al anterior que los puntos del tetraedro y de su interior se representan paramétricamente de la forma

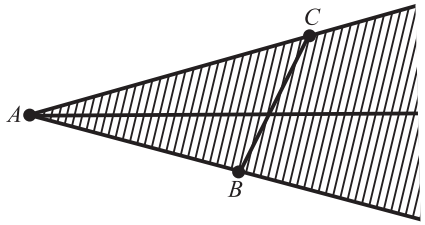
$$a \quad + b \quad + \quad + \quad , \quad a + b + \quad + \quad = 1 \quad , \quad 0 \leqslant a, b, \quad , \quad \leqslant 1.$$



i ra 7.35

EJEMPLO B. Dados , y , tres puntos en el plano o en el espacio, queremos hallar las ecuaciones paramétricas de la región sombreada de la figura 7.36. El segmento que une con tiene como ecuaciones paramétricas

$$(1 - t) \quad + t \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$



i ra 7.36

Trazando las semirrectas que unen con cualquiera de los puntos del segmento se obtiene la región sombreada. Estas semirrectas tienen por ecuación

$$(1 - \quad) \quad + \quad [(1 - t) \quad + t \quad] \quad , \quad 0 \leqslant \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

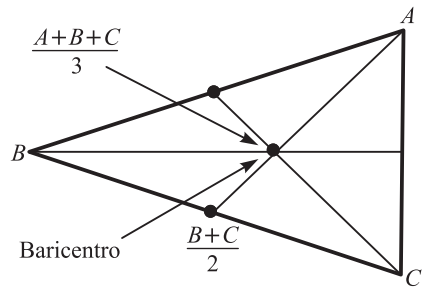
* * *

Dado un triángulo cualquiera, se denominan *me iana* a las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Demostraremos a continuación que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia a cualquiera de los vértices del triángulo es 2/3 de la distancia del vértice al punto medio del lado opuesto.

Para demostrar este resultado sean , y los vértices del triángulo; el punto medio del lado es $\dfrac{+}{2}$. El punto que se encuentra del vértice a $\frac{2}{3}$ de la distancia de al punto medio del lado es (ver ejemplo A):

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \quad + \frac{2}{3}\frac{+}{2} = \frac{1}{3} \quad + \frac{+}{3} = \frac{+ \quad +}{3}.$$



i ra 7.37

Realizando el razonamiento con cualquier otro vértice se obtendrá el mismo resultado. Esto demuestra nuestra afirmación.

El punto donde se cortan las *me iana* de un triángulo se denomina *bari entro* o *entro e grave a* del triángulo.

Otros puntos característicos de un triángulo se obtienen como intersección de sus alturas, sus bisectrices o sus mediatrices. Los resultados que a ellos les conciernen se proponen en los ejercicios del final de esta sección.

* * *

Pasamos a continuación a estudiar las figuras más sencillas en el plano y en el espacio que no pueden formarse con segmentos de rectas.

En el plano tenemos la *ir n eren ia*, que es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo, llamado *entro*. La distancia del centro a uno cualquiera de los puntos de la circunferencia recibe el nombre de *ra io* de la circunferencia.

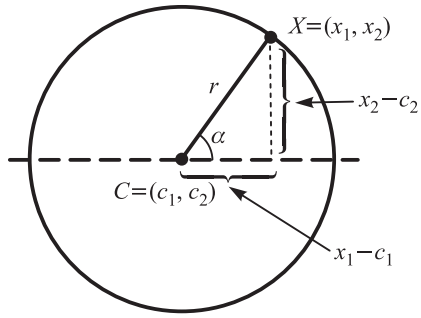
Si $= (\ _1,\ _2)$ es el centro de la circunferencia y r el radio, un punto $= (\ _1,\ _2)$ está en la circunferencia si y solo si

$$(\ ,\ ) = r.$$

Por tanto:

$$(\ _1 - \ _1)^2 + (\ _2 - \ _2)^2 = r^2$$

es la *e a i n arte iana* de la circunferencia de centro y radio r.



i ra 7.38

Ecuaciones paramétricas de la circunferencia pueden encontrarse utilizando el ángulo α que forma el radio de la circunferencia con una recta fijada que pase por el centro de la circunferencia (ver figura 7.38). Se tiene que

$$_1 - \ _1 = r\cos\alpha, \quad _2 - \ _2 = r\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} _1 = \ _1 + r\cos\alpha \\ _2 = \ _2 + r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

con $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, son las ecuaciones paramétricas buscadas.

La figura que tiene a

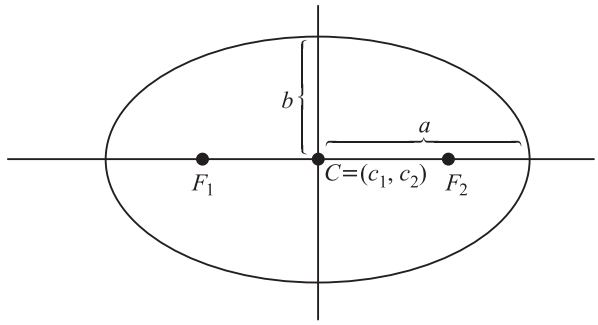
$$\begin{cases} _1 = \ _1 + a\cos\alpha \\ _2 = \ _2 + b\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

como ecuaciones paramétricas recibe el nombre de *eli e* (ver figura 7.39). Para encontrar su ecuación cartesiana observamos que

$$\cos\alpha = \frac{_1 - \ _1}{a} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{_2 - \ _2}{b}.$$

Por tanto,

$$1 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{(\ _1 - \ _1)^2}{a^2} + \frac{(\ _2 - \ _2)^2}{b^2}.$$



i ra 7.39

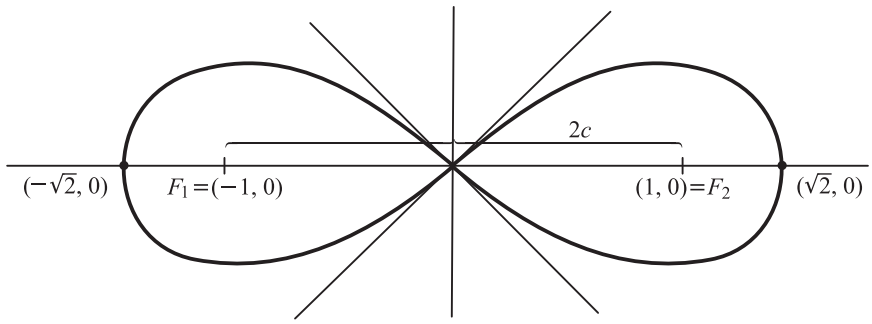
Como se verá en el Capítulo 11, la elipse puede definirse de la siguiente manera: el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, $_1$ y $_2$, es constante.

* * *

Otra curva que posee una definición «similar» a la de la elipse es la *lemni ata e erno i lli*: es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos, llamados focos, $_1$ y $_2$, tienen producto igual a ^{2}, con 2 la distancia entre ambos focos.

Si $_1 = (-1, 0)$ y $_2 = (1, 0)$, la lemniscata de Bernouilli tiene por ecuación

$$[(\ + 1)^2 + y^2][(\ - 1)^2 + y^2] = 1.$$



i ra 7.40

Simplificando esta igualdad se obtiene

$$(\ ^2 + y^2)^2 - 2(\ ^2 - y^2) = 0.$$

Escribiendo $= r\cos\alpha$, $y = r\operatorname{sen}\alpha$, con $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, tenemos que

$$r^4 = 2r^2(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha).$$

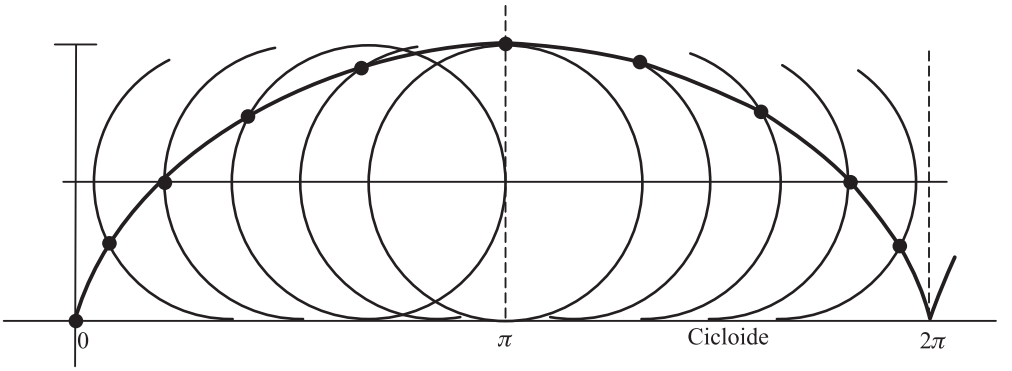
Por tanto:

$$r^2 = 2\cos 2\alpha.$$

Esta ecuación, denominada ecuación en coordenadas polares de la lemniscata de Bernouilli, permite obtener la representación gráfica de la figura 7.40. Observar que los valores de α en los intervalos $(\pi/4, 3\pi/4)$ y $(5\pi/4, 7\pi/4)$ no dan puntos con coordenadas reales.

* * *

La curva que describe un punto de una circunferencia cuando rueda sin deslizar sobre una recta tiene unas ecuaciones paramétricas sencillas. Esta curva recibe el nombre de *i loi e*, y su gráfica se aprecia en la figura 7.41.

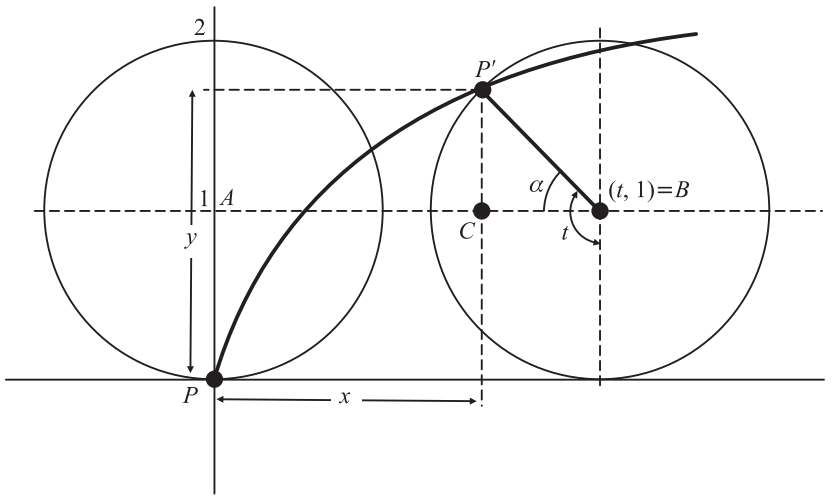


i ra 7.41

Si la circunferencia tiene radio 1 y está situada inicialmente como se muestra en la figura 7.42, después de que el centro de la circunferencia haya recorrido una longitud *t*, el punto se transforma en ′, cuyas coordenadas e *y* satisfacen

$$= t - \quad (\ , \quad) = t - \cos\alpha = t - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = t - \operatorname{sen} t$$

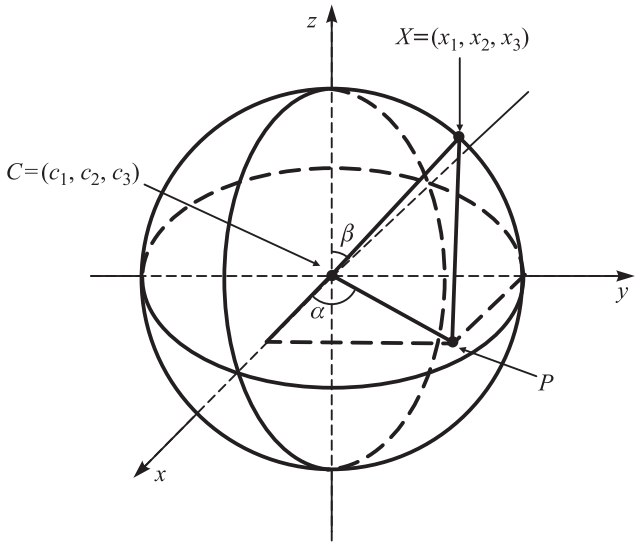
$$y = 1 + \quad (\ , \quad ') = 1 + \operatorname{sen}\alpha = 1 + \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos t.$$



i ra 7.42

* * *

En el espacio una de las figuras más importantes es la *e era*, que posee una definición similar a la de la circunferencia. La *e era* es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo, llamado *entro*. La distancia del centro a un punto cualquiera de la esfera recibe el nombre de *ra io* de la esfera.



i ra 7.43

Si $= (\ _1,\ _2,\ _3)$ es el centro de la esfera y r su radio, cualquier punto $= (\ _1,\ _2,\ _3)$ de ella satisface la igualdad

$$(\ ,\ ) = r.$$

Por tanto:

$$(\ _1 - \ _1)^2 + (\ _2 - \ _2)^2 + (\ _3 - \ _3)^2 = r^2$$

es la ecuación cartesiana de la esfera de centro y radio r.

Ecuaciones paramétricas de la esfera pueden encontrarse en función de los ángulos α y β de la figura 7.43. Tenemos

$$_3 - \ _3 = r\cos\beta$$

mientras que $\|\overrightarrow{\ \ }\| = r\,\text{sen}\,\beta$. De aquí deducimos que

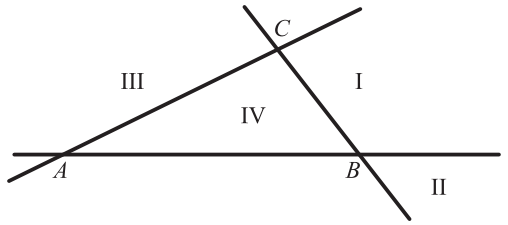
$$\left\{\begin{array}{l} _1 - \ _1 = r\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ _2 - \ _2 = r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ _3 - \ _3 = r\cos\beta \end{array}\right\}\quad, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \beta < \pi,$$

que son las ecuaciones paramétricas buscadas. Observar que estas ecuaciones paramétricas dependen de dos parámetros, α y β, lo cual está en concordancia con el hecho de que determinan una superficie en el espacio.

EJERCICIOS 7.4

1. Encontrar los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales, donde $=(-1, 0, -3)$ y $= (4, 3, 5)$.

2. Describir paramétricamente las regiones I, II, III y IV de la figura adjunta, donde , y son tres puntos no alineados.



3. Hallar la intersección de las siguientes figuras en el plano:

   a) La recta $= y + 1$ y la circunferencia $(- 2)^2 + y^2 = 6$.

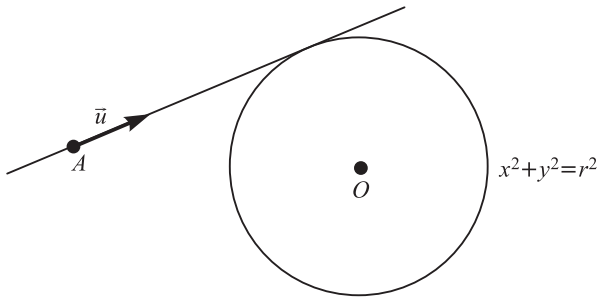
   b) El semiplano $y - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \geqslant \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ y la circunferencia $(- 2)^2 + y^2 = 6$.

   c) El sector $(4, 1) + (1 - - t)(1, 2), t > 0, > 0$ y el semiplano $+ 2y - 5 < 0$.

4. Demostrar que un criterio para que la recta $+ t\vec{}$ toque a la circunferencia $^2 + y^2 = r^2$ en un solo punto es que se cumpla la igualdad

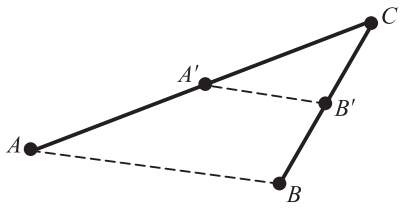
$$r^2 \|\vec{}\|^2 = \begin{vmatrix} {}^1 & {}^2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2$$

   donde $\vec{} = ({}_1, {}_2)$ y $= (a_1, a_2)$.

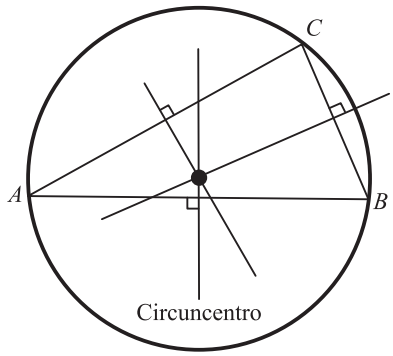


5. Demostrar que si $'$ y $'$ son los puntos medios de los segmentos $\overline{\quad}$ y $\overline{\quad}$, se tiene que

$$\|\overrightarrow{\quad'\quad'}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\quad}\|.$$

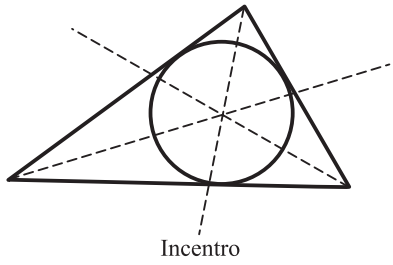


6. Se denomina *me iatri* de un segmento a la perpendicular por su punto medio. Demostrar que las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto que coincide con el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. (Este punto recibe el nombre de *ir n entro* del triángulo dado.)



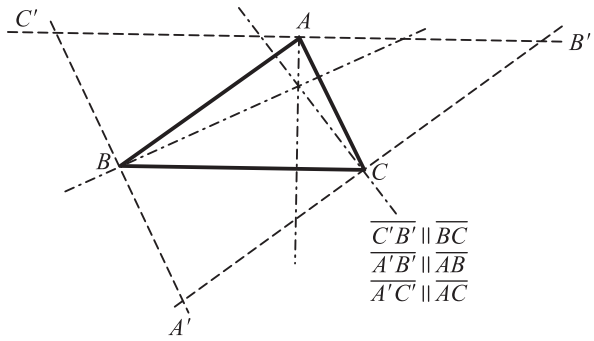
7. Demostrar que el circuncentro (ver ejercicio 6) de un triángulo rectángulo se halla en el punto medio de su hipotenusa.

8. Se denomina *bi e tri* de un ángulo a la recta que divide al ángulo en dos partes iguales. Demostrar que las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un solo punto que coincide con el centro de la circunferencia inscrita en él. (Este punto recibe el nombre de *in entro* del triángulo dado.)



9. Cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y son perpendiculares al lado opuesto reciben el nombre de *alt ra* del triángulo de la figura adjunta. Estas alturas coinciden con las mediatrices del triángulo $'\ '\ '$ de dicha figura. Deducir de este

resultado y del ejercicio 6 que las alturas de un triángulo se cortan en un punto. (Este punto se denomina *orto entro* del triángulo dado.)



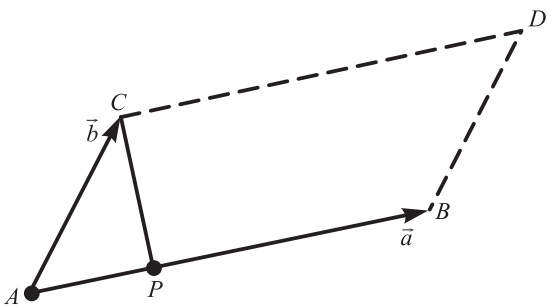
10. Dado el triángulo en el plano cuyos vértices tienen coordenadas $= (-3, 0)$, $= (2, 1)$ y $= (0, 3)$, hallar:
    a) Las coordenadas del baricentro.
    b) El circuncentro y la ecuación de la circunferencia circunscrita.
    c) El incentro y la ecuación de la circunferencia inscrita.
    d) El ortocentro.
    (Ver los ejercicios 6, 8 y 9 para las definiciones.)

11. Hallar las ecuaciones de la altura relativa al vértice del prisma de base triangular , donde
    $= (1, 1, 3)$, $= (0, -1, 0)$, $= (1, 0, 0)$ y $= (0, 3, 1)$.

12. Encontrar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes figuras:
    a) La circunferencia que pasa por los puntos $= (2, 1)$, $= (0, 3)$ y $= (-1, 0)$.
    b) La esfera que pasa por los puntos $= (1, 2, 0)$, $= (1, 0, 2)$, $= (3, 0, 0)$ y $= (2, 1, \sqrt{2})$.

7.5. ÁREAS Y VOLÚMENES. PRODUCTO VECTORIAL

Comenzaremos encontrando una fórmula para determinar el área de un paralelogramo situado en el plano o en el espacio. Observamos, en primer lugar, que un paralelogramo queda determinado por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que son linealmente independientes (ver figura 7.44).



i ra 7.44

Sabemos que el área de un paralelogramo se obtiene multiplicando la longitud de su base por la altura; por tanto:

$$\text{área} = \|\vec{a}\| \cdot \|\overrightarrow{\quad}\|$$

donde es la proyección del punto sobre la recta que contiene a y . Puesto que $\|\overrightarrow{\quad}\| = \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, deducimos que

$$(\text{área})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \operatorname{sen}^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 [1 - \cos^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})] =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \left[1 - \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2} \right] = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2.$$

Hemos obtenido el siguiente resultado:

Proposición 7.5.1

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores linealmente independientes en el plano o en el espacio, la superficie del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se obtiene mediante la fórmula

$$= \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}}.$$

Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ son dos vectores linealmente independientes en *el lano* tenemos que

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 =$$

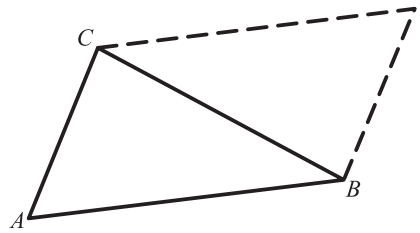
$$= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - a_2^2 b_2^2 =$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

Por tanto, *el rea e n aralelogramo en el lano oin i e on el valor ab ol to el eter minante orma o or la om onente e lo ve tore e lo eterminan.*

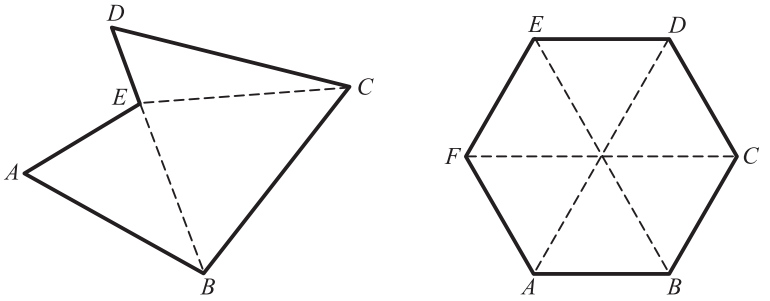
En el espacio también existe una fórmula sencilla, pero es necesario utilizar el concepto de producto vectorial que se introducirá más adelante.

El área de un triángulo de vértices , y coincide con la mitad del área del paralelogramo determinado por los vectores y , como puede observarse en la figura 7.45. Por tanto, las fórmulas para el área de un triángulo se obtienen dividiendo entre 2 las fórmulas para el área del paralelogramo que él determina.



i ra 7.45

Finalmente, recordamos que el área de cualquier polígono es fácil calcular a partir del área de triángulos, ya que cualquier polígono puede triangularse (ver figura 7.46).



i ra 7.46

EJEMPLO A. Tratemos de encontrar el área del triángulo de vértices = (1, 2), = (−2, 0) y = (1, −3). Si consideramos los vectores

$$\vec{a} = \overrightarrow{\quad} = (0, -5)$$

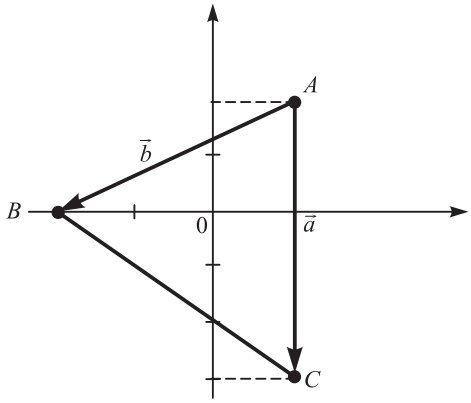
y

$$\vec{b} = \overrightarrow{\quad} = (-3, -2),$$

se tiene que

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

Por tanto, el área pedida es 15/2.

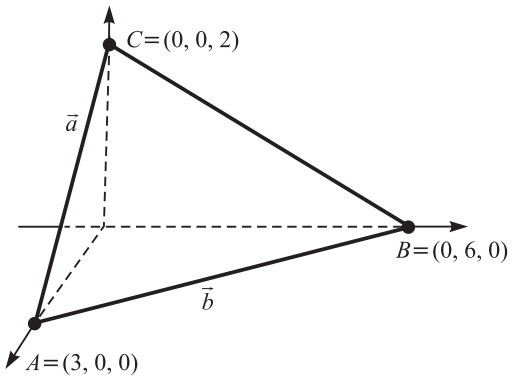


i ra 7.47

EJEMPLO B. Queremos encontrar el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación 2 + y + 3 = 6 con los ejes coordenados (figura 7.48). Estos puntos son

= (3, 0, 0), = (0, 6, 0) y = (0, 0, 2)

como fácilmente puede comprobarse.



i ra 7.48

Si tomamos

$$\vec{a} = (-3, 0, 2) \quad \text{y} \quad \vec{b} = (-3, 6, 0),$$

de la Proposición 7.5.1 deducimos que

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(9 + 0 + 4)(9 + 36 + 0) - (9 + 0 + 0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{13 \cdot 45 - 81} =$$

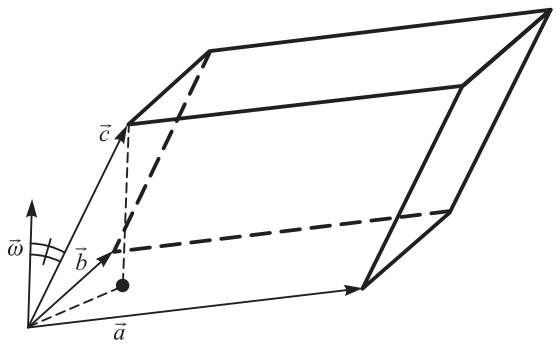
$$= \frac{1}{2}\sqrt{504} = 3\sqrt{14}.$$

Observar que en este caso no podemos utilizar el determinante, mientras que sí se utilizó en el ejemplo A.

* * *

Una fórmula en la que interviene un determinante de orden 3 puede utilizarse para calcular el volumen de un paralelepípedo en el espacio. Un *aralele í e o* queda determinado por tres vectores linealmente independientes (ver figura 7.49). Si estos vectores son

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \text{y} \quad \vec{} = (\ _1,\ \ _2,\ \ _3)$$



i ra 7.49

demostraremos que el volumen del paralelepípedo que ellos determinan se obtiene como el valor absoluto del determinante de la matriz.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\ }) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ {}_1 & {}_2 & {}_3 \end{pmatrix}.$$

Para demostrarlo basta con encontrar un vector $\vec{\omega}$ perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ya que entonces tendremos que

$$= \text{volumen} = (\text{área de la base}) \cdot \|\vec{\ }\| |\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{\omega})|$$

ya que la altura del paralelepípedo coincide con $\|\vec{\ }\| |\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{\omega})|$.

Para encontrar un vector $\vec{\omega} = ({}_1, {}_2, {}_3)$ que sea perpendicular a $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ basta resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{\omega}) &= a_1 {}_1 + a_2 {}_2 + a_3 {}_3 = 0 \\ (\vec{b}, \vec{\omega}) &= b_1 {}_1 + b_2 {}_2 + b_3 {}_3 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Puesto que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes:

$$r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$$

y, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

y sea ${}_3 = t$; tenemos que

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \left(t \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}, t \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}, t \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Tomando $t = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, por ejemplo, se tiene que

$$\vec{\omega} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

que recibe el nombre de *ro to ve torial e* $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Definición 7.5.2 (Producto ectorial de dos ectores)

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en el espacio, definimos su *ro to ve to rial* como el vector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Una forma de recordar las componentes del vector producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es observar que corresponden al resultado de eliminar la primera, la segunda y la tercera columna, respectivamente, de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

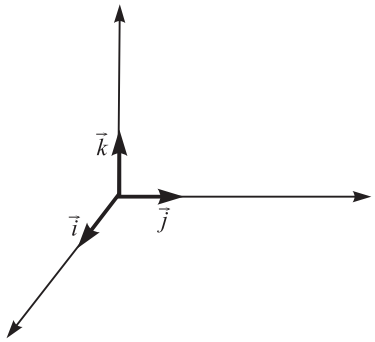
teniendo siempre cuidado de que a la segunda componente es necesario cambiarle el signo.

Otra forma de recordarlo, procedente de la física, es la siguiente: sean $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{} = (0, 1, 0)$ y $\vec{} = (0, 0, 1)$ los vectores coordenados unitarios; podemos escribir

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{} + a_3\vec{}$$

y

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{} + b_3\vec{}.$$



El vector $\vec{a} \times \vec{b}$ se obtiene desarrollando «formalmente» el determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{} & \vec{} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

por la primera fila.

EJEMPLO C. Tratemos de hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $= (2, 1, 3)$ y tiene $\vec{} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$ como vectores directores. Un vector perpendicular a $\vec{}$ y $\vec{v}$ es

$$\vec{} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -3, -1);$$

la ecuación de todos los planos perpendiculares a $\vec{} \times \vec{v}$ es

$$- \quad - 3y - \quad = \quad .$$

El valor de se calcula con la condición de que el punto pertenezca al plano; por tanto, tenemos $-2 - 3 - 3 = -8 = \quad$. La ecuación del plano es

$$+ 3y + \quad = 8.$$

* * *

El módulo o longitud del producto vectorial de dos vectores tiene una bonita interpretación geométrica. Si los vectores dados son $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y calculamos $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$ se tiene que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 +$$

$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 -$$

$$- 2[a_2b_3a_3b_2 + a_1b_3a_3b_1 + a_1b_2a_2b_1] = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) -$$

$$- a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2[a_2b_3a_3b_2 + a_1b_3a_3b_1 + a_1b_2a_2b_1] =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$$

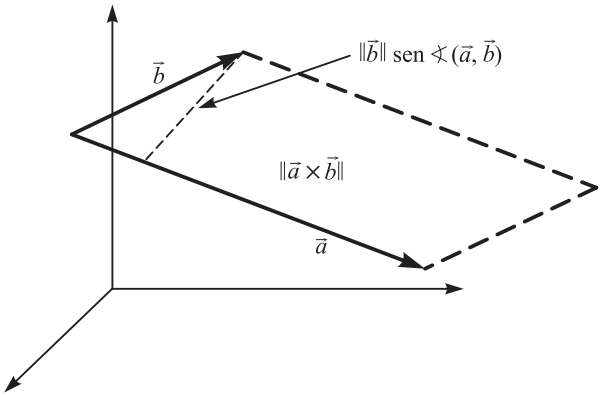
$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2.$$

De la Proposición 7.5.1 deducimos el siguiente resultado:

Proposición 7.5.3 (rea de un paralelogramo en el espacio)

El área de un paralelogramo en el espacio determinado por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ coincide con el módulo del producto vectorial de los vectores, es decir:

$$= \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$



i ra 7.50

El área del triángulo del ejemplo B podemos calcularla ahora utilizando el producto vectorial. En efecto, tenemos que

$$= \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}^2 \right]^{1/2} =$$

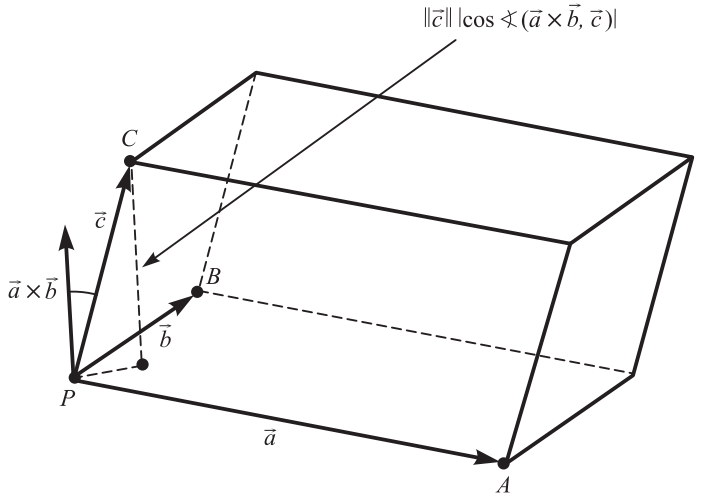
$$= \frac{1}{2} [144 + 36 + 324]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{504} = 3\sqrt{14},$$

que coincide con el resultado encontrado en el ejemplo B.

* * *

El problema que nos ha conducido a los resultados anteriores es el de encontrar una fórmula para determinar el volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$. Este problema puede ser resuelto ahora de una forma elegante. Para el paralelepípedo de la figura 7.51 se tiene que su volumen es

$$= (\text{área de la base}) \cdot \| \overrightarrow{\quad} \| \, |\cos \sphericalangle (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ })|.$$



i ra 7.51

Debido a la Proposición 7.5.3 se tiene que

$$= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{\ }\| \, |\cos \sphericalangle (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ })|.$$

Si recordamos la fórmula para calcular el coseno del ángulo que forman dos vectores (ver sección 7.3), obtenemos que

$$= |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ })|.$$

El producto escalar de $\vec{a} \times \vec{b}$ con $\vec{\ }$ recibe el nombre de *ro to mi to* de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{\ }$. El producto mixto de tres vectores puede calcularse utilizando un determinante, ya que

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ }) = \left(\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right), (\ _1, \ _2, \ _3) \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \ _1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \ _2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \ _3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \ _1 & \ _2 & \ _3 \end{vmatrix}.$$

Todos estos resultados quedan resumidos en la siguiente proposición:

Proposición 7.5.4 (olumen de un paralelep pedo)

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{\ }$ en el espacio puede calcularse mediante la fórmula

$$= |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ })|$$

y coincide con el valor absoluto del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ {}_1 & {}_2 & {}_3 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{\ } = ({}_1, {}_2, {}_3)$.

EJEMPLO D. El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$ y $\vec{\ } = (1, -2, -1)$ es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 4 + 3 = 10.$$

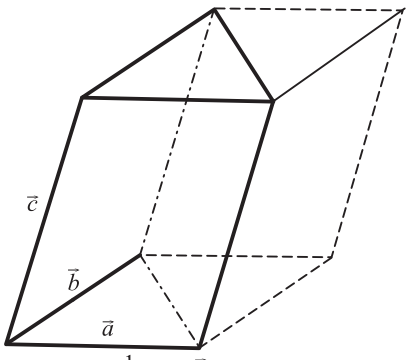
Por tanto, $= 10$.

* * *

Utilizando la Proposición 7.5.4 puede calcularse el volumen de otras figuras en el espacio. Si se trata, por ejemplo, de un prisma triangular determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{\ }$ (véase figura 7.52) se tiene que su volumen es

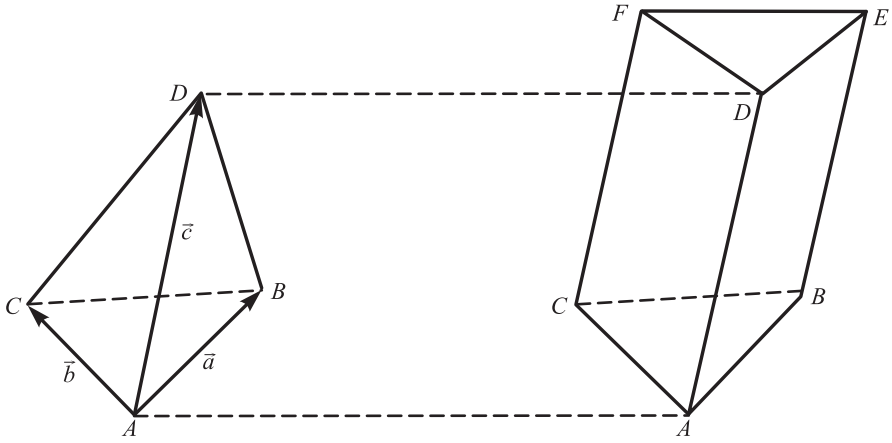
$$= \frac{1}{2} |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ })|$$

ya que dos de dichos prismas unidos por una de sus caras laterales forman un paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{\ }$.



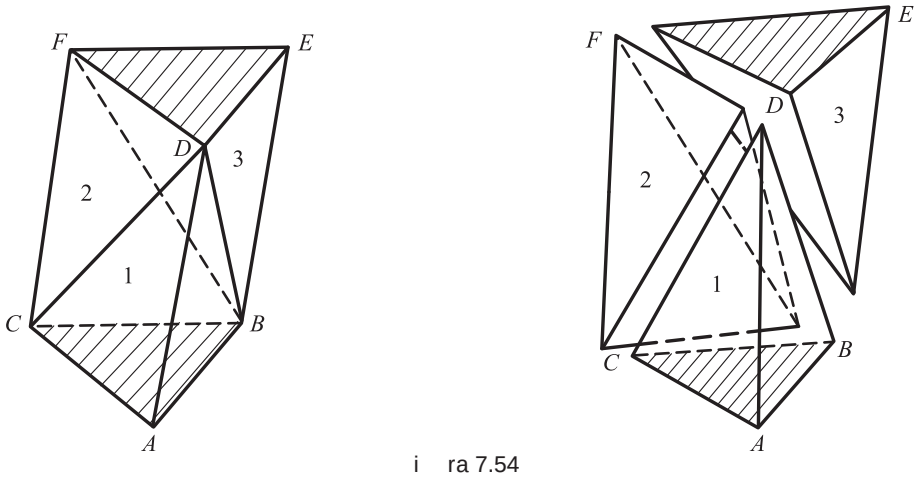
i ra 7.52

Para hallar el volumen de una pirámide de base triangular determinada por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{\ }$, consideramos el prisma de base y con altura igual a la de la pirámide dada (ver figura 7.53).



i ra 7.53

El prisma de base triangular de la derecha de la figura 7.53 puede dividirse en tres pirámides como se muestra en la figura 7.54.



i ra 7.54

La pirámide 1 es igual a la original de la figura 7.53. Las pirámides 1 y 3 tienen igual volumen porque tienen igual base y altura. Las pirámides 2 y 3 también tienen igual volumen porque pueden interpretarse con vértice común en y con bases los triángulos coplanarios iguales y . Luego las tres pirámides tienen igual volumen. Por tanto, para la pirámide de la figura 7.53 su volumen es

$$= \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\ })|.$$

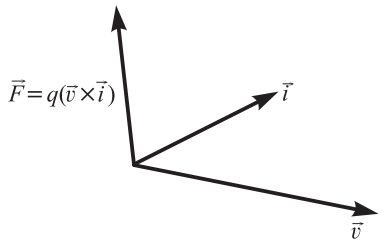
Este razonamiento está tomado del Curso de geometría métrica[1] (Lección 55, -§1).

* * *

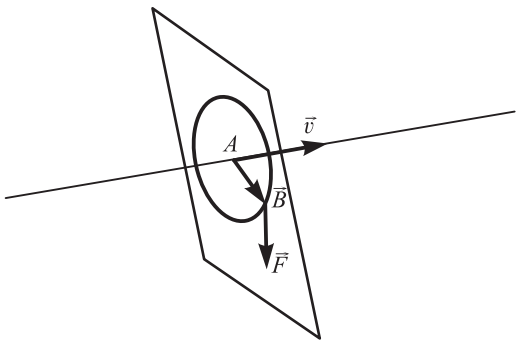
[1] P. Puig Adam, *r o e geometría m tri a* (1956).

El producto vectorial, que nos ha aparecido al intentar calcular áreas y volúmenes de figuras tridimensionales, aparece de manera natural en algunos fenómenos físicos. Se justifica experimentalmente que una carga eléctrica positiva de magnitud , que se mueve con una velocidad $\vec{v}$, dentro de un campo magnético de intensidad $\vec{i}$, se encuentra sometida a una fuerza cuyo módulo y dirección están dados por

$$= (\vec{v} \times \vec{i}).$$



Una corriente que circula por un hilo recto produce un campo magnético cuyo vector tiene el sentido del producto vectorial del vector que señala el sentido de la corriente, $\vec{v}$, en el hilo y el vector de la figura adjunta.



Estudiaremos a continuación las propiedades del producto vectorial. Sabemos que el producto vectorial tiene dirección perpendicular a cada uno de los vectores y su módulo o longitud coincide con el área del paralelogramo que ambos vectores determinan. Sin embargo, esto no determina completamente el producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ya que la dirección perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ posee dos sentidos opuestos. Se plantea entonces la pregunta de saber cuál es el sentido del vector $\vec{a} \times \vec{b}$.

Realizamos algunos ejemplos sencillos. Si $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, tenemos que

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \vec{e}_3$$

y

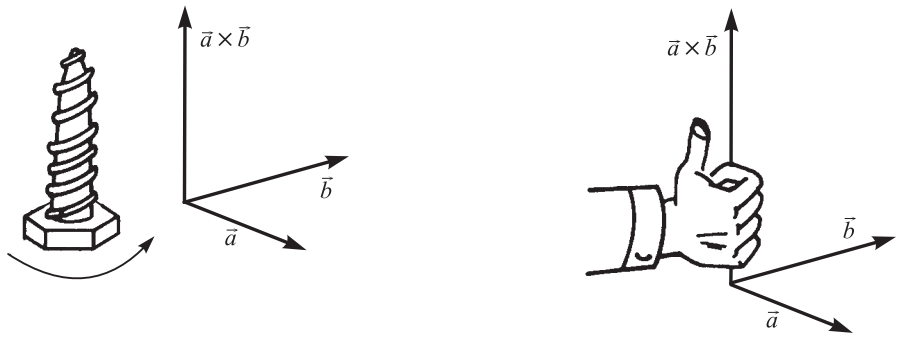
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = -\vec{e}_3.$$

En estos ejemplos se observa que el sentido del producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por el sentido de avance de un tornillo que gira yendo de $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$, con un ángulo inferior a 180^o.

Otra forma de recordar el sentido del producto vectorial es la *regla e la mano ere a*: el sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ es el sentido en el que apunta el dedo pulgar cuando los dedos de la mano derecha están curvados de $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$ con un ángulo inferior a 180^o (véase figura 7.55).

Las propiedades que conocemos del producto vectorial lo determinan totalmente, es decir, el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ que son linealmente independientes es el único vector que satisface las siguientes propiedades:

1) Es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
2) Su longitud es el área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
3) Su sentido está dado por la *regla el tornillo*, o de la mano derecha.



i ra 7.55

Proposición 7.5.5 (Propiedades del producto ectorial)

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y ¯ en $\mathbb{R}^3$ se tiene:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

b) $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = 0$ y $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$.

c) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \bar{} = \vec{a} \times \bar{} + \vec{b} \times \bar{}$.

e) $(\vec{a} \times \vec{b}, \bar{}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \bar{}) = (\vec{b}, \bar{} \times \vec{a})$.

f) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \bar{}) = (\vec{a}, \bar{})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\bar{}$.

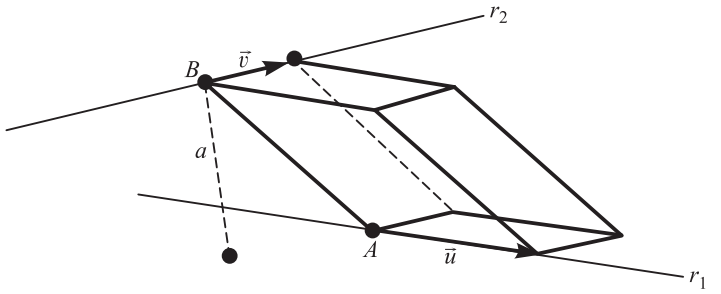
Nota. Las propiedades a), b) y c) se deducen inmediatamente de las propiedades ya conocidas del producto vectorial. El resto de las propiedades pueden demostrarse directamente utilizando la definición de producto vectorial, y se dejan como ejercicio para el lector.

Existen varias formas de calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio; una de ellas se sugiere en el apartado j) del ejercicio 3 de la sección 7.3. Otra de ellas puede obtenerse utilizando la Proposición 7.5.4 de esta sección. Dadas la rectas de ecuaciones

$$r_1: \quad + t\vec{\ } \quad \text{y} \quad r_2: \quad + \ \vec{v}$$

formamos un paralelepípedo como se muestra en la figura 7.56. El volumen del paralelepípedo se obtiene multiplicando el área de la base por la altura a. De las Proposiciones 7.5.3 y 7.5.4 deducimos que

$$= |(\vec{\ } \times \vec{v}, \overrightarrow{\ \ })| = \|\vec{\ } \times \vec{v}\| \cdot a.$$



i ra 7.56

Puesto que la altura a del paralelepípedo coincide con la distancia de al plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_2 y esta, a su vez, coincide con la distancia entre las rectas dadas, la distancia buscada es

$$(r_1, r_2) = a = |(\vec{\ } \times \vec{v}, \overrightarrow{\ \ })|/\|\vec{\ } \times \vec{v}\|.$$

EJEMPLO E. Para calcular la distancia entre las rectas de ecuaciones

$$r_1: (1, 0, 1) + t(2, 0, 1) \quad \text{y} \quad r_2: (0, 1, 1) + \ (1, 3, -1)$$

calculamos

$$(\vec{\ } \times \vec{v}, \overrightarrow{\ \ }) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

y

$$\|\vec{\ } \times \vec{v}\| = \|(2, 0, 1) \times (1, 3, -1)\| = \left\| \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) \right\| =$$

$$= \|(-3, 3, 6\| = (9 + 9 + 36)^{1/2} = \sqrt{54}.$$

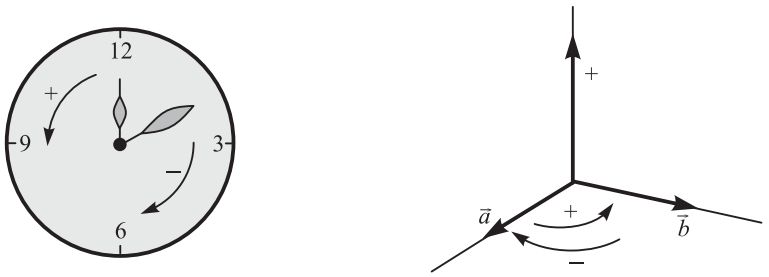
Por tanto,

$$(r_1, r_2) = \frac{6}{\sqrt{54}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

* * *

Terminamos esta sección haciendo algunos comentarios sobre la orientación del plano y del espacio y el sentido positivo de giro.

En un plano no hay una orientación privilegiada: podemos decir cuándo dos pares de vectores unitarios y perpendiculares entre sí tienen la misma orientación, pero no decir cuál es la orientación de cada uno de ellos. Sin embargo, decimos que hay un sentido positivo y un sentido negativo de giro porque siempre miramos nuestro plano de un lado fijo: el papel por el lado en que dibujamos o las agujas del reloj desde fuera del mismo. ¡Si usamos un plano transparente y lo miramos desde atrás, los sentidos de giro cambian!



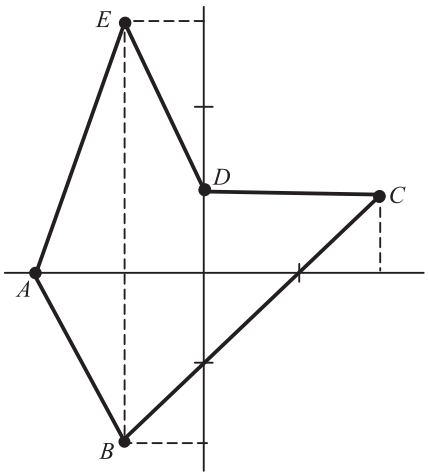
i ra 5.57

En el espacio no tiene sentido preguntar si el giro en torno a un eje es positivo o negativo y solo tiene una respuesta si se ha elegido un sentido positivo en el eje y el observador se sitúa en el sentido positivo de este eje. Sin embargo, siempre podemos decidir si tres vectores unitarios y perpendiculares entre sí están *o itivamente orienta o* : los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{\ }$ (unitarios y perpendiculares entre sí) están *o itivamente orienta o* si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{\ }$.

EJERCICIOS 7.5

1. Hallar el área de la figura de vértices , donde

$= (-2, 0), \quad = (-1, -2), \quad = (2, 1), \quad = (0, 1), \quad = (-1, 3).$



2. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes conjuntos de puntos:
   a) Plano que pasa por los puntos $= (1, 2, 1)$, $= (-1, 3, 0)$ y $= (2, 1, 3)$.
   b) Recta perpendicular a las rectas
   $$(3, 3, 2) + t(3, -1, 2) \quad \text{y} \quad (1, 1, 9) + (5, 1, -5)$$
   y que pasa por su punto de intersección.
   c) Plano perpendicular a la recta de ecuación $(1, 2, 1) + t(-1, 2, 0)$ que pasa por el punto $(-1, 2, 3)$.

3. Demostrar que la distancia de un punto a la recta $+ t\vec{}$ en el plano puede calcularse mediante la fórmula
   $$= \frac{\left| \begin{matrix} {}^{1} & {}^{2} \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \end{matrix} \right|}{\|\vec{}\|}$$
   donde $= (a_1, a_2)$, $= (b_1, b_2)$ y $\vec{} = ({}_1, {}_2)$.
   [*geren ia*: utilizar que el área de un paralelogramo en el plano puede expresarse como un determinante.]

4. Dada la pirámide de base y vértice , donde $= (2, 0, 0)$, $= (3, 1, 0)$, $= (0, 1, 0)$, $= (-1, 0, 0)$ y $= (1, 1, 3)$, hallar:
   a) El área de la cara .
   b) El área de la base.
   c) El volumen del prisma.
   d) La distancia entre las rectas y .
   e) El valor de la altura.

5. Hallar el volumen del prisma determinado por los vectores
   $$\vec{a} = (1, 2, -1), \quad \vec{b} = (0, 1, 2) \quad \text{y} \quad \vec{} = (1, 2, -3).$$

6. Demostrar las siguientes propiedades del producto vectorial:
   a) $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{}) = (\vec{b}, \vec{} \times \vec{a})$.
   b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{}) = (\vec{a}, \vec{})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{}$.

Capítulo 8

Espacios euclídeos.

8.1. Espacios euclídeos. Longitudes, áreas y ortogonalidad.

8.2. Bases ortonormales en un espacio euclídeo.

8.3. Complemento ortogonal. Proyecciones.

8.4. Adjunta de una aplicación. Aplicaciones autoadjuntas.

8.5. Aplicaciones ortogonales.

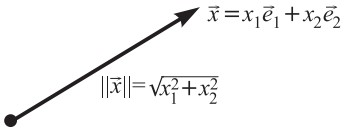
8.6. Clasificación de aplicaciones ortogonales.

8.7. Estructura de las aplicaciones lineales no singulares.

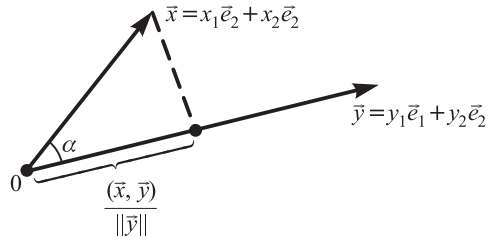
8.8. Descomposición en valores singulares de una matriz.

8.1. ESPACIOS EUCLÍDEOS. LONGITUDES, ÁREAS Y ORTOGONALIDAD

Una gran variedad de hechos geométricos se basan principalmente en la posibilidad de medir las longitudes de segmentos y los ángulos entre ellos. Obsérvese que en la definición de espacio vectorial no se incluye ningún concepto de medida. Para introducir el concepto de longitud de un vector y de ángulo entre dos vectores fijémonos en el espacio vectorial de los vectores en el plano.



i ra 8.1



i ra 8.2

La idea intuitiva que poseemos de longitud de un vector en el plano, que designamos por $\|\vec{\ }\|$, es $\|\vec{\ }\| = \sqrt{\ _1^2 + \ _2^2}$. Hemos visto en el Capítulo 7 que si α es el ángulo que forman $\vec{\ }$ e $\vec{y}$, se tiene

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{\ }, \vec{y})}{\|\vec{\ }\|\,\|\vec{y}\|} \quad , \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \tag{1.1}$$

en donde $(\vec{\ }, \vec{y})$ denota el *ro to e alar* de los vectores $\vec{\ } = \ _1\vec{e}_1 + \ _2\vec{e}_2$ e $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$. Recordar que el producto escalar de dos vectores en el plano ha sido introducido en la sección 7.3 y que la fórmula (1.1) ha sido demostrada en la misma sección.

La fórmula (1.1) relaciona ángulos con medidas y con productos escalares y es la base para introducir axiomas en un espacio vectorial, de manera que en los nuevos espacios se puedan estudiar propiedades geométricas.

Nuestra táctica es definir estos espacios, que serán los *e a io e lí eo* , *a* partir de una definición axiomática de «producto escalar». Después estudiaremos los conceptos de longitud, ángulo y ortogonalidad en estos espacios; finalmente estudiaremos diversos tipos de aplicaciones lineales entre ellos.

Definición 8.1.1

Un espacio eucl deo es un espacio vectorial real dotado de un producto escalar, es decir una regla que asigne a cada par de vectores $\vec{\ }, \vec{y} \in$ un número real, designado por $(\vec{\ }, \vec{y})$, de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

a) Simétrica: $(\vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{\ })$ para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$.
b) Distributiva: $(\vec{\ }, \vec{y} + \vec{\ }) = (\vec{\ }, \vec{y}) + (\vec{\ }, \vec{\ })$ para todo $\vec{\ }, \vec{y}, \vec{\ } \in$.
c) $(\lambda\vec{\ }, \vec{y}) = \lambda(\vec{\ }, \vec{y})$ para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
d) $(\vec{\ }, \vec{\ }) > 0$ para todo $\vec{\ } \neq \vec{0}$.

De b) y a) se deduce:

b′) $(\vec{\ } + \vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{\ }, \vec{y}) + (\vec{\ }, \vec{y})$ para todo $\vec{\ }, \vec{y}, \vec{\ } \in$.

De c) y a) se deduce:

c′) $(\vec{\ }, \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{\ }, \vec{y})$ para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

De b′) se deduce que $(\vec{y}, \vec{\ }) = (0 + \vec{y}, \vec{\ }) = (\vec{0}, \vec{\ }) + (\vec{y}, \vec{\ }) \Leftrightarrow (\vec{0}, \vec{\ }) = 0$.
Por la propiedad simétrica $(\vec{\ }, \vec{0}) = 0$. En particular, $(\vec{\ }, \vec{\ }) = 0$ si $\vec{\ } = \vec{0}$.

EJEMPLO A. El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \ {}_1y_1 + \ {}_2y_2,$$

donde $\vec{\ } = (\ {}_1, \ {}_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, y en general el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \ {}_1y_1 + \cdots + \ {}_ny_n,$$

donde $\vec{\ } = (\ {}_1, ..., \ {}_n)$ e $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, son ejemplos de espacios euclídeos. Las propiedades de la Definición 8.1.1 son fáciles de verificar y se dejan como ejercicio para el lector.

EJEMPLO B. Dados $\vec{\ } = (\ {}_1, \ {}_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ vectores en $\mathbb{R}^2$, definimos

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = (\ {}_1, \ {}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La aplicación que acabamos de definir de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ es un producto escalar: las propiedades b) y c) se deducen de las propiedades de la multiplicación de matrices; para probar a) y d) observamos que

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \ {}_1y_1 + \ {}_2y_1 + y_2 \ {}_1 + 2y_2 \ {}_2;$$

de aquí se deduce la propiedad simétrica; para probar la propiedad d) observar que

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \ {}_1^2 + 2 \ {}_1 \ {}_2 + 2 \ {}_2^2 = (\ {}_1 + \ {}_2)^2 + \ {}_2^2.$$

Por tanto, tenemos una nueva estructura de espacio euclídeo en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO C. Si $\vec{\ } = (\ {}_1, \ {}_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y definimos $(\vec{\ }, \vec{y}) = \ {}_1y_1$, esto no es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ puesto que no se cumple la propiedad d); en efecto, si $\vec{\ } = (0, \ {}_2) \neq \vec{0}$ se tiene $(\vec{\ }, \vec{\ }) = 0$.

EJEMPLO D. En el espacio vectorial $([a, b])$ de las funciones continuas reales definidas en el intervalo $[a, b]$, se puede definir un producto escalar que a las funciones (t) y $g(t)$ les asocia el número real

$$(\ , g) = \int_a^b \ (t)g(t) \ t,$$

obteniéndose un espacio euclídeo. El mismo producto escalar sirve para convertir el espacio vectorial $([a, b])$, de los polinomios en el intervalo $[a, b]$, en un espacio euclídeo.

* * *

Sea un espacio euclídeo de dimensión finita n (es decir, el espacio vectorial asociado a es de dimensión finita n) y sea $= \{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n\}$ una base de . En esta base, si $\vec{} \in$ e $\vec{y} \in$, podemos escribir:

$$\vec{} = \sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{}_i, \quad \vec{y} = \sum_{=1}^{n} y \vec{}.$$

Utilizando las propiedades b) y c) del producto escalar se tiene que

$$(\vec{}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{}_i, \sum_{=1}^{n} y \vec{} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n} {}_i y \, (\vec{}_i, \vec{}). \tag{1.2}$$

La matriz

$$\equiv \quad = \begin{pmatrix} (\vec{}_1, \vec{}_1) & (\vec{}_1, \vec{}_2) & \cdots & (\vec{}_1, \vec{}_n) \\ (\vec{}_2, \vec{}_1) & (\vec{}_2, \vec{}_2) & \cdots & (\vec{}_2, \vec{}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\vec{}_n, \vec{}_1) & (\vec{}_n, \vec{}_2) & \cdots & (\vec{}_n, \vec{}_n) \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de *matri el ro to e alar on re e to a la ba e* . Con esta notación la expresión (1.2) puede escribirse de la forma

$$(\vec{}, \vec{y}) = ({}_1, ..., {}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La matriz de un producto escalar es siempre simétrica debido a la propiedad a) y los elementos de su diagonal principal son todos positivos debido a la propiedad d).

Podemos preguntarnos si estas dos condiciones son suficientes para que una matriz defina un producto escalar; la respuesta es negativa, pues el lector puede encontrar un contraejemplo en el ejercicio 1 propuesto al final de esta sección. En el capítulo 12, dedicado a las formas bilineales y cuadráticas, se dará una condición necesaria y suficiente para que una matriz defina un producto escalar en un espacio vectorial.

* * *

La *longit* (*o norma*) de un vector $\vec{}$ en un espacio euclídeo se define como

$$\|\vec{}\| = \sqrt{(\vec{}, \vec{})} \quad , \quad \vec{} \in \quad .$$

Obsérvese que $\sqrt{(\vec{}, \vec{})}$ tiene sentido debido a la propiedad d) del producto escalar. En el ejemplo A se tiene:

$$\|\vec{}\| = \sqrt{ {}_1^2 + \cdots + {}_n^2} \quad , \quad \vec{} = ({}_1, ..., {}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

En el ejemplo B se tiene que

$$\|\vec{}\| = \sqrt{(\vec{}, \vec{})} = \sqrt{({}_1 + {}_2)^2 + {}_2^2} \quad , \quad \vec{} = ({}_1, {}_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Para el ejemplo D de las funciones continuas reales definidas en el intervalo $[a, b]$ se tiene

$$\| \ \| = \sqrt{\int_a^b [\ (t)]^2 \ t}, \qquad \in \ ([a, b]).$$

La longitud de un vector $\vec{} \in$ multiplicado por un número real λ coincide con $|\lambda|$ veces la longitud de $\vec{}$, ya que

$$\|\lambda\vec{}\| = \sqrt{(\lambda\vec{}, \ \lambda\vec{})} = \sqrt{\lambda^2(\vec{}, \ \vec{})} = |\lambda|\sqrt{(\vec{}, \ \vec{})} = |\lambda| \ \|\vec{}\|.$$

Todo vector de longitud 1 se dice *nitario*; todo vector $\vec{}$ no nulo de un espacio euclídeo puede *normali ar e*, es decir, hacerle unitario, multiplicándolo por $1/\|\vec{}\|$. La *bola ni a* es el conjunto de todos los $\vec{} \in$ tales que $\|\vec{}\| \leqslant 1$, mientras que *la e era ni a* es el conjunto de todos los $\vec{} \in$ tales que $\|\vec{}\| = 1$.

* * *

En todo espacio euclídeo se cumple la siguiente desigualdad:

Proposición 8.1.2 (Desigualdad de c arz)

En un espacio euclídeo ,

$$|(\vec{}, \vec{y})| \leqslant \|\vec{}\| \ \|\vec{y}\|$$

para todo $\vec{}, \vec{y} \in$.

Demostración. Por la propiedad d) del producto escalar se tiene

$$(\lambda\vec{} - \vec{y}, \lambda\vec{} - \vec{y}) \geqslant 0$$

para todo número real λ; de las propiedades a), b) y c) del producto escalar se deduce que

$$\lambda^2\|\vec{}\|^2 - 2\lambda(\vec{}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \geqslant 0.$$

La parte izquierda de esta ecuación es un polinomio cuadrático en λ que no puede tener raíces reales distintas, y, por tanto, su discriminante ha de ser $\leqslant 0$; por tanto:

$$(\vec{}, \vec{y})^2 - \|\vec{}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leqslant 0.$$

Tomando raíces cuadradas se deduce $|(\vec{}, \vec{y})| \leqslant \|\vec{}\| \ \|\vec{y}\|$, que es el resultado que deseábamos probar. ■

En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar «usual» dado en el ejemplo A, la desigualdad de Schwarz se escribe de la forma

$$\left| \sum_{=1}^{n} \ y \right| \leqslant \sqrt{\sum_{=1}^{n} \ ^2} \sqrt{\sum_{=1}^{n} y^2}, \tag{1.3}$$

y en el espacio ([a, b]) es

$$\left| \int_a^b \ (t)g(t) \ \ t \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b [\ (t)]^2 \ \ t} \sqrt{\int_a^b [g(t)]^2 \ \ t}. \tag{1.4}$$

La desigualdad (1.3) se atribuye al matemático francés Cauchy, mientras que (1.4) es atribuida al matemático ruso Buniakovski.

* * *

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce

$$-1 \leqslant \frac{(\vec{\ }, \vec{y})}{||\vec{\ }||\,||\vec{y}||} \leqslant 1,$$

por lo que el cociente $\dfrac{(\vec{\ }, \vec{y})}{||\vec{\ }||\,||\vec{y}||}$ puede ser el coseno de un único ángulo α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Se dice que este ángulo $\alpha = \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{y})$ es el que forman los vectores no nulos $\vec{\ }, \vec{y} \in$. Por tanto

$$\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{y}) = \frac{(\vec{\ }, \vec{y})}{||\vec{\ }||\,||\vec{y}||}. \tag{1.5}$$

Finalmente introducimos el concepto de *ortogonali a* entre dos vectores de un espacio euclídeo: dos vectores $\vec{\ }, \vec{y} \in$ se dicen *ortogonale* si

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = 0.$$

En el espacio vectorial de los vectores en el plano con el producto escalar usual esta definición coincide con la idea intuitiva de perpendicularidad: es decir, los vectores forman un ángulo de 90^{o}, ya que según (1.5) el coseno del ángulo que forman es nulo.

EJEMPLO E. Los vectores

$$\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ...,\ \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

son ortogonales dos a dos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

EJEMPLO F. En el espacio euclídeo $([-\pi, \pi])$ los vectores del sistema trigonométrico

$$1, \cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t, ..., \cos nt, \operatorname{sen} nt, ...$$

son ortogonales dos a dos; por ejemplo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nt \operatorname{sen} mt)\ \ t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)t\ \ t - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)t\ \ t = 0.$$

El resto se comprueba de manera similar.

Una proposición simple, asociada con el concepto de ortogonalidad, es la siguiente:

Lema 8.1.3

Si los vectores no nulos $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n$ son ortogonales entre sí en un espacio euclídeo, también son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos que $\alpha_1\vec{\ }_1 + \alpha_2\vec{\ }_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\ }_n = \vec{0}$; hallando el producto escalar con $\vec{\ }_1$ se tiene

$$\alpha_1(\vec{\ }_1, \vec{\ }_1) + \alpha_2(\vec{\ }_1, \vec{\ }_2) + \cdots + \alpha_n(\vec{\ }_1, \vec{\ }_n) = (\vec{\ }_1, \vec{0}) = \vec{0}$$

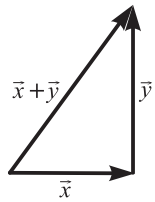
o equivalentemente $\alpha_1\|\vec{}_1\|^2 = \vec{0}$, ya que los vectores son ortogonales entre sí; como $\|\vec{}_1\| \neq 0$ se tiene $\alpha_1 = 0$. De forma similar se deduce $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. ■

* * *

Podemos ahora trasladar teoremas de la geometría elemental a este nuevo marco de la «geometría» en los espacios euclídeos. Comencemos con el *teorema e it gora* . Por analogía con los vectores en el plano podemos considerar $\vec{} + \vec{y}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo determinado por los vectores ortogonales $\vec{}$ e $\vec{y}$. Por la ortogonalidad de $\vec{}$ e $\vec{y}$ se tiene:

$$\|\vec{} + \vec{y}\|^2 = (\vec{} + \vec{y}, \vec{} + \vec{y}) = \|\vec{}\|^2 + 2(\vec{}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Esta igualdad representa el teorema de Pitágoras en los espacios euclídeos.



i ra 8.3

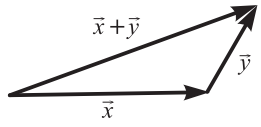
Otra propiedad geométrica que puede demostrarse en los espacios euclídeos es la *e ig al a triang lar*, es decir, en todo triángulo la longitud de uno de sus lados es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos. Para demostrar esto se utiliza la desigualdad de Schwarz (Proposición 8.1.2) para obtener

$$\begin{aligned}\|\vec{} + \vec{y}\|^2 = (\vec{} + \vec{y}, \vec{} + \vec{y}) = \| \ \|^2 + 2(\vec{}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|\vec{}\|^2 + 2\|\vec{}\|\,\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{}\| + \|\vec{y}\|)^2;\end{aligned}$$

por tanto:

$$\|\vec{} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{}\| + \|\vec{y}\|,$$

que es el resultado deseado.



i ra 8.4

EJERCICIOS 8.1

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones (,): $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definen un producto escalar?:
   - **a)** $(\vec{}, \vec{y}) = \ _1y_1 + 2\ _2y_2 + 2y_1\ _2 - 3\ _1y_2$.
   - **b)** $(\vec{}, \vec{y}) = \ _1y_1 - \ _2y_2$.
   - **c)** $(\vec{}, \vec{y}) = \ _1y_1 + 2\ _1y_2 + 3y_1\ _2 + 7\ _2y_2$.

d) $(\vec{\ }, \vec{y}) = \ {}_1y_1 + 2\ {}_2y_2 + 3\ {}_1y_2 + 3\ {}_2y_1$.

e) $(\vec{\ }, \vec{y}) = 2\ {}_1y_1 + 3\ {}_2y_2 + 2\ {}_1y_2 + 2\ {}_2y_1$.

Justificar la respuesta. Encontrar la matriz, en la base canónica, de aquellas funciones que sean producto escalar.

2. Encontrar la expresión analítica del módulo de un vector y del coseno del ángulo de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ para aquellas de las funciones en el ejercicio 1 que sean producto escalar.

3. Encontrar el ángulo entre las aristas opuestas de un tetraedro regular.

4. Encontrar los cosenos de los ángulos entre la recta $\ {}_1 = \ {}_2 = \cdots = \ {}_n$ y los ejes coordenados en $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar usual.

5. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de orden 3, demostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ = traza (^{t}) es un producto escalar.

6. Sea (, (,)) un espacio euclídeo. Demostrar:

a) $2(\|\vec{\ }\|^2 + \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{\ } + \vec{v}\|^2 + \|\vec{\ } - \vec{v}\|^2$, para todo $\vec{\ }, \vec{v} \in$ (ley del paralelogramo).

b) $4(\vec{\ }, \vec{v}) = \|\vec{\ } + \vec{v}\|^2 - \|\vec{\ } - \vec{v}\|^2$, para todo $\vec{\ }, \vec{v} \in$ (polarización).

c) $2(\vec{\ }, \vec{v}) = \|\vec{\ } + \vec{v}\|^2 - \|\vec{\ }\|^2 - \|\vec{v}\|^2$, para todo $\vec{\ }, \vec{v} \in$.

7. Sea un espacio vectorial. Una norma en es una función $\| \ \|$: $\to \mathbb{R}$ que satisface:

i) $\|\vec{\ }\| \geqslant 0, \forall\ \vec{\ } \in$ y $\|\vec{\ }\| = 0 \Leftrightarrow \vec{\ } = \vec{0}$.

ii) $\|\lambda\vec{\ }\| = |\lambda|\,\|\vec{\ }\|, \forall\ \vec{\ } \in\ , \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\|\vec{\ } + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{\ }\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdad triangular).

a) Si es un espacio vectorial euclídeo con producto escalar (,) el módulo de un vector es una norma que satisface la ley del paralelogramo. Probar que si es un espacio vectorial con norma $\| \ \|$ que satisface la ley del paralelogramo, entonces existe un producto escalar (,) en tal que $\|\vec{\ }\| = (\vec{\ }, \vec{\ })^{1/2}$. En consecuencia, la condición necesaria y suficiente para que una norma sea el módulo de un producto escalar es que satisfaga la ley del paralelogramo.
[*geren ia*: comenzar demostrando que $(\vec{\ }_1 + \vec{\ }_2, \vec{v}) = (\vec{\ }_1, \vec{v}) + (\vec{\ }_2, \vec{v})$.] (ver ejercicio 6).

b) Sea $\|\vec{\ }\| = |\ {}_1| + |\ {}_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que $\| \ \|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero no es el módulo de ningún producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

8. Sea (, (,)) un espacio euclídeo y $\{\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }_n\}$ un conjunto de vectores ortogonales de . Demostrar:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|(\vec{v}, \vec{\ }_i)|^2}{\|\vec{\ }_i\|^2} \leqslant \|\vec{v}\|^2$, para todo $\vec{v} \in$ (desigualdad de Bessel).

b) Si los $\{\vec{\ }_i\}$ son una base ortogonal de

$$(\vec{v}, \vec{\ }) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\vec{v}, \vec{\ }_i)(\vec{\ }_i, \vec{\ })}{\|\vec{\ }_i\|^2}, \text{ para todo } \vec{v}, \vec{\ } \in \quad \text{(identidad de Parseval).}$$

9. Demostrar que la desigualdad de Schwarz es una igualdad si y solo si los vectores son proporcionales.

10. Demostrar la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{}_1 + \vec{}_2 + \cdots + \vec{}_n\|^2 = \|\vec{}_1\|^2 + \|\vec{}_2\|^2 + \cdots + \|\vec{}_n\|^2$$

si los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n \in$ son ortogonales dos a dos.

11. Si $\vec{}$ e $\vec{y}$ son dos vectores cualesquiera en un espacio euclídeo , demostrar que $\|\vec{} - \vec{y}\| \geqslant |\|\vec{}\| - \|\vec{y}\||$.

8.2. BASES ORTONORMALES EN UN ESPACIO EUCLÍDEO

En un espacio euclídeo una base se dice *ortogonal* si sus elementos son ortogonales dos a dos; si, además, los elementos de una base ortogonal son de longitud 1, la base se llama *orto normal.*

Ya hemos demostrado en el lema 8.1.3, que todo conjunto de vectores en un espacio euclídeo, ortogonales dos a dos, son linealmente independientes. Demostraremos a continuación que en todo espacio euclídeo de dimensión numerable existen bases ortogonales; en el proceso de la demostración daremos un procedimiento, denominado *m to o e ortogonali a i n*, que permite obtener una base ortogonal a partir de cualquier base del espacio vectorial. En la literatura matemática también se le llama *m to o e Gram mi t.*

Teorema 8.2.1 (étodo de ortogonalizaci n)

Sea $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$, ... una sucesión finita o infinita numerable de vectores linealmente independientes en un espacio euclídeo y sea $L = L(\vec{}_1, ..., \vec{})$ el espacio vectorial generado por los primeros vectores. Entonces, existe un conjunto de vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}$ ... tal que:

a) El espacio vectorial $L' = L(\vec{y}_1, ..., \vec{y})$ coincide con L para todo entero positivo .

b) El vector $\vec{y}_{+1}$ es ortogonal a L para todo entero positivo .

Nota. Un vector $\vec{y}$ en un espacio euclídeo se dice *ortogonal a n be a io ve torial L* si es ortogonal a todos los vectores de L; si L está generado por los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$, basta probar que $\vec{y}$ es ortogonal a cada uno de los vectores $\vec{}$, = 1, 2, ..., ; en efecto, si $\vec{} = \sum_{=1} \alpha \vec{}$ se tiene que

$$(\vec{}, \vec{y}) = \left(\sum_{=1} \alpha \vec{}, \vec{y} \right) = \sum_{=1} \alpha (\vec{}, \vec{y}) = 0.$$

Demostración. Tomando $\vec{y}_1 = \vec{}_1$ e $\vec{y}_2 = \vec{}_2 + \alpha\vec{y}_1$, elegimos α de manera que $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ sean ortogonales:

$$0 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{y}_1, \vec{}_2 + \alpha\vec{y}_1) = (\vec{y}_1, \vec{}_2) + \alpha(\vec{y}_1, \vec{y}_1),$$

de donde se deduce que

$$\alpha = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{\ }_2)}{\|\vec{y}_1\|^2}.$$

El denominador de esta fracción es no nulo, puesto que $\vec{y}_1 \neq \vec{0}$; de la construcción realizada se deducen inmediatamente las propiedades a) y b) para $= 2$.

Procedemos ahora por inducción; supongamos que hemos elegido $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}$, de manera que $L = L'$ y son ortogonales dos a dos. Tomemos

$$\vec{y}_{+1} = \vec{\ }_{+1} + \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \cdots + \lambda\,\vec{y}$$

y escojamos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda$ de modo que $\vec{y}_{+1}$ sea ortogonal a $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}$. Para ello tenemos

$$0 = (\vec{y}_{+1}, \vec{y}) = (\vec{\ }_{+1}, \vec{y}) + \lambda(\vec{y}, \vec{y}), \qquad = 1, 2, ..., \ ,$$

de donde deducimos que

$$\lambda = -\frac{(\vec{\ }_{+1}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2}.$$

Como antes, el denominador de esta fracción es no nulo y $L'_{+1} = L_{+1}$. ■

Observación. Observa que la matriz del cambio de base en la demostración anterior es triangular superior con unos en la diagonal.

Teorema 8.2.2

En todo espacio euclídeo de dimensión finita existen bases ortonormales.

Demostración. Sea $\{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n\}$ una base cualquiera de ; tomamos $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_n\}$ como en el método de ortogonalización del Teorema 8.2.1; esta nueva colección genera todo el espacio vectorial debido a a) y son ortogonales dos a dos debido a b). Para encontrar una base ortonormal tomar $\vec{e} = \vec{y}/\|\vec{y}\|$, $= 1, ..., n$. ■

EJEMPLO A. Los vectores $\vec{\ }_1 = (0, 1, -1)$, $\vec{\ }_2 = (1, -2, 0)$ y $\vec{\ }_3 = (2, 1, 1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Queremos hallar una base ortonormal siguiendo el procedimiento de Gram-Schmidt, considerando en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual. Tomamos

$$\vec{y}_1 = \vec{\ }_1 = (0, 1, -1).$$

Elegimos $\vec{y}_2 = \vec{\ }_2 + \alpha\vec{y}_1$ y calculamos α para que $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ sean ortogonales. Como en la demostración del Teorema 8.2.1 esto requiere tomar

$$\alpha = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{\ }_2)}{\|\vec{y}_1\|^2} = -\frac{-2}{2} = 1.$$

Tenemos

$$\vec{y}_2 = (1, -2, 0) + (0, 1, -1) = (1, -1, -1).$$

Para hallar el tercer vector $\vec{y}_3$ elegimos $\vec{y}_3 = \vec{\ }_3 + \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2$ de manera que $\vec{y}_3$ sea ortogonal a $\vec{y}_1$ y a $\vec{y}_2$. Esto requiere tomar

$$\lambda_1 = -\frac{(\vec{\ }_3, \vec{y}_1)}{\|\vec{y}_1\|^2} = 0, \qquad \lambda_3 = -\frac{(\vec{\ }_3, \vec{y}_2)}{\|\vec{y}_2\|^2} = 0.$$

Por tanto,

$$\vec{y}_3 = \vec{\ }_3 = (2, 1, 1).$$

La base ortonormal es

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) \quad , \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \quad , \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1).$$

EJEMPLO B. Encontremos una base ortogonal en el espacio $\mathbb{R}^{(3)}([-1, 1])$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 en el intervalo $[-1, 1]$ con el producto escalar del ejemplo D de la sección 8.1.

Tomemos como base inicial $_1 = 1$, $_2 = t$, $_3 = t^2$, $_4 = t^3$. Elegimos $y_1 = _1 = 1$, $y_2 = t + \alpha \cdot 1$ y calculamos α para que $(y_1, y_2) = 0$:

$$0 = (y_1, y_2) = (1, t + \alpha) = (1, t) + (1, \alpha) = \int_{-1}^{1} t \ \ t + \alpha \int_{-1}^{1} \ \ t = 0 + 2\alpha;$$

por tanto, $y_2 = t$. Tomamos $y_3 = t^2 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 t$:

$$0 = (y_1, y_3) = \int_{-1}^{1} t^2 \ \ t + \lambda_1 \int_{-1}^{1} \ \ t + \lambda_2 \int_{-1}^{1} t \ \ t = \frac{2}{3} + 2\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{3};$$

$$0 = (y_2, y_3) = \int_{-1}^{1} t^3 \ \ t + \lambda_1 \int_{-1}^{1} t \ \ t + \lambda_2 \int_{-1}^{1} t^2 \ \ t = \lambda_2 \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0;$$

por tanto:

$$y_3 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Tomamos $y_4 = t^3 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 t + \lambda_3\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$:

$$0 = (y_1, y_4) = \int_{-1}^{1} t^3 \ \ t + \lambda_1 \int_{-1}^{1} \ \ t + \lambda_2 \int_{-1}^{1} t \ \ t + \lambda_3 \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \ \ t = 2\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0;$$

$$0 = (y_2, y_4) = \int_{-1}^{1} t^4 \ \ t + \lambda_1 \int_{-1}^{1} t \ \ t + \lambda_2 \int_{-1}^{1} t^2 \ \ t + \lambda_3 \int_{-1}^{1} t\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \ \ t = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -\frac{3}{5};$$

finalmente,

$$0 = (y_3, y_4) = (y_3, t^3) + \lambda_1(y_3, 1) + \lambda_2(y_3, t) + \lambda_3(y_3, y_3) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) t^3 \ \ t + 0 + 0 + \lambda_3 \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \ \ t = 0 + \lambda_3 \|y_3\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0;$$

por tanto,

$$y_4 = t^3 - \frac{3}{5}\, t;$$

Resumiendo,

$$\left\{ y_1 = 1, y_2 = t, y_3 = t^2 - \frac{1}{3}, y_4 = t^3 - \frac{3}{5}\, t \right\}$$

es una base ortogonal de este espacio con el producto escalar considerado.

Observar que la matriz del cambio de base de $\{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3, \vec{\ }_4\}$ a $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es triangular superior con unos en la diagonal.

* * *

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base ortonormal en un espacio euclídeo . Puesto que $(\vec{e}_i, \vec{e}\,) = \delta_i$, con i, $= 1, 2, ..., n$, donde hemos usado la notación de Krönecker introducida en el Capítulo 5, la matriz del producto escalar en esta base es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \ .$$

Por tanto, si $\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{e}_i \in$ e $\vec{y} = \sum_{=1}^{n} \vec{y}\,\vec{e} \ \in$ se tiene que

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \ _1y_1 + \ _2y_2 + \cdots + \ _ny_n, \tag{2.1}$$

que nos da una forma sencilla de expresar en coordenadas el producto escalar de un espacio euclídeo, cuando en él se ha elegido una base ortonormal.

Recíprocamente, si un producto escalar tiene una expresión como en (2.1) en una cierta base, esta base es ortonormal; basta observar que de (2.1) se deduce que $(\vec{e}_i, \vec{e}\,) = 0$ si $i \neq$ y $(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1 \cdot 1 = 1$, i, $= 1, 2, ..., n$.

EJERCICIOS 8.2

1. Sean $\vec{\ }_1 = (-2, -1, 1)$, $\vec{\ }_2 = (0, -1, 0)$ y $\vec{\ }_3 = (1, -1, 0)$ tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Definimos un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ afirmando que $\{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3\}$ es una base ortonormal. Encontrar la expresión analítica de este producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. Dados $\vec{\ }_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\ }_2 = (4, -2, 0)$ y $\vec{\ }_3 = (1, 1, 5)$ en $\mathbb{R}^3$, construir los vectores $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ e $\vec{y}_3$ del teorema de ortogonalización. ($\mathbb{R}^3$ tiene el producto escalar usual.)

3. Sean $\vec{\ }_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{\ }_2 = (1, 0, 0, 2)$ y $\vec{\ }_3 = (1, -1, -1, 2)$ tres vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $= L(\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3)$ el subespacio engendrado por $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3$.
   a) Encontrar una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de usando el método de ortonormalización ($\mathbb{R}^4$ tiene el producto escalar usual).
   b) Extender la base encontrada en a) a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

4. Utilizar el método del teorema de ortogonalización para construir una base ortogonal en el subespacio tridimensional de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\vec{\ }_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{\ }_2 = (4, 1, 1, 1)$ y $\vec{\ }_3 = (3, 1, 1, 0)$, considerando en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar usual.

5. Sea $(\vec{\ }, \vec{y}) = \ _1y_1 + (\ _1 + \ _2)(y_1 + y_2) + (\ _1 + \ _2 + \ _3)(y_1 + y_2 + y_3)$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base ortogonal de $\subset \mathbb{R}$ para:
   a) $= \{\ \in \mathbb{R}^3 : \ _1 = \ _2 = \ _3\}$
   b) $= \{\ \in \mathbb{R}^3 : \ _1 + 2\ _2 + 3\ _3 = 0\}$.

6. En $\mathbb{R}^5$ con el producto escalar usual, ortonormalizar los vectores $\vec{\ }_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $\vec{\ }_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$ y $\vec{\ }_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$.

7. Sean $\vec{\ } = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v} = (0, 3, -2, 1)$ y $\vec{\ } = (1, 1, 0, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Encontrar todos los vectores de la forma $\vec{\ } + \alpha\vec{\ } + \beta\vec{v}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que son ortogonales a $\vec{\ }$ y $\vec{v}$ simultáneamente. (En $\mathbb{R}^4$ se considera el producto escalar usual).

8. Sean $\vec{a} = (1, 2, 0, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1, 1, 0)$ y $\vec{\ } = (0, 0, 1, 2, -1) \in \mathbb{R}^5$. Descomponer $\vec{\ }$ en dos vectores, uno de ellos combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el otro ortogonal al anterior. (En $\mathbb{R}^5$ se considera el producto escalar usual).

9. Sea un espacio euclídeo. Demostrar que $\vec{\ } + \vec{v}$ y $\vec{\ } - \vec{v}$ son ortogonales si y solo si $\|\vec{\ }\| = \|\vec{v}\|$.

10. Encontrar una base ortonormal para cada uno de los subespacios siguientes:
    a) $\{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^3 : \ + y - \ = 0\}$ ($\mathbb{R}^3$ tiene el producto escalar usual).
    b) $\left\{ (\ ) \in \ ^{(3)}_{\mathbb{R}}[-1, 1] : \ \frac{(\ )}{\ } = \ (\ ) \right\}$ (en $^{(3)}_{\mathbb{R}}[-1, 1]$ se considera el producto escalar dado por $\int_{-1}^{1} (\ )\ (\ )\ \ $).
    c) $\{\ \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \text{traza}(\ ) = 0\}$ (en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ se considera el producto escalar dado en el problema 5 de la sección 8.1).

11. Demostrar que si $(\vec{\ }, \vec{\ }) = {}^{2}_{1} + {}^{2}_{2} + \cdots + {}^{2}_{n}$ en una base de un espacio euclídeo, esta base es ortonormal.

12. Los polinomios $y_1 = 1, y_2 = t, y_3 = t^2 - \frac{1}{3}, y_4 = t^3 - \frac{3}{5}t$ encontrados en el ejemplo A de la sección 8.3, reciben el nombre de polinomios de Legendre, porque fue este matemático francés quien los introdujo en 1785. Demostrar que los polinomios $y_n(t)$ coinciden, salvo constantes, con los polinomios dados por la fórmula

$$ {}_{n}(t) = \frac{{}^{n}}{t^n}[(t^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, 3. $$

Esta fórmula fue encontrada en 1814 por el matemático francés Olinde Rodrigues.

13. En el espacio vectorial $((-\infty, \infty))$ de las funciones continuas en la recta real, demostrar que $(\ , g) = \int_{-\infty}^{\infty} ( )g( )e^{-\ ^2}$ es un producto escalar y aplicar el método de ortogonalización a las funciones 1, , ^{2}.

ota. Es necesario saber que

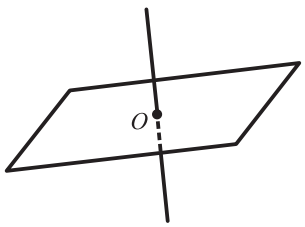
$$ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ ^2} = \sqrt{\pi}. $$

8.3. COMPLEMENTO ORTOGONAL. PROYECCIONES

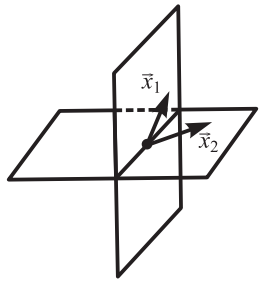
Definición 8.3.1

Dos subespacios ${}_1$ y ${}_2$ de un espacio euclídeo se dicen ortogonales, y se escribe ${}_1 \perp {}_2$, si todos los vectores de ${}_1$ son ortogonales a todos los vectores de ${}_2$.

En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, un plano y una recta perpendicular a él, que pasen por el origen, son subespacios ortogonales (figura 8.5); sin embargo, dos planos que son perpendiculares en el sentido de la geometría de $\mathbb{R}^3$ no son ortogonales, ya que los vectores $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2$ de la figura 8.6 no son ortogonales.



i ra 8.5



i ra 8.6

Se tienen las siguientes *ro ie a e* de los subespacios ortogonales.

1) $_1$ *y* $_2$ *on ortogonale i y olo i to o lo ve tore e na ba e e* $_1$ *on ortogonale a a a no e lo ve tore e na ba e e* $_2$.

En efecto, si $\{\vec{}_1, ..., \vec{}\}$ es una base de $_1$ y $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}\}$ es una base de $_2$ y si $\vec{} \in$ $_1$, $\vec{y} \in$ $_2$ podemos escribir $\vec{} =$ $_1\vec{}_1 + \cdots +$ $\vec{}$, $\vec{y} = y_1\vec{v}_1 + \cdots + y\,\vec{v}$; por tanto,

$$(\vec{}, \vec{y}) = \sum_{i=1} \sum_{l=1} {}_i y_l(\vec{}_i, \vec{v}_l) = 0$$

ya que $(\vec{}_i, \vec{v}_l) = 0$ para todo $i = 1, ...,$, $l = 1, ...,$.

El recíproco es obvio.

2) *i* $_1 \perp$ $_2$ *e tiene e* $_1 \cap$ $_2 = \{\vec{0}\}$.

Para demostrar esta afirmación suponer que $\vec{} \in$ $_1 \cap$ $_2$; entonces $\vec{} \in$ $_1$ y $\vec{} \in$ $_2$; como $_1 \perp$ $_2$ se tiene que $(\vec{}, \vec{}) = 0$, y por tanto $\vec{} = \vec{0}$.

Dado un subespacio vectorial de un espacio euclídeo el conjunto

$$^{\perp} = \{\vec{y} \in \; : \vec{y} \perp \vec{} \text{ para todo } \vec{} \in \}$$

es un subespacio vectorial de , que recibe el nombre de *om lemento ortogonal e* . Para demostrar que $^{\perp}$ es un subespacio vectorial de basta observar que si $\in$, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in$ $^{\perp}$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2, \vec{}) = a(\vec{y}_1, \vec{}) + b(\vec{y}_2, \vec{}) = 0$$

y, por tanto, $a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2 \in$ $^{\perp}$.

EJEMPLO A. En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, queremos encontrar el complemento ortogonal de $= \{(_1, _2, _3) \in \mathbb{R}^3 : _1 = _2\}$.

Una base de es $\vec{}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{}_2 = (0, 0, 1)$; un elemento $\vec{y}$ pertenece a $^{\perp}$ si y solo si $\vec{y}$ es perpendicular a $\vec{}_1$ y a $\vec{}_2$. Si tomamos $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ se tiene que

$$0 = (\vec{y}, \vec{}_1) = (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = y_1 + y_2$$
$$0 = (\vec{y}, \vec{}_2) = (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3, \vec{e}_3) = y_3.$$

Este sistema es un sistema homogéneo con tres incógnitas, cuya matriz de los coeficientes tiene rango 2; por tanto, determina un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1; este subespacio tiene por ecuaciones $y_3 = 0$, $y_1 = -y_2$ y, por tanto, está generado por el vector $\vec{v} = (-1, 1, 0)$. Así pues,

$$^{\perp} = L\{(-1, 1, 0)\}.$$

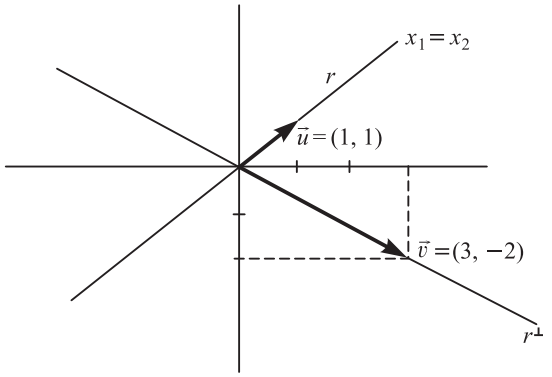
EJEMPLO B. En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar dado en el ejemplo B de la sección 8.1 queremos hallar el complemento ortogonal de la recta r: $_1 = _2$.

Puesto que r está generada por $\vec{} = (1, 1)$, tenemos que $\vec{y} = (y_1, y_2) \in r^{\perp}$ si y solo si

$$0 = (\vec{y}, \vec{}) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (y_1 + y_2, y_1 + 2y_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + 3y_2.$$

Por tanto, $r^{\perp}$ es una recta de ecuación $2y_1 = -3y_2$, es decir, generada por

$$\vec{v} = (3, -2).$$



i ra 8.7

En este ejemplo se observa que el complemento ortogonal de un subespacio vectorial depende en gran medida del producto escalar utilizado. Observar que en este ejemplo los subespacios r y $r^{\perp}$ no son perpendiculares en el sentido de la geometría clásica estudiada en el Capítulo 7.

* * *

El procedimiento seguido en los dos ejemplos anteriores para encontrar el complemento ortogonal de un subespacio vectorial se generaliza a continuación. Sea un espacio euclídeo con base $= \{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n\}$ y sea un subespacio vectorial de generado por los r vectores linealmente independientes

$$\vec{v}_1 = \sum_{=1}^{n} a_1 \vec{}, \quad \vec{v}_2 = \sum_{=1}^{n} a_2 \vec{}, \quad ..., \quad \vec{v}_r = \sum_{=1}^{n} a_r \vec{}.$$

Los elementos $\vec{} \in {}^{\perp}$ quedan caracterizados por las relaciones:

$$(\vec{v}_1, \vec{}) = 0, \quad (\vec{v}_2, \vec{}) = 0, \quad ..., \quad (\vec{v}_r, \vec{}) = 0,$$

ya que esto es suficiente para demostrar que $\vec{}$ es perpendicular a todos los elementos de .

Si $\vec{} = \sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{}_i$, las igualdades anteriores se transforman en

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \left(\sum_{=1}^{n} a_1 \vec{}, \sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{=1}^{n} a_1 (\vec{}, \vec{}_i) \right] {}_i \\
0 &= \left(\sum_{=1}^{n} a_2 \vec{}, \sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{=1}^{n} a_2 (\vec{}, \vec{}_i) \right] {}_i \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
0 &= \left(\sum_{=1}^{n} a_r \vec{}, \sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{=1}^{n} a_r (\vec{}, \vec{}_i) \right] {}_i
\end{aligned}\right\}$$

que es un sistema homogéneo de r ecuaciones con n incógnitas ${}_1, {}_2, ..., {}_n$. Las soluciones de este sistema forman el subespacio ortogonal a .

Si la base es ortonormal el sistema anterior se transforma en

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ {}_1 + a_{12}\ {}_2 + \cdots + a_{1n}\ {}_n = 0 \\ a_{21}\ {}_1 + a_{22}\ {}_2 + \cdots + a_{2n}\ {}_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}\ {}_1 + a_{r2}\ {}_2 + \cdots + a_{rn}\ {}_n = 0 \end{array}\right\}. \tag{3.1}$$

Proposición 8.3.2

Sea un subespacio vectorial de un espacio euclídeo de dimensión finita. Entonces es suma directa de y su complemento ortogonal $^{\perp}$.

Demostración. Si $\vec{} \in \ \cap\ ^{\perp}$ se tiene que $\vec{} \in$ y $\vec{} \in\ ^{\perp}$; por tanto, $(\vec{}, \vec{}) = 0$, de donde deducimos que $\vec{} = 0$. Así se comprueba que $\cap\ ^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

Falta probar que $+\ ^{\perp} =$. Para ello sea $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_r\}$ una base ortogonal de y completémosla hasta obtener una base ortogonal $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, ..., \vec{e}_n\}$ de ; si $\vec{} \in$ podemos escribir

$$\vec{} = \sum_{i=1}^{n}\ {}_i\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{r}\ {}_i\vec{e}_i + \sum_{i=r+1}^{n}\ {}_i\vec{e}_i = \vec{} + \vec{y}.$$

Claramente $\vec{} \in$. Además, $\vec{y} \in\ ^{\perp}$ ya que para todo $= 1, ..., r$

$$(\vec{e}\ , \vec{y}) = \left(\vec{e}\ , \sum_{i=r+1}^{n}\ {}_i\vec{e}_i\right) = 0,$$

con lo cual se tiene el resultado deseado. ■

Observación. De esta proposición y de la Proposición 4.4.2 se deduce que $\dim(\ ) + \dim(\ ^{\perp}) = \dim(\ )$, siempre que tenga dimensión finita. En consecuencia

$$\dim(\ ^{\perp}) = \dim(\ ) - \dim(\ ).$$

* * *

Sea un subespacio vectorial de un espacio euclídeo . Puesto que $= \oplus\ ^{\perp}$, de la caracterización de suma directa (ver Proposición 4.4.4) se deduce que todo $\vec{} \in$ posee una descomposición *única* de la forma $\vec{} = \vec{y} + \vec{}$ con $\vec{y} \in\ , \vec{} \in\ ^{\perp}$. El vector $\vec{y}$ recibe el nombre de *proyección ortogonal* de $\vec{}$ sobre y se escribe $\vec{y} = (\vec{}) \equiv (\vec{})$, mientras que $\vec{}$ es la proyección ortogonal de $\vec{}$ sobre $^{\perp}$ y se escribe $\vec{} = (\vec{}) \equiv (\vec{})$.

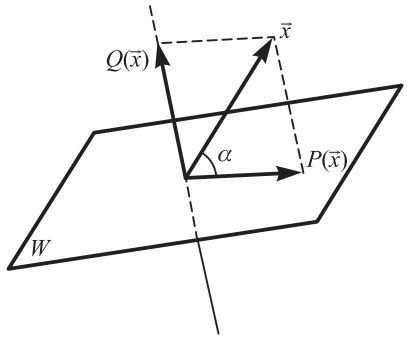


Figura 8.8

El *ng lo e orma n ve tor ⃗ ∈ on n be a io ve torial* se define como el ángulo que forma ⃗ con su proyección ortogonal sobre , (⃗); por tanto,

$$\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \ ) = \cos \sphericalangle(\vec{\ }, \ (\vec{\ })) = \frac{(\vec{\ }, \ (\vec{\ }))}{\|\vec{\ }\| \ \|(\vec{\ })\|} = \frac{(\vec{y} + \vec{\ }, \vec{y})}{\|\vec{\ }\| \ \|\vec{y}\|} = \frac{\|\vec{y}\|^2}{\|\vec{\ }\| \ \|\vec{y}\|} = \frac{\| \ (\vec{\ })\|}{\|\vec{\ }\|}.$$

En las aplicaciones es conveniente conocer cómo se resuelve el problema de encontrar la proyección (⃗) de un vector ⃗ sobre un subespacio que tiene $\{\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }_r\}$ como base (no necesariamente ortogonal). La solución de este problema se encuentra de la siguiente manera: como (⃗) ∈ hemos de tener

$$(\vec{\ }) = \lambda_1 \vec{\ }_1 + \cdots + \lambda_r \vec{\ }_r;$$

además, (⃗) ∈ ⊥ y, por tanto, ((⃗), ⃗) = 0 para todo = 1, 2, ..., *r*. Como ⃗ = (⃗) + (⃗) se tiene que (⃗) = ⃗ − (⃗) y, por tanto, (⃗ − (⃗), ⃗) = 0 para todo = 1, ..., *r*, es decir,

$$\left.\begin{array}{c} (\vec{\ }, \vec{\ }_1) - \lambda_1(\vec{\ }_1, \vec{\ }_1) - \cdots - \lambda_r(\vec{\ }_r, \vec{\ }_1) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ (\vec{\ }, \vec{\ }_r) - \lambda_1(\vec{\ }_1, \vec{\ }_r) - \cdots - \lambda_r(\vec{\ }_r, \vec{\ }_r) = 0 \end{array}\right\}, \tag{3.2}$$

que es un sistema de *r* ecuaciones con *r* incógnitas $\lambda_1, ..., \lambda_r$; puesto que la proyección (⃗) de un vector ⃗ ∈ es única, este sistema debe tener una única solución; por tanto, su determinante

$$_r = \begin{vmatrix} (\vec{\ }_1, \vec{\ }_1) & \cdots & (\vec{\ }_r, \vec{\ }_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{\ }_1, \vec{\ }_r) & \cdots & (\vec{\ }_r, \vec{\ }_r) \end{vmatrix}$$

debe de ser no nulo y las soluciones vienen dadas por

$$\lambda_j = \frac{1}{D_r} \begin{vmatrix} (\vec{u}_1, \vec{u}_1) & \cdots & \overbrace{(\vec{x}, \vec{u}_1)}^{\text{columna } j} & \cdots & (\vec{u}_r, \vec{u}_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\vec{u}_1, \vec{u}_r) & \cdots & (\vec{x}, \vec{u}_r) & \cdots & (\vec{u}_r, \vec{u}_r) \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, ..., r,$$

de acuerdo con la regla de Cramer (Teorema 2.4.3).

EJEMPLO C. Tratemos de encontrar el ángulo que forma el vector (*t*) = t^2 con el plano generado por los vectores $_0(t) = 1$, $_1(t) = t$ en el espacio $^{(3)}_{\mathbb{R}}([-1, 1])$ de los polinomios de grado menor o igual que tres con el producto escalar dado en el ejemplo D de la sección 8.1.

Sea = *L*(1, *t*); como $\cos \sphericalangle(t^2, \ ) = \cos \sphericalangle(t^2, \ (t^2))$ comenzamos calculando (t^2); tenemos que

$$(t^2) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 t,$$

de manera que $t^2 - \quad (t^2)$ es perpendicular a $\quad$; por tanto,

$$0 = (1,\ t^2 - \quad (t^2)) = \int_{-1}^{1} t^2 \ \ t - \int_{-1}^{1} \lambda_1 \ \ t - \int_{-1}^{1} \lambda_2 t \ \ t = \frac{2}{3} - 2\lambda_1$$

$$0 = (t,\ t^2 - \quad (t^2)) = \int_{-1}^{1} t^3 \ \ t - \int_{-1}^{1} \lambda_1 t \ \ t - \int_{-1}^{1} \lambda_2 t^2 \ \ t = -\frac{2}{3}\lambda_2$$

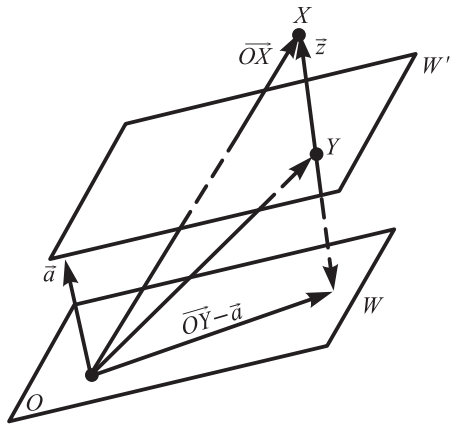
de donde se deduce que $\quad (t^2) = 1/3$.

Una vez calculada la proyección se tiene que

$$\cos \sphericalangle (t^2, \quad) = \cos \sphericalangle (t^2,\ 1/3) = \frac{\|1/3\|}{\|t^2\|} = \frac{\sqrt{2}/3}{\sqrt{2}/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

* * *

EJEMPLO D. Consideremos el plano $\quad'$ de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $\quad_1 - \quad_3 + 1 = 0$. Observa que $\quad'$ es paralelo al plano $\quad$ de ecuación $\quad_1 - \quad_3 = 0$ y pasa por el punto (0, 1, 1). Sea $\vec{a} = (0, 1, 1)$. Dado $\quad = (2, 1, 2)$ queremos hallar $\quad, \vec{\ }$ de manera que $\vec{\ } = \vec{\ } + \vec{\ }$, y tal que $\vec{\ }$ sea perpendicular a $\quad$ (ver figura 8.9) e $\quad \in \quad'$.



i ra 8.9

Pongamos $\vec{\ } = \vec{\ }$ e $\vec{y} = \vec{\ }$. Si restamos $\vec{a}$ de la igualdad $\vec{\ } = \vec{y} + \vec{\ }$ se tiene

$$\vec{\ } - \vec{a} = (\vec{y} - \vec{a}) + \vec{\ }$$

donde $\vec{y} - \vec{a} \in \quad$ y $\vec{\ } \in \quad^{\perp}$. Por tanto, $\vec{\ }$ coincide con la proyección $\quad(\vec{\ } - \vec{a})$ de $\vec{\ } - \vec{a}$ sobre $\quad^{\perp}$. Hallamos primero $\quad(\vec{\ } - \vec{a})$; como $\quad$ está generado por $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ se tiene que

$$(\vec{\ } - \vec{a}) = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2;$$

además:

$$0 = (\vec{e}_1, (\vec{\ } - \vec{a}) - \quad (\vec{\ } - \vec{a})) = (2 + 0 + 1) - \lambda_1 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3/2$$

$$0 = (\vec{e}_2, (\vec{\ } - \vec{a}) - \quad (\vec{\ } - \vec{a})) = 0 - \lambda_2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0.$$

Por tanto, $(\vec{\ } - \vec{a}) = \frac{3}{2}\vec{e}_1$, con lo cual

$$\vec{\ } = \ (\vec{\ } - \vec{a}) = \vec{\ } - \vec{a} - \ (\vec{\ } - \vec{a}) = (2, 0, 1) - \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Ahora es sencillo calcular $\vec{y}$ puesto que

$$\vec{y} = \vec{\ } - \vec{\ } = (2, 1, 2) - \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right).$$

* * *

Observar que el ejemplo D podía haberse realizado siguiendo los procedimientos de geometría clásica en el espacio estudiados en el Capítulo 7. La definición axiomática de espacio euclídeo nos da entonces otro procedimiento para resolver el problema de las proyecciones.

Lema 8.3.3

Sea un subespacio vectorial de un espacio euclídeo y sea $\vec{\ } \in$. Si $\vec{\ } = \vec{y} + \vec{\ }$ con $\vec{y} \in$, se tiene que

$$\|\vec{\ }\| \geqslant \| \ (\vec{\ })\|$$

Demostración. Basta aplicar el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$\|\vec{\ }\|^2 = \|\vec{\ } - \vec{y}\|^2 = \| \ (\vec{\ }) + \ (\vec{\ }) - \vec{y}\|^2 = \| \ (\vec{\ }) - \vec{y} + \ (\vec{\ })\|^2 =$$
$$= \| \ (\vec{\ }) - \vec{y}\|^2 + \| \ (\vec{\ })\|^2 \geqslant \| \ (\vec{\ })\|^2$$

donde la última igualdad se debe a que $(\vec{\ }) - \vec{y} \in$ y $(\vec{\ }) \in {}^{\perp}$. ■

El Lema 8.3.3 demuestra que si $\vec{\ } = \ (\vec{\ }) + \ (\vec{\ })$ con $(\vec{\ }) \in$, y $(\vec{\ }) \in {}^{\perp}$, $(\vec{\ })$ es la mejor aproximación a $\vec{\ }$ de . Para calcular $(\vec{\ })$ puede procederse de la manera que se explica a continuación. Tomando una base ortogonal $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r\}$ de podemos escribir $(\vec{\ }) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v}_i$. Como $(\vec{\ })$ es perpendicular a $\vec{v}$,

$$(\vec{\ }, \vec{v}\,) = (\ (\vec{\ }) + \ (\vec{\ }), \vec{v}\,) = (\ (\vec{\ }), \vec{v}\,) = \lambda \, \|\vec{v}\,\|^2$$

y, por tanto, los coeficientes de $(\vec{\ })$ se calculan con la fórmula

$$\lambda \ = \frac{(\vec{\ }, \ \vec{v}\,)}{\|\vec{v}\,\|^2} \quad , \qquad = 1, 2, ..., r,$$

que se llaman *om onente e en la ire i n* de $\vec{v}$, $= 1, ..., r$.

Observación. Observar que en el método de ortogonalización de Gram-Schmidt dado en el Teorema 8.2.1 el vector $\vec{y}_{\ +1}$ se construye restando a $\vec{\ }_{\ +1}$ su proyección ortogonal sobre el subespacio $L \ = L(\vec{y}_1, ..., \vec{y}\,) = L(\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }\,)$.

EJEMPLO E. Tratemos de encontrar la función de la forma $a_1 + a_2 \operatorname{sen} \ + a_3 \cos \ + \ + a_4 \operatorname{sen} 2 \ + a_5 \cos 2$ que mejor aproxime a la función

$$(\ ) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \leqslant \ < 0 \\ \ 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant \ \leqslant \pi \end{cases} \qquad \in [-\pi, \pi]$$

según el producto escalar dado en el ejemplo D de la sección 8.1. La mejor aproximación es aquella en que los a son las componentes de en la dirección de 1, sen , cos , sen 2 y cos 2 . En este caso las componentes a reciben el nombre de *oe i iente e o rier* de .

Como

$$(, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} ( ) \quad = \int_{-\pi}^{0} -1 \quad + \int_{0}^{\pi} 1 \quad = -\pi + \pi = 0$$

el primer coeficiente a_1 es nulo.

Como

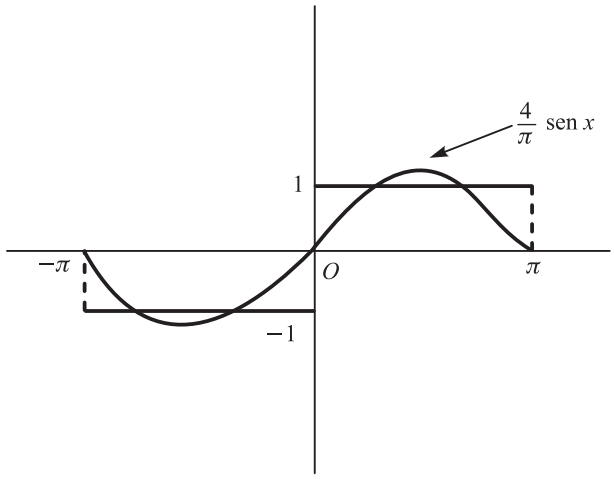
$$\|\text{sen} \ \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 \quad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2}{2} \quad = \pi$$

el segundo coeficiente es:

$$a_2 = \frac{1}{\pi}(, \text{sen}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ( ) \text{sen} \quad = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\text{sen} \quad + \int_{0}^{\pi} \text{sen} \quad \right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}[2 + 2] = \frac{4}{\pi}.$$

De manera similar el lector puede calcular el resto de los coeficientes, que serán todos nulos. Por tanto, la mejor aproximación a en el espacio generado por {1, sen , cos , sen 2 , cos 2 } es $\frac{4}{\pi}$ sen .

En la figura 8.10 se dibujan la función y su aproximación $\frac{4}{\pi}$ sen .



i ra 8.10

Añadiendo funciones trigonométricas pueden lograrse mejores «aproximaciones» de esta función.

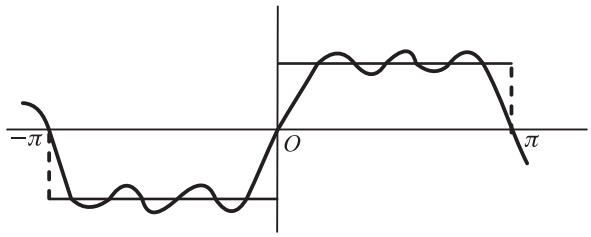
Con una cantidad infinita de funciones trigonométricas se consigue la aproximación

$$( ) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \text{sen}((2n+1)).$$

Pueden dibujarse algunas de las primeras sumas parciales de esta serie para comprobar que cada vez se aproximan más a la función . En la figura siguiente se dibuja

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{sen} \quad + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3 \quad + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen} 5$$

que consta de los tres primeros sumandos de la serie anterior.



i ra 8.11

Poniendo $= \frac{\pi}{2}$ se obtiene la aproximación

$$\frac{\pi}{4} \sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

en la que los denominadores son todos los números impares.

EJEMPLO F. El Lema 8.3.3 se utilizará en este ejemplo. Dada una función (*t*) definida en el intervalo [*a*, *b*], y $t_1, t_2, ..., t_n \in [a, b]$, se trata de encontrar un polinomio (*t*) de grado $< n$ y tal que la *e via i n a r ti a me ia* de la función , definida por

$$\sigma(\ ;\ )^2 = \sum_{=1}^{n} [\ (t) - \ (t)]^2,$$

sea mínima.

Si en el espacio vectorial de todas las funciones definidas en [*a*, *b*] consideramos

$$(\ , g) = \sum_{=1}^{n} \ (t)g(t),$$

e tiene n e a io e lí eo e imen i n n. En este espacio euclídeo el problema planteado se reduce a encontrar la proyección ( ) de sobre el subespacio de todos los polinomios de grado no superior a , ya que entonces $\| \ (\ )\|^2 = \sigma(\ ,\ (\ ))^2$ es mínimo, de acuerdo con el Lema 8.3.3.

Este problema ya sabemos resolverlo: se tendría

$$(\ ) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda\ t$$

donde los λ son soluciones de un sistema semejante a (3.2).

Realizamos un ejemplo sencillo para ilustrar las afirmaciones anteriores. Supongamos que queremos encontrar un polinomio de grado 2 de manera que la desviación cuadrática media de la función $(t) = \cos \pi t$ en los puntos $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$ sea mínima para este polinomio en el intervalo [0, 2].

El polinomio que da el mínimo, $(\ )$, será de la forma

$$(\ ) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$$

de manera que

$$\left.\begin{aligned}(\ ,1) - \lambda_0(1,1) - \lambda_1(t,1) - \lambda_2(t^2,1) &= 0\\ (\ ,t) - \lambda_0(1,t) - \lambda_1(t,t) - \lambda_2(t^2,t) &= 0\\ (\ ,t^2) - \lambda_0(1,t^2) - \lambda_1(t,t^2) - \lambda_2(t^2,t^2) &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Utilizando el producto escalar anteriormente definido obtenemos

$$\left.\begin{aligned}1 - \lambda_0 3 - \lambda_1 3 - \lambda_2 5 &= 0\\ 1 - \lambda_0 3 - \lambda_1 5 - \lambda_2 9 &= 0\\ 3 - \lambda_0 5 - \lambda_1 9 - \lambda_2 17 &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Puesto que

$$\begin{vmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&3&5\\0&2&4\\2&6&12\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}2&4\\6&12\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}3&5\\2&4\end{vmatrix} = 4,$$

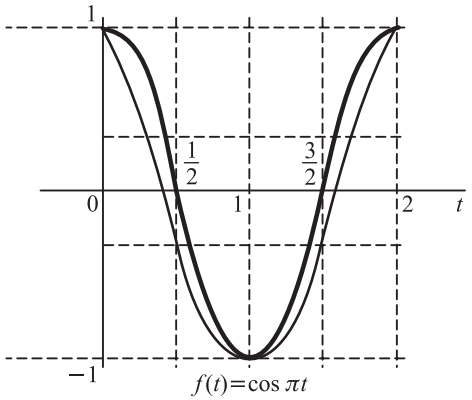
tenemos:

$$\lambda_0 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&3&5\\1&5&9\\3&9&17\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&3&5\\0&2&4\\2&6&12\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot 2[12-10] = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}3&1&5\\3&1&9\\5&3&17\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}3&1&5\\0&0&4\\5&3&17\end{vmatrix} = \frac{-1}{4}\cdot 4\cdot 4 = -4$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}3&3&1\\3&5&1\\5&9&3\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}3&3&1\\0&2&0\\5&9&3\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4 = 2.$$

Por tanto, $(\ ) = 1 - 4t + 2t^2$, que ha sido dibujado con trazo fino en la figura 8.12.



i ra 8.12

EJERCICIOS 8.3

1. Encontrar el complemento ortogonal del subespacio de cuando:

   a) $= \mathbb{R}^3$, $= L(\vec{}, \vec{v})$ con $\vec{} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

   b) $= \mathbb{R}^4$, $= \{ \in \mathbb{R}^4 : {}_1 + {}_2 + {}_3 + {}_4 = 0, 2{}_1 - {}_2 = 0\}$.

   En ambos espacios se considera el producto escalar usual.

2. Sea como en 1.b) y $(3, 2) = \{ \in \mathbb{R}^4 : {}_1 + {}_2 + {}_3 + {}_4 = 3, 2{}_1 - {}_2 = 2\}$.

   a) Encontrar la expresión analítica, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, de la proyección ortogonal sobre .

   b) Similarmente sobre $(3, 2)$.

3. Sea un espacio euclídeo, y subconjuntos de y y subespacios vectoriales de . Demostrar:

   a) ${}^{\perp} = \{\vec{} \in : (\vec{}, \vec{v}) = 0$, para todo $\vec{v} \in \}$ es un subespacio vectorial de :

   b) ${}^{\perp\perp} \equiv ({}^{\perp})^{\perp} = L( )$, es decir, el subespacio engendrado por .

   c) $\subset \Rightarrow {}^{\perp} \subset {}^{\perp}$.

   d) $(+)^{\perp} = {}^{\perp} \cap {}^{\perp}$.

   e) $(\cap)^{\perp} = {}^{\perp} + {}^{\perp}$.

4. En $\mathbb{R}^4$ descomponer $\vec{} = (5, 2, -2, 2)$ en una suma de dos vectores, $\vec{} = \vec{g} + \vec{}$, con $\vec{g}$ perteneciente al subespacio vectorial generado por $\vec{b}_1 = (2, 1, 1, -1)$ y $\vec{b}_2 = (1, 1, 3, 0)$ y ortogonal a este subespacio, considerando el producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$.

5. Encontrar el complemento ortogonal de cada uno de los subespacios del ejercicio 10 de la sección 8.2. Además:

   a) En $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con el producto escalar $\langle , \rangle = \text{traza}({}^t)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

   b) Dada $= ({}_i) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, determinar la proyección ortogonal $( )$ sobre el subespacio de las matrices diagonales y calcular $\| - ( )\|$.

6. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual determinar las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $(1, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 2, 1)$.

7. Sea un espacio euclídeo y un subespacio vectorial de . Demostrar que $((\vec{}), \vec{y}) = = (\vec{}, (\vec{y}))$ para todo $\vec{}, \vec{y} \in$, donde es la proyección ortogonal sobre .

8. Sea un espacio euclídeo; $= L(, \mathbb{R}) = \{ : \to \mathbb{R} :$ lineal$\}$ se denomina el espacio dual de (ver sección 5.5).

   l teorema e re re enta i n e ie afirma que para cada $\in$ existe un único $\vec{} \in$ tal que $(\vec{v}) = (\vec{}, \vec{v})$, para todo $\vec{v} \in$. La aplicación que a cada $\in$ le asocia $\vec{} \in$ es biyectiva y satisface $\vec{}_{+g} = \vec{} + \vec{}_g$ y $\vec{}_{\lambda} = \lambda\vec{}$ (luego es lineal).

   Sea $= \mathbb{R}^3$ y $\in$ definido por $(\vec{e}_1) = 2$, $(\vec{e}_2) = 1$, $(\vec{e}_3) = -1$. Encontrar $\vec{}$.

9. Sea un espacio euclídeo, $\subset$ un subespacio, : $\to$ la proyección ortogonal sobre . Demostrar que:

   para todo $\vec{}\in$, $\|\vec{} - (\vec{})\| \leqslant \|\vec{} - \vec{}\|$, para todo $\vec{}\in$ (esto es, $(\vec{})$ es el vector de que mejor se aproxima a $\vec{}$).

10. En lo que sigue se supone: a) no se conoce la descomposición $=\ \oplus\ ^{\perp}$ y b) para cada $\vec{}\in$ existe al menos un $\vec{}\in$ tal que

$$\|\vec{} - \vec{}\| \leqslant \|\vec{} - \vec{}\|, \quad \forall\, \vec{}\in \quad . \tag{*}$$

   a) Probar que para cada $\vec{}$ existe un único $\vec{}\in$ satisfaciendo (*).

   b) Sea : $\to$ la aplicación tal que $(\vec{})$ es el único $\vec{}\in$ satisfaciendo (*). Probar que $(\vec{} - (\vec{}), \vec{}) = 0$, para todo $\vec{}\in$.

   c) Probar que $^2 =$ y $\in L(\ )$ (aplicaciones lineales de en) y, por tanto, es una proyección. Además, Img $=$.

      ota: observar que $=$ es la proyección ortogonal sobre .

11. Si es un subespacio vectorial de un espacio euclídeo , demostrar que $(\ ^{\perp})^{\perp} =$.

8.4. ADJUNTA DE UNA APLICACIÓN. APLICACIONES AUTOADJUNTAS

Definición 8.4.1

Sea un espacio euclídeo y una aplicación lineal de en , es decir, $\in L(\ )$; una aplicación $'\in L(\ )$ se dice que es ad unta de si para todo $\vec{}, \vec{y}\in$ se tiene

$$(\ (\vec{}), \vec{y}) = (\vec{},\ '(\vec{y})).$$

La definición anterior plantea dos preguntas inmediatas:

1. ¿Existe siempre una aplicación adjunta de una dada?
2. Si existe una aplicación adjunta de , ¿es única?

Comenzaremos contestando a la segunda pregunta de manera afirmativa; para probar que la adjunta de es única supongamos que existen aplicaciones lineales y tales que

$$(\ (\vec{}), \vec{y}) = (\vec{},\ (\vec{y})),\quad (\ (\vec{}), \vec{y}) = (\vec{},\ (\vec{y}));$$

entonces tenemos $(\vec{},\ (\vec{y})) = (\vec{},\ (\vec{y}))$, o equivalentemente $(\vec{},\ (\vec{y}) - (\vec{y})) = 0$ para todo $\vec{}$, $\vec{y}\in$; tomando $\vec{} = (\ -\ )(\vec{y})$ se tiene

$$((\ -\ )(\vec{y}), (\ -\ )(\vec{y})) = 0;$$

y por las propiedades del producto escalar se tiene $(\ -\ )(\vec{y}) = 0 \ \Rightarrow\ (\vec{y}) = (\vec{y})$, lo cual prueba que y coinciden.

En el razonamiento anterior se ha obtenido el siguiente resultado, que merece la pena destacar para su uso futuro:

Lema 8.4.2

Si , $\in L(\ )$ y son tales que $(\vec{\ }, \ (\vec{y})) = (\vec{\ }, \ (\vec{y}))$ para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$, se tiene = .

La pregunta primera tiene también una respuesta afirmativa si $\dim(\ ) = n < \infty$. Para demostrarlo, sea $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base ortonormal de y $= (a_i)_{i, \ =1,2,...,n}$ la matriz de en esta base; sea ^{t} la traspuesta de la matriz y sea $'$ la aplicación lineal de matriz ^{t} en esta misma base; demostraremos que $'$ es la aplicación adjunta de .

Tenemos que

$$(\ (\vec{e}_i), \vec{e}\ ) = (a_{1i}\vec{e}_1 + \cdots + a_{ni}\vec{e}_n, \vec{e}\ ) = a_{\ i}$$

y

$$(\vec{e}_i, \ '(\vec{e}\ )) = (\vec{e}_i, a_{\ 1}\vec{e}_1 + \cdots + a_{\ n}\vec{e}) = a_{\ i},$$

con lo cual tenemos $(\ (\vec{e}_i), \vec{e}\ ) = (\vec{e}_i, \ '(\vec{e}\ ))$ para todo $i, \ = 1, 2, ..., n$. Como todo vector de es combinación lineal de los vectores de la base, de la igualdad que acabamos de probar se deduce que $'$ es la adjunta de ; en efecto, si

$$\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n} {}_i\vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_{=1}^{n} y\,\vec{e}$$

tenemos que

$$(\ (\vec{\ }), \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{=1}^{n} {}_i y\,(\ (\vec{e}_i), \vec{e}\ ) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{=1}^{n} {}_i y\,(\vec{e}_i, \ '(\vec{e}\ )) = (\vec{\ }, \ '(\vec{y})),$$

lo cual prueba el resultado deseado.

Hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 8.4.3

Para toda aplicación lineal $\in L(\ )$, donde es un espacio euclídeo de dimensión finita, existe una única aplicación adjunta $'$ de , cuya matriz en una base ortonormal es la traspuesta de la matriz de .

* * *

A continuación damos algunas propiedades de la aplicación adjunta de una dada.

a) $' =$, donde denota la aplicación identidad (basta observar que $(\ (\vec{\ }), \vec{y}) = (\vec{\ }, \vec{y}) =$ $= (\vec{\ }, \ (\vec{y}))$ para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$).

b) $(\ ')' =$, ya que

$$(\ (\vec{\ }), \vec{y}) = (\vec{\ }, \ '(\vec{y})) = (\ '(\vec{y}), \vec{\ }) = (\vec{y}, (\ ')'(\vec{\ })) = ((\ ))'(\vec{\ }), \vec{y}) \text{ para todo } \vec{\ }, \vec{y} \in \ .$$

c) $(\ +\ )' = \ ' + \ '$, ya que

$$(\vec{\ }, (\ +\ )'(\vec{y})) = ((\ +\ )(\vec{\ }), \vec{y}) = (\ (\vec{\ }), \vec{y}) + (\ (\vec{\ }), \vec{y}) = (\vec{\ }, \ '(\vec{y})) + (\vec{\ }, \ '(\vec{y})) =$$
$$= (\vec{\ }, (\ ' + \ ')(\vec{y}))$$

para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$.

d) $(\ \circ\ )' = \ ' \circ \ '$, ya que

$$(\vec{\ }, (\ \circ\ )'(\vec{y})) = (\ \circ\ (\vec{\ }), \vec{y}) = (\ (\vec{\ }), \ '(\vec{y})) = (\vec{\ }, \ ' \circ \ '(\vec{y}))$$

para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$.

e) Si posee inversa, se tiene $(\ ^{-1})' = (\ ')^{-1}$.
Como $\circ\ ^{-1} =$ se deduce de d) y a) que $(\ ^{-1})' \circ \ ' = (\ \circ\ ^{-1})' = \ ' =$, lo cual prueba que la inversa de la adjunta es la adjunta de la inversa.

Nota. Las propiedades anteriores tienen su traducción para matrices traspuestas; por ejemplo, d) se escribe como $(\ \ )^t = \ ^t\ ^t$.

* * *

Definición 8.4.4

Sea un espacio euclídeo y $\in L(\ )$; la aplicación se dice **autoad unta** si su adjunta $'$ coincide con , esto es, $' =$. De forma equivalente,

$$(\ (\vec{\ }), \vec{y}) = (\vec{\ }, \ (\vec{y}))$$

para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$.

Si es la matriz de una aplicación $\in L(\ )$ en una base ortonormal, sabemos que ^{t} es la matriz de $'$ en esta misma base; si es autoadjunta se ha de tener $=\ ^t$. Por tanto, la matriz de una aplicación autoadjunta en una base ortonormal es simétrica.

Ya se ha observado que la aplicación adjunta de la identidad $\in L(\ )$ es ella misma; tenemos en el primer ejemplo de una aplicación autoadjunta.

Las aplicaciones autoadjuntas tienen las siguientes propiedades:

1. La suma de aplicaciones autoadjuntas es autoadjunta, ya que $(\ +\ )' = \ ' + \ ' = \ + \ .$
2. La aplicación inversa de una aplicación autoadjunta invertible es autoadjunta, ya que $(\ ^{-1})' = (\ ')^{-1} = \ ^{-1}$.
3. La composición de dos aplicaciones autoadjuntas es autoadjunta si y solo si las aplicaciones conmutan, ya que $(\ \ )' = \ '\ ' =$ y, por tanto, $(\ \ )' =$ si y solo si $=$.

En el ejercicio 11 de la sección 6.2 se pide demostrar que los autovalores de toda matriz real *im tri a* de orden 2 son reales; además, del mismo ejercicio se deduce que toda matriz real simétrica de orden 2 es diagonalizable. Nos preguntamos si toda matriz real simétrica (o equivalentemente toda aplicación autoadjunta) es diagonalizable en los números reales con independencia de su orden. En esta sección daremos una respuesta afirmativa a tal pregunta y demostraremos, además, que los vectores de la nueva base pueden tomarse ortonormales.

En lo que sigue, y mientras no se indique lo contrario, denota una aplicación lineal de un espacio euclídeo en sí mismo.

Teorema 8.4.5

Si es un subespacio vectorial de invariante con respecto a $\in L(\ )$, su complemento ortogonal $^{\perp}$ es invariante respecto de la aplicación adjunta $'$ de .

Demostración. Sea $\vec{y} \in\ ^{\perp}$; queremos demostrar que $'(\vec{y}) \in\ ^{\perp}$. Para todo $\vec{\ } \in$ se tiene que $(\vec{\ },\ '(\vec{y})) = (\ (\vec{\ }), \vec{y}) = 0$, ya que $\vec{y} \in\ ^{\perp}$ y $(\vec{\ }) \in$ por ser invariante con respecto a ; la igualdad $(\vec{\ },\ '(\vec{y})) = 0$ para todo $\vec{\ } \in$ implica que $'(\vec{y}) \in\ ^{\perp}$, que era lo que queríamos demostrar. ■

Si es una aplicación autoadjunta, se tiene $' =$, y del Teorema 8.4.5 se deduce inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario .4.6

Si es autoadjunta y es un subespacio vectorial de invariante con respecto a , $^{\perp}$ es invariante con respecto a .

Teorema 8.4.7

Toda aplicación autoadjunta en un espacio euclídeo de dimensión finita tiene todos sus autovalores reales.

Demostración. Sea una matriz de la aplicación . Supongamos que esta matriz tuviera un autovalor complejo, que denotaremos por $\alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$. En la sección 6.6 se demostró que existen vectores $\vec{\ }$, $\vec{v}$ no nulos simultáneamente, tal que

$$(\vec{\ }) = \alpha\vec{\ } - \beta\vec{v}, \qquad (\vec{v}) = \beta\vec{\ } + \alpha\vec{v}.$$

De aquí deducimos

$$(\ \vec{\ }, \vec{v}) = \alpha(\vec{\ }, \vec{v}) - \beta(\vec{v}, \vec{v})$$
$$(\vec{\ },\ \vec{v}) = \beta(\vec{\ }, \vec{\ }) + \alpha(\vec{\ }, \vec{v}).$$

Puesto que es autoadjunta se tiene que $(\ \vec{\ }, \vec{v}) = (\vec{\ },\ \vec{v})$ y, por tanto, $0 = \beta(\|\vec{\ }\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$. De aquí deducimos que $\beta = 0$, que contradice el hecho de que β es no nulo. Esta contradicción prueba el resultado deseado. ■

Teorema 8.4.8 (Diagonalizaci n de matrices simétricas)

La matriz de una aplicación autoadjunta en un espacio euclídeo de dimensión finita puede ser reducida en una base ortonormal determinada a una matriz diagonal.

Observación. Del Teorema 8.4.8 se deduce que toda matriz simétrica es diagonalizable.

Demostración. Sea una aplicación autoadjunta y λ_1 un autovalor de ; por el Teorema 8.4.7, λ_1 es real. Sea $\vec{e}_1$ un autovector unitario de correspondiente a λ_1.

Sea $_1 = L(\vec{e}_1)$ el subespacio generado por $\vec{e}_1$; como es autoadjunta, del Corolario 8.4.6. se deduce que $_1^{\perp}$ es invariante respecto de .

La aplicación restringida a $^{\perp}_{1}$ sigue siendo autoadjunta con el mismo producto escalar y, por tanto, podemos elegir $\vec{e}_2 \in {}^{\perp}_{1}$ tal que $\vec{e}_2$ sea un autovector unitario de autovalor real λ_2 de .

Tomamos $_2 = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ como el subespacio generado por $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$; $^{\perp}_{2}$ es invariante respecto de ; el proceso puede repetirse para obtener λ_3, autovalor real, y $\vec{e}_3$, autovector unitario, ortogonal a $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$.

Después de repetir este proceso tantas veces como la dimensión del espacio euclídeo se tiene una base de autovectores ortonormales, y en esta base la matriz de tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

■

EJEMPLO A. *e ir la ig iente matri im tri a*

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 3 \end{pmatrix}$$

a orma iagonal me iante na ba e ortonormal.

Sus autovalores son las soluciones de $0 = | \quad - \lambda | = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$; por tanto, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Puesto que

$$\begin{pmatrix} -4 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -4 \ + \sqrt{8}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(\quad - 5\ ) = L\{\vec{}_1 = (2, \sqrt{8})\},$$

tomamos $\vec{e}_1 \in L(\vec{}_1)$ unitario:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{}_1}{\|\vec{}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}(2, \sqrt{8}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2 \ + \sqrt{8}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(\quad + \ ) = L\{\vec{}_2 = (-4, \sqrt{8})\},$$

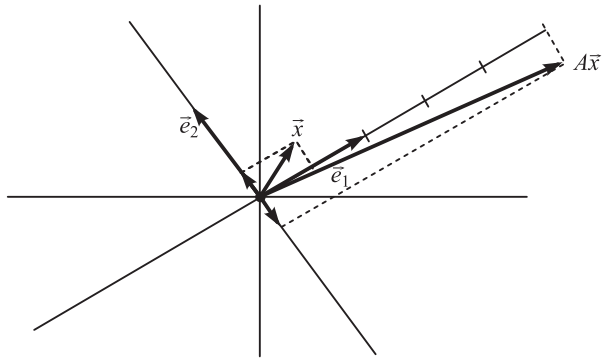
tomamos $\vec{e}_2 \in L(\vec{}_2)$ unitario:

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{}_2}{\|\vec{}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}}(-4, \sqrt{8}) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right).$$

Observar que $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son ortonormales. La matriz de en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es

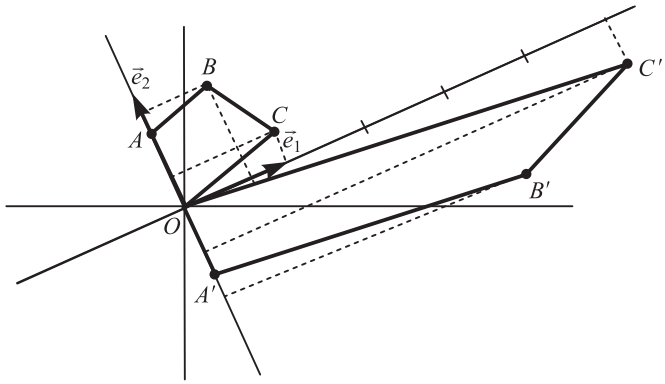
$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la aplicación produce una «dilatación» en el «eje» $\vec{e}_1$ que se obtiene multiplicando por 5, y una «simetría» con respecto a la recta $L(\vec{e}_1)$ (ver figuras 8.13 y 8.14).



i ra 8.13

La imagen de la figura es ′ ′ ′ (ver figura 8.14).



i ra 8.14

Podemos ahora dar la interpretación geométrica de las aplicaciones autoadjuntas; en la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ del Teorema 8.4.8, si $\vec{} = {}_1\vec{e}_1 + \cdots + {}_n\vec{e}_n$,

$$\vec{} = \lambda_1 {}_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n {}_n\vec{e}_n,$$

con lo cual en esta base se reduce a n «dilataciones» a lo largo de los nuevos ejes; las dilataciones pueden o no cambiar el sentido según que el autovalor sea positivo o negativo.

EJERCICIOS 8.4

1. Encontrar la aplicación adjunta de las siguientes aplicaciones:

   a) $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (, y,) = (+ y + , \quad + 2y + 2 , \quad + 2y + 3).$

   b) $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (, y,) = (-y + , - \quad + 2 , \quad + 2y).$

   c) $: \ {}^{(2)}_{\mathbb{R}}[-1, 1] \to \ {}^{(2)}_{\mathbb{R}}[-1, 1], \quad (( )) = \quad — \ ( ) - — (\quad ( )).$

   d) $: \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad ( ) = \ {}^t + \ .$

   ota. Los productos escalares de $\mathbb{R}^3$, ${}^{(2)}_{\mathbb{R}}[-1, 1]$ y $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ son como en el ejercicio 10 de la sección 8.2.

2. Sean $\vec{}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{}_2 = (1, 0, 1)$ y $\vec{}_3 = (1, 2, 0)$ los vectores de una base de $\mathbb{R}^3$. Considerando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$, estudiar si la aplicación $\in L(\mathbb{R}^3)$ es autoadjunta cuando su matriz asociada en la base $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ es

a) $= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Diagonalizar en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones, demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

a) $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (, y) = (2 \quad + y, 2y + \quad).$

b) $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (, y, \quad) = (y + \quad , \quad + \quad , \quad + y).$

c) $: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad (\quad) = \quad ^t.$

4. Sea una aplicación lineal de un espacio euclídeo en sí mismo. Demostrar que $+ \quad '$ es autoadjunta.

5. Sea una aplicación lineal de un espacio euclídeo en sí mismo. Demostrar que

$$\mathrm{Ker}(\quad ') = [\mathrm{Img}(\quad)]^{\perp} \quad \text{e} \quad \mathrm{Img}(\quad ') = [\mathrm{Ker}(\quad)]^{\perp}.$$

6. Demostrar que toda matriz simétrica $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ determina una aplicación lineal autoadjunta en cualquier espacio euclídeo de dimensión n.

8.5. APLICACIONES ORTOGONALES

Sabemos que en todo espacio euclídeo existe el concepto de longitud de un vector; es natural, por tanto, preguntarse cuáles son aquellas aplicaciones que conservan la longitud de los vectores de . A las aplicaciones que conservan la longitud de los vectores de las llamaremos *ortogonale* ; su estudio, así como su significado geométrico, serán el objetivo principal de las dos próximas secciones.

En lugar de dar la definición utilizando la longitud de los vectores, la daremos utilizando la noción de producto escalar. Como mostraremos más adelante, ambas definiciones son equivalentes.

En lo que sigue se utiliza para designar un espacio euclídeo y una aplicación lineal de en ; además, cuando sea necesario utilizar la matriz de la aplicación se entiende que es de dimensión finita.

Definición 8.5.1

Una aplicación lineal de un espacio euclídeo se llama ortogonal si $((\vec{}), \quad (\vec{y})) = (\vec{}, \vec{y})$ para todo $\vec{}, \vec{y} \in$ (es decir, conserva el producto escalar).

Puesto que si es ortogonal,

$$\|\vec{\ }\|^2 = (\vec{\ }, \vec{\ }) = (\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{\ })) = \|\ (\vec{\ })\|^2$$

y

$$\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{y}) = \frac{(\vec{\ }, \vec{y})}{\|\vec{\ }\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{(\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{y}))}{\|\ (\vec{\ })\|\,\|\ (\vec{y})\|} = \cos \sphericalangle(\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{y})),$$

deducimos que toda aplicación ortogonal conserva las longitudes de los vectores y los ángulos entre ellos. Se tiene, además, la siguiente proposición:

Proposición 8.5.2

Toda aplicación lineal en un espacio euclídeo que conserve la longitud de los vectores es una aplicación ortogonal.

Demostración. Para todo $\vec{\ }, \vec{y} \in$ se tiene

$$\|\ (\vec{\ } + \vec{y})\|^2 = (\ (\vec{\ }) + \ (\vec{y}),\ \ (\vec{\ }) + \ (\vec{y})) = \|\ (\vec{\ })\|^2 + 2(\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{y})) + \|\ (\vec{y})\|^2$$

y

$$\|\vec{\ } + \vec{y}\|^2 = (\vec{\ } + \vec{y}, \vec{\ } + \vec{y}) = \|\vec{\ }\|^2 + 2(\vec{\ }, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2.$$

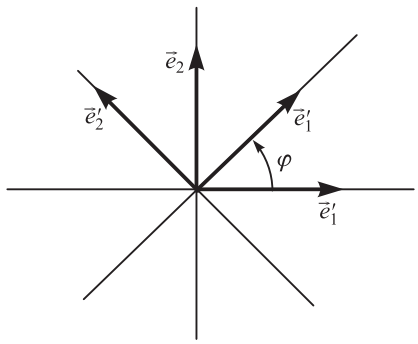
Teniendo en cuenta que conserva la longitud de los vectores y, por tanto, $\|\ (\vec{\ } + \vec{y})\| = \|\vec{\ } + \vec{y}\|$, $\|\ (\vec{\ })\| = \|\vec{\ }\|$ y $\|\ (\vec{y})\| = \|\vec{y}\|$ se deduce que

$$(\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{y})) = (\vec{\ }, \vec{y}),$$

lo cual prueba que es ortogonal. ■

Ha llegado el momento de dar algunos ejemplos de aplicaciones ortogonales, aparte del ejemplo trivial de la aplicación identidad.

EJEMPLO A. Cualquier *giro* en $\mathbb{R}^2$ (con centro el origen de coordenadas) es una aplicación ortogonal. Este resultado, que es geométricamente intuitivo, puede demostrarse algebraicamente. Para ello suponer que el giro es un giro de ángulo φ en el sentido positivo (contrario a



i ra 8.15

las agujas de un reloj) y que, por tanto, su matriz viene dada (respecto de una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$) por

$$G_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Para todo $\vec{\ } = (\ _1,\ _2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\|G_\varphi(\vec{\ })\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \ _1\cos\varphi - \ _2\operatorname{sen}\varphi \\ \ _1\operatorname{sen}\varphi + \ _2\cos\varphi \end{pmatrix} \right\|^2 =$$
$$= (\ _1\cos\varphi - \ _2\operatorname{sen}\varphi)^2 + (\ _1\operatorname{sen}\varphi + \ _2\cos\varphi)^2 = \ _1^2 + \ _2^2 = \|\vec{\ }\|^2.$$

Esto prueba que G_φ conserva la longitud de los vectores y por la Proposición 8.5.2 debe de ser ortogonal.

EJEMPLO B. En $\mathbb{R}^2$ cualquier *imetría* (ortogonal) con respecto a un subespacio vectorial unidimensional es una aplicación ortogonal.

Encontremos primero las ecuaciones de la simetría - con respecto a $= L(\vec{\ })$. Dado $\vec{\ } \in \mathbb{R}^2$, sea $\vec{y} =$ $(\vec{\ }) - \vec{\ }$, donde $(\vec{\ })$ es la proyección de $\vec{\ }$ sobre . Se cumple:

$$\vec{\ } + 2\vec{y} = \ -(\vec{\ }),$$

como puede apreciarse en la figura 8.16. Estas igualdades producen

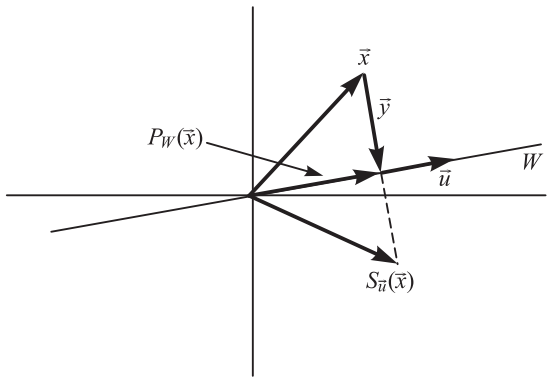
$$-(\vec{\ }) = 2 \quad (\vec{\ }) - \vec{\ } = (2 \quad - \ )(\vec{\ }).$$

Para encontrar $(\vec{\ })$ escribimos $(\vec{\ }) = \lambda\vec{\ }$ e imponemos la condición de que $\vec{y} =$ $(\vec{\ }) - \vec{\ } =$ $= \lambda\vec{\ } - \vec{\ }$ sea perpendicular a $\vec{\ }$:

$$0 = (\vec{\ }, \lambda\vec{\ } - \vec{\ }) = \lambda\|\vec{\ }\|^2 - (\vec{\ }, \vec{\ }).$$

Por tanto,

$$(\vec{\ }) = \frac{(\vec{\ }, \vec{\ })}{\|\vec{\ }\|^2}\vec{\ }.$$



i ra 8.16

De aquí deducimos que la matriz de con respecto a la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\overset{2}{1}}{\|\vec{\ }\|^2} & \frac{1\ 2}{\|\vec{\ }\|^2} \\ \frac{1\ 2}{\|\vec{\ }\|^2} & \frac{\overset{2}{2}}{\|\vec{\ }\|^2} \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\ } = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2$.

Puesto que $\text{-}(\vec{\ }) = (2 \quad - \quad)(\vec{\ })$ la matriz de - con respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{2\ \overset{2}{1}}{\|\vec{\ }\|^2} - 1 & \frac{2\ 1\ 2}{\|\vec{\ }\|^2} \\ \frac{2\ 1\ 2}{\|\vec{\ }\|^2} & \frac{2\ \overset{2}{2}}{\|\vec{\ }\|^2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\vec{\ }\|^2}\begin{pmatrix} \overset{2}{1} - \overset{2}{2} & 2\ 1\ 2 \\ 2\ 1\ 2 & \overset{2}{2} - \overset{2}{1} \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar ahora que - es una aplicación ortogonal puesto que si $\vec{\ } = ({}_1, \ {}_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{-}(\vec{\ }) = \frac{1}{\|\vec{\ }\|^2}\begin{pmatrix} \overset{2}{1} - \overset{2}{2} & 2\ 1\ 2 \\ 2\ 1\ 2 & \overset{2}{2} - \overset{2}{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overset{2}{1} - \overset{2}{2})\ {}_1 + 2\ 1\ 2\ {}_2 \\ 2\ 1\ 2\ {}_1 + (\overset{2}{2} - \overset{2}{1})\ {}_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\|\vec{\ }\|^2}$$

implica que

$$\| \text{-}(\vec{\ })\|^2 = \frac{1}{\|\vec{\ }\|^4}[(\overset{2}{1} - \overset{2}{2})^2\ \overset{2}{1} + 4\ \overset{2}{1}\ \overset{2}{2}\ \overset{2}{1} + 4\ \overset{2}{1}\ \overset{2}{2}\ \overset{2}{2} + (\overset{2}{2} - \overset{2}{1})\ \overset{2}{2}] =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{\ }\|^4}[(\overset{2}{1} + \overset{2}{2})^2\ \overset{2}{1} + (\overset{2}{1} + \overset{2}{2})^2\ \overset{2}{2}] = \overset{2}{1} + \overset{2}{2} = \|\vec{\ }\|^2.$$

Nota. Si hubiéramos elegido $\{\vec{\ }, \vec{\ }^{\perp}\}$ como la base en $\mathbb{R}^2$, la matriz de - con respecto a esta base sería

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

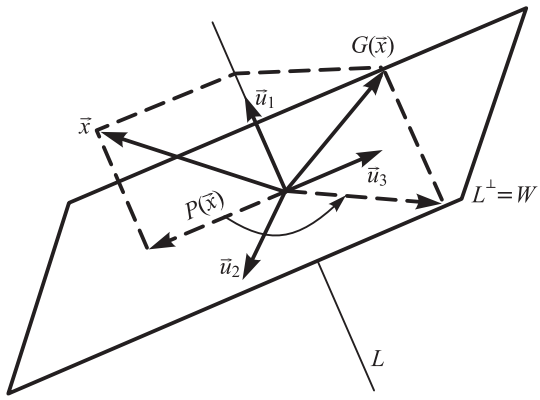
La matriz de - con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^2$ puede encontrarse a partir de aquí realizando un cambio de base.

Si el lector intenta encontrar más aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ tendrá serias dificultades. Quizá puede pensar en la simetría con respecto al origen de coordenadas, pero puede convencerse fácilmente que esta simetría es un giro de 180º y, por tanto, ha sido incluida en el ejemplo . De hecho demostraremos en la próxima sección *e la ni a a li a ione ortogonale e* $\mathbb{R}^2$ *on lo giro y la imetría on re e to a na re ta* (*o imetría a iale*). (Así se explica el lector las dificultades anteriores.)

* * *

En $\mathbb{R}^3$ las posibilidades de aplicaciones ortogonales son mayores; a continuación daremos algunos ejemplos.

EJEMPLO C. En $\mathbb{R}^3$ el giro G con respecto a una «recta» L (subespacio vectorial de dimensión 1), llamada *e e e giro*, de amplitud φ es una aplicación ortogonal.



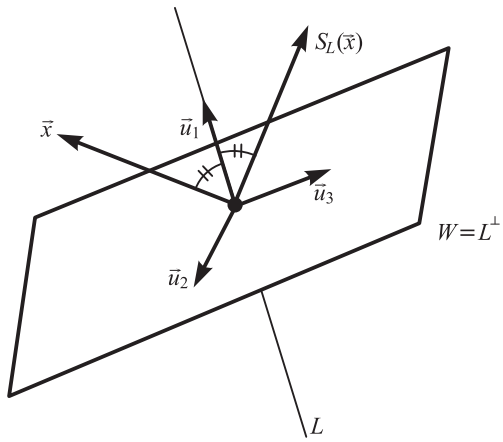
i ra 8.17

Supongamos que $L = L(\vec{}_1)$ y que $= L^{\perp} = L(\vec{}_2, \vec{}_3)$, de manera que $\vec{}_1$, $\vec{}_2$ y $\vec{}_3$ son ortonormales y con la misma orientación que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es decir, $\vec{}_2 \times \vec{}_3 = \vec{}_1$, con el sentido de giro que indica la figura 8.17. Entonces $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y en esta base la matriz de G es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO D. La simetría $_L$ con respecto a una recta L, en $\mathbb{R}^3$, es una aplicación ortogonal. En la base ortonormal $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ elegida como en la figura 8.18 se tiene:

$$_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



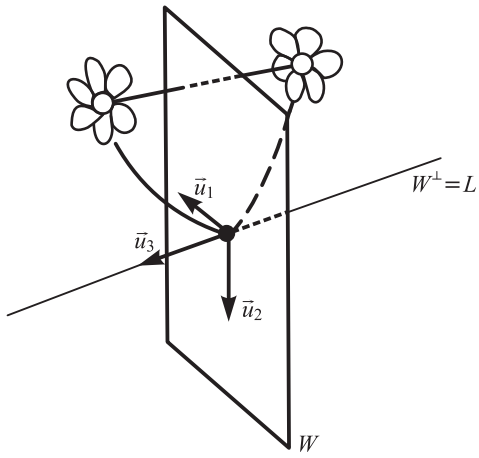
i ra 8.18

Observar que esta simetría es en realidad un giro en $\mathbb{R}^3$ de 180º con respecto a la recta L, y, por tanto, es un caso particular del ejemplo C.

EJEMPLO E. La imagen tridimensional que produce un espejo es una aplicación ortogonal; se trata simplemente de una simetría con respecto al plano del espejo.

Si es el plano, designa esta simetría, y elegimos una base ortonormal $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ como en la figura 8.19, se tiene que en esta base tiene por matriz:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



i ra 8.19

* * *

¿Serán todas estas las posibles aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$? Recomendamos al lector que trate de encontrar alguna más y le advertimos que la respuesta a la pregunta anterior la encontrará más adelante en la próxima sección. No solo llegaremos a la determinación de las posibles aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ sino de cualquier espacio euclídeo de dimensión finita.

Este trabajo requiere el estudio de los autovalores de aplicaciones ortogonales. Antes de comenzar este estudio daremos algunas propiedades útiles de las aplicaciones ortogonales.

Es claro que toda aplicación ortogonal transforma toda base ortonormal en una base ortonormal; el recíproco también es cierto y está contenido en la proposición siguiente:

Proposición 8.5.3

Toda aplicación lineal que transforma al menos una base ortonormal en una base ortonormal es ortogonal.

Demostración. Sea $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base ortonormal tal que $\{\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n\}$, donde $\vec{e}' = (\vec{e}\,)$, $= 1, 2, ..., n$, es también ortonormal. Para todo

$$\vec{} = \sum_{i=1}^{n} {}_i\vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_{=1}^{n} y\,\vec{e}$$

del espacio euclídeo se tiene

$$(\ (\vec{\ }),\quad (\vec{y})) = \sum_{i,\ =1}^{n}\ _i y\ (\ (\vec{e}_i),\quad (\vec{e}\,)) = \sum_{i,\ =1}^{n}\ _i y\ (\vec{e}_i', \vec{e}') = \sum_{i=1}^{n}\ _i y_i,$$

mientras que

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \sum_{i,\ =1}^{n}\ _i y\ (\vec{e}_i, \vec{e}\,) = \sum_{i=1}^{n}\ _i y_i$$

y, por tanto, conserva el producto escalar. ■

Si es una aplicación ortogonal y ′ denota su adjunta (ver sección 8.4) se tiene que

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = (\ (\vec{\ }),\quad (\vec{y})) = (\vec{\ },\quad {}' \circ\ (\vec{y}))$$

para todo ⃗, ⃗. *el Lema y e la ig al a anterior e e e e ′ o = . e í ro a mente, i ′ o = , e na a li a i n ortogonal. e a í e e e eto a a li a i n orto gonal tiene na inver a, a aber*: $^{-1} = {}'$ *y, or tanto, e no ing lar.*

La inversa de una aplicación ortogonal es también ortogonal puesto que

$$^{-1} \circ (\ ^{-1})' = \ ^{-1} \circ (\ {}')^{-1} = (\ {}' \circ\ )^{-1} = \ ,$$

y la composición o producto de dos aplicaciones ortogonales y es también ortogonal puesto que

$$(\ \circ\ )'(\ \circ\ ) = \ {}' \circ (\ {}' \circ\ ) \circ\ = \ {}' \circ\ \circ\ = \ .$$

Sin embargo, la suma de dos aplicaciones ortogonales no es, en general, una aplicación ortogonal (dejamos al lector que busque un ejemplo).

Sea la matriz de en una base ortonormal; puesto que ′ ∘ = deducimos que $^t =$ o equivalentemente $^t = {}^{-1}$. Toda matriz que satisface una cualquiera de estas dos ecuaciones se llama *ortogonal*. El determinante de una matriz ortogonal es igual a 1 ó −1, ya que

$$|\ |^2 = |\ \|\ \| = |\ {}^t\|\ \| = |\ {}^t\ | = |\ | = 1.$$

El conjunto de las matrices ortogonales de orden n con elementos reales se designa por $(n; \mathbb{R})$ y, por tanto,

$$(n; \mathbb{R}) = \{\ \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ ^t\ =\ \}$$

En el conjunto $(n; \mathbb{R})$ la multiplicación de matrices es una operación interna, ya que el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal: basta observar que este resultado ha sido demostrado para aplicaciones ortogonales con la composición de aplicaciones. Esta operación es asociativa, puesto que lo es la multiplicación de matrices (ver sección 1.3); la matriz identidad es ortogonal, ya que $^t = \cdot =$ y la inversa de una matriz ortogonal es también una matriz ortogonal, ya que anteriormente se ha demostrado para aplicaciones ortogonales.

Por poseer estas propiedades, el conjunto $(n; \mathbb{R})$ se dice que es un *gr o* con respecto a la multiplicación de matrices, llamado *el gr o ortogonal* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos de grupos han aparecido implícitamente en los capítulos anteriores. Se invita al lector a localizarlos.

* * *

Procedemos ahora al estudio de los autovalores de aplicaciones ortogonales.

Teorema 8.5.4

Los autovalores reales de una aplicación ortogonal son iguales a 1 ó -1.

Demostración. Si λ es un autovalor real de una aplicación ortogonal con autovector $\vec{\ }$ se tiene que

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = (\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{\ })) = (\lambda\vec{\ }, \lambda\vec{\ }) = \lambda^2(\vec{\ }, \vec{\ }).$$

Por tanto, $\lambda^2 = 1$ y $\lambda = \pm 1$. ■

Observación. La matriz de una aplicación ortogonal puede tener autovalores complejos; por ejemplo, el giro del ejemplo A tiene como autovalores $\lambda = \cos\varphi \pm i\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Si dispusiéramos de un «producto escalar» en un espacio vectorial complejo podríamos demostrar que los autovalores complejos de toda matriz ortogonal tienen módulo 1. Esto se hará en el capítulo siguiente.

Teorema 8.5.5

Si un subespacio vectorial de un espacio euclídeo es invariante respecto a una aplicación ortogonal , $^{\perp}$ es también invariante respecto de .

Demostración. Si $\vec{y} \in\ ^{\perp}$ y $\vec{\ } \in$ se tiene

$$(\vec{\ },\ \ (\vec{y})) = (\ \circ\ ^{-1}(\vec{\ }),\ \ (\vec{y})) = (\ \ ^{-1}(\vec{\ }), \vec{y}).$$

Además, $^{-1}(\ ) =$, por ser invariante por y ser invertible. Por tanto, $^{-1}(\vec{\ }) \in$ y se tiene

$$(\vec{\ },\ \ (\vec{y})) = (\ \ ^{-1}(\vec{\ }), \vec{y}) = 0.$$

Así pues, $(\vec{y}) \in\ ^{\perp}$. ■

8.6. CLASIFICACIÓN DE APLICACIONES ORTOGONALES

En esta sección clasificaremos las aplicaciones ortogonales en un espacio euclídeo de dimensión 2 ó 3. La clasificación consistirá en encontrar todos los posibles tipos de aplicaciones ortogonales en , de manera que toda aplicación ortogonal sea de uno de estos tipos.

Comenzaremos clasificando las aplicaciones ortogonales en un espacio euclídeo de dimensión 2 y deduciendo de aquí algunos resultados de la geometría plana. A continuación daremos un teorema general sobre la *orma e or an real e a li a ione ortogonale* en un espacio euclídeo de dimensión *n*, del cual deduciremos la clasificación de las aplicaciones ortogonales en un espacio euclídeo de dimensión 3.

Sea una aplicación ortogonal en un espacio euclídeo de dimensión 2 (en particular $\mathbb{R}^2$), que tiene como matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

en una base ortonormal $= \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de . Puesto que $^t =$ se tiene que

$$^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deducimos de aquí las igualdades

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Podemos elegir φ y ψ de manera que las dos primeras igualdades sean ciertas, es decir,

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{21} = \operatorname{sen}\varphi, \quad a_{12} = \cos\psi, \quad a_{22} = \operatorname{sen}\psi.$$

Sustituyendo en la tercera se obtiene

$$\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi = \cos(\psi - \varphi) = 0.$$

Por tanto, se puede tener $\psi - \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ o también $\psi - \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. Si $\psi - \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

y, por tanto, es la *rota i n e ng lo φ alre e or el origen e oor ena a* . (En particular, si $\varphi = 0$ se tiene la aplicación identidad y si $\varphi = \pi$ se tiene la simetría respecto del origen de coordenadas.)

En el segundo caso, esto es, $\psi - \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, se tiene,

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La matriz es simétrica y, por tanto, corresponde a una aplicación autoadjunta; en la sección 8.4 se demostró que tiene como matriz

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

en una (nueva) base ortonormal (ver Teorema 8.4.8); por el Teorema 8.5.4, $\lambda_1 = 1$ ó -1 y $\lambda_2 = 1$ ó -1. Además,

$$\lambda_1\lambda_2 = | \ | = | \ | = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -1$$

y, por tanto, λ_1 y λ_2 tienen signo opuesto. En consecuencia, en una (posiblemente nueva) base ortonormal $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ tiene como matriz

$$- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que representa una *imetría on re e to al e e* $\bar{e}'_1$.

En resumen, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 8.6.1

Toda aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ es bien una *rota i n* de ángulo φ alrededor del origen de coordenadas (el determinante de cualquiera de sus matrices es 1) o bien una *imetría a ial* (con determinante -1).

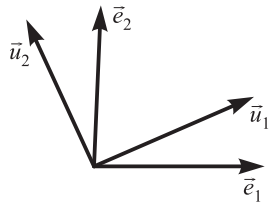
* * *

Sean $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $' = \{\bar{}_1, \bar{}_2\}$ dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ y la transformación lineal definida por

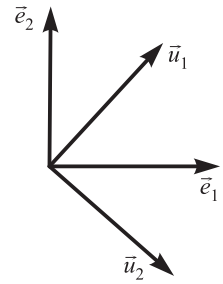
$$(\vec{e}_1) = \bar{}_1 \quad , \qquad (\vec{e}_2) = \bar{}_2.$$

La matriz de en la base es la matriz del cambio de base de a $'$. Puesto que transforma una base ortonormal en otra ortonormal es una aplicación ortogonal (Proposición 8.5.3). Por tanto $| \ | = \pm 1$.

Si $| \ | = 1$ diremos que y $'$ tienen la *mi ma orienta i n*. Si $| \ | = -1$ diremos que y $'$ tienen *i tinta orienta i n*:



Misma orientación



Distinta orientación

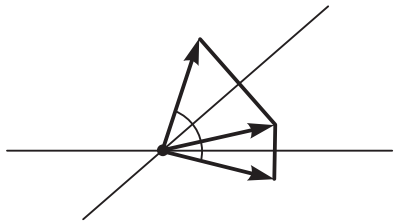
Si y $'$ tienen la misma orientación, el Teorema 8.6.1 prueba que es una rotación. Si y $'$ tienen distinta orientación, el Teorema 8.6.1 prueba que es una simetría.

Nota. En general, dadas dos bases $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ y $' = \{\bar{}_1, ..., \bar{}_n\}$ de un espacio vectorial de dimensión n, diremos que y $'$ tienen la *mi ma orienta i n* si la matriz del cambio de base de a $'$ tiene determinante positivo. Si $| \ | < 0$ diremos que y $'$ tienen *i tinta orienta i n*.

* * *

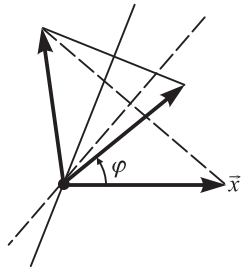
Del Teorema 8.6.1 se deducen resultados de la geometría elemental plana que nos serán útiles en el Capítulo 10, dedicado al estudio de los movimientos en el plano y en el espacio. Enunciamos alguno de ellos dejando la demostración para el lector:

1) La composición de dos simetrías axiales es una rotación de ángulo el doble del ángulo comprendido entre los ejes de simetría (observar que la composición de dos simetrías tiene determinante 1).



i ra 8.20

2) La composición de una rotación con respecto al origen y una simetría axial es de nuevo una simetría axial (observar que su determinante es -1).



i ra 8.21

3) La composición de dos giros con respecto al origen es otro giro con el mismo centro y ángulo de giro la suma de los ángulos.

* * *

Pasamos ahora a clasificar las aplicaciones ortogonales en espacios euclídeos de cualquier dimensión finita.

Teorema 8.6.2

La matriz de una aplicación ortogonal se reduce en una base ortonormal determinada a la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \cos\varphi_1 & -\operatorname{sen}\varphi_1 & & \\ & 0 & & & & & \operatorname{sen}\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\operatorname{sen}\varphi_k \\ & & & & & & & & & \operatorname{sen}\varphi_k & \cos\varphi_k \end{pmatrix}.$$

Demostración. Procedemos por inducción en la dimensión n del espacio euclídeo. Si $n = 1$ es claro, puesto que solo podemos tener $\lambda = \pm 1$. Para $n = 2$ el Teorema 8.6.2 coincide con el Teorema 8.6.1, que ya hemos demostrado.

Sea ahora un espacio euclídeo de dimensión n y una aplicación ortogonal. Pueden ocurrir dos casos:

1. *La a li a i n tiene n valor ro io real* $\lambda = \pm 1$ (esto ocurre necesariamente si n es impar). Si $\vec{e}_1$ es un autovector unitario correspondiente a este autovalor tomamos $= L(\vec{e}_1)$; como $^{\perp}$ es invariante por (ver Teorema 8.5.5) la hipótesis de inducción nos dice que la matriz de $|_{^{\perp}}$ es de la forma del Teorema 8.6.2. Añadiéndole el vector $\vec{e}_1$ se obtiene una base de en la cual tiene la matriz deseada.
2. *La a li a i n no tiene valore ro io reale .* debe de poseer al menos un autovalor complejo (y su conjugado) y en consecuencia tiene también un subespacio de dimensión 2 invariante. Por el Teorema 8.6.1,

$$| = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad | = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ adecuada. El segundo caso no puede darse, puesto que ello implicaría la existencia de autovalores reales. Por tanto,

$$| = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Como $^{\perp}$ es invariante (Teorema 8.5.5) podemos aplicarle la hipótesis de inducción para obtener una base de $^{\perp}$ en la cual $|_{^{\perp}}$ es como en el Teorema 8.6.2. Añadiéndole $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ adecuadamente se obtiene el resultado deseado. ■

* * *

Podemos ahora estudiar las posibles aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$. Del Teorema 8.6.2 se desprende que sus matrices en una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ adecuada han de tener una de las siguientes formas:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{f)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

ta matri e tienen la ig iente inter reta i n: a) es la identidad; b) es una simetría con respecto al plano determinado por $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$; e) es un giro de ángulo φ alrededor del eje $\vec{e}_1$ (en particular c) es un giro de ángulo 180^{o} alrededor de $\vec{e}_1$); f) es un giro de ángulo φ alrededor de $\vec{e}_1$ seguido de una simetría con respecto al plano determinado por $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (es decir, composición de e) y b)); d) es un caso particular de f) con $\varphi = 180^{\text{o}}$ y corresponde a una simetría con respecto al origen de coordenadas.

* * *

Sean $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $' = \{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$. La aplicación lineal definida por

$$(\vec{e}\,) = \vec{}, \quad = 1, 2, 3,$$

es ortogonal (Proposición 8.5.3). La matriz de en la base es la matriz del cambio de base de a $'$, por lo que $| \ | = \pm 1$, ya que es una matriz ortogonal.

Si y $'$ tienen la misma orientación, $| \ | = 1$ y como es ortogonal es equivalente a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi$$

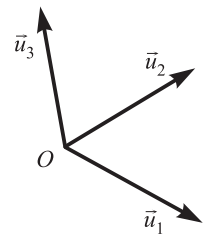
que engloba los casos a), e) y c) descritos arriba. Por tanto, en este caso existe una rotación de $\mathbb{R}^3$ que transforma en $'$.

Si y $'$ tienen distinta orientación, $| \ | = -1$ y por tanto la aplicación en una base ortonormal adecuada es de la forma b), d) ó f). Todas ellas se engloban en las matrices

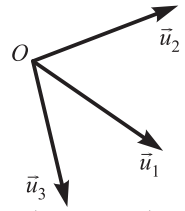
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

Como estamos en $\mathbb{R}^3$ podemos usar el producto vectorial. Si es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $'$ tienen la misma orientación que , como $| \ | = (\vec{}_1 \times \vec{}_2, \vec{}_3)$ —producto mixto— (ver el párrafo que precede a la Proposición 7.5.4), y $(\vec{}_1 \times \vec{}_2, \vec{}_3) = 1$ si y solo si $\vec{}_1 \times \vec{}_2 = \vec{}_3$, se deduce que $'$ tiene la misma orientación que si y solo si $\vec{}_1 \times \vec{}_2 = \vec{}_3$. Recordar (final de la sección 7.5) que en este caso se dice que $'$ es una base *o itivamente orienta a*.

De manera similar se prueba que $'$ tiene distinta orientación que la base canónica de $\mathbb{R}^3$ si y solo si $\vec{}_1 \times \vec{}_2 = -\vec{}_3$ y en este caso la base $'$ está *negativamente orienta a*.



Positivamente orientada



Negativamente orientada

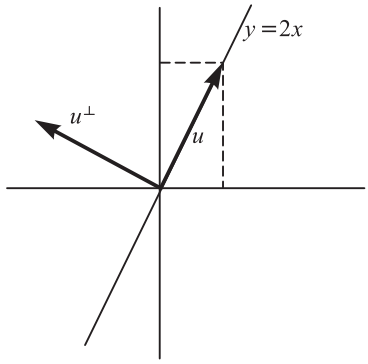
EJEMPLO A. Tratemos de encontrar en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ la matriz de la simetría (ortogonal) con respecto a la recta $2 \ - y = 0$.

La recta está generada por el vector $\vec{} = (1, 2)$; podríamos aplicar el resultado del ejemplo B, sección 8.5, pero preferimos hacerlo de nuevo. En la base ortonormal

$$\left\{ \vec{v}_1 = \frac{\vec{}}{\|\vec{}\|}, \vec{v}_2 = \frac{\vec{}^{\perp}}{\|\vec{}\|} \right\}$$

donde $\vec{\ }^{\perp} = (-2, 1)$, la matriz de esta simetría es

$$' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



i ra 8.22

Puesto que

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \qquad , \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$$

la matriz de la simetría en la base canónica (la antigua) es

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO B. La matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es ortogonal porque

$$^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ .$$

Su interpretación geométrica se deduce del estudio de sus autovalores. Como es simétrica sus autovalores han de ser reales y, por tanto, iguales a ± 1 (Teorema 8.5.4). Un cálculo adecuado muestra que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ (doble) son sus autovalores.

Para $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} = y \\ = 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Ker}(\quad - \quad) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right\}.$$

Para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad = -y \quad \Rightarrow \quad \text{Ker}(\quad + \quad) = L\left\{(0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\right\}.$$

Luego

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un giro de 180º alrededor de $L(\vec{}_1)$ con $\vec{}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ o, equivalentemente, una simetría respecto a la recta $L(\vec{}_1)$.

* * *

Terminamos esta sección con una observación. Dada una matriz ortogonal $\in (n; \mathbb{R})$, del Teorema 8.6.2 de esta misma sección se deduce que existe una matriz tal que

$$= \quad ^{-1}$$

donde es como en el Teorema 8.6.2, es decir, una forma de Jordan real de , y es la matriz del cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ a una base ortonormal $= \{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, la aplicación lineal en $\mathbb{R}^n$ que tiene como matriz transforma una base ortonormal en otra base ortonormal; esto es suficiente para asegurar que es una matriz ortogonal.

Debido al Teorema 8.4.8 el mismo razonamiento anterior muestra que si es una matriz simétrica con valores reales, existe una matriz diagonal , y una matriz ortogonal tal que

$$= \quad ^{-1}.$$

Pero como es ortogonal se tiene, además, que $^{-1} = \ ^t$. Se tiene así el siguiente resultado:

Teorema 8.6.3 (Teorema espectral)

1) Dada $\in (n; \mathbb{R})$ existen $\in (n; \mathbb{R})$ y como en el Teorema 8.6.2 tal que $= \ ^t$.
2) Dada $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y tal que $= \ ^t$, existen $\in (n; \mathbb{R})$ y $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonal, tal que $= \ ^t$.

EJERCICIOS 8.6

1. Sean $\vec{}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{}_2 = (1, 0, 1)$ y $\vec{}_3 = (1, 2, 0)$ los vectores de una base de $\mathbb{R}^3$. Estudiar si $\in L(\mathbb{R}^3)$ es ortogonal cuando su matriz en la base $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ está dada por:

   a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sea $\in L(\mathbb{R}^3)$ una aplicación lineal cuya matriz en la base ortonormal dada de $\mathbb{R}^3$ es

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Demostrar que es ortogonal. Encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la que tenga como matriz la forma de Jordan real.

3. En un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 se considera la base ortonormal $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y : $\to$ lineal, definida por

$$3\ (\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad 3\ (\vec{e}_2) = \alpha\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad 3\ (\vec{e}_3) = \beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

   Hallar α, β y γ de manera que sea una aplicación ortogonal y encontrar la matriz de en la base .

4. Sea $\in L(\ )$ una involución, es decir, $^2 =$. Demostrar que es una simetría ortogonal o la identidad si y solo si es autoadjunta.

5. Sea un espacio vectorial real y una aplicación ortogonal. Probar que si λ es una raíz del polinomio característico de , entonces $|\lambda| = 1$. (Demostrar este resultado sin utilizar la complexificación de , es decir, utilizando únicamente métodos reales: si $\lambda = \alpha + i\beta$, existen $\vec{}, \vec{v} \in$ tal que $\vec{} = \alpha\vec{} - \beta\vec{v}$ y $\vec{v} = \beta\vec{} + \alpha\vec{v}$.)

6. Sea un espacio euclídeo y : $\to$ una aplicación que conserva el producto escalar, es decir,

$$(\ (\vec{}), \quad (\vec{y})) = (\vec{}, \vec{y})$$

   para todo $\vec{}, \vec{y} \in$. Demostrar que es lineal. [*geren ia*: calcular $\|\ (\vec{} + \vec{y}) - \ (\vec{}) - \ (\vec{y})\|^2$ y $\|\ (a\vec{}) - a\ (\vec{})\|^2$.)

7. Sea un espacio euclídeo y : $\to$ una aplicación. Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

   a) es una aplicación ortogonal.

   b) $(\ (\vec{}), \ (\vec{v})) = (\vec{}, \vec{v})$ para todo $\vec{}, \vec{v} \in$.

   c) $\|\ (\vec{}) - \ (\vec{v})\| = \|\vec{} - \vec{v}\|$ para todo $\vec{}, \vec{v} \in$ y $(\vec{0}) = \vec{0}$.

   Nota Las condiciones b) y c) no suponen que sea lineal. Hacer la demostración siguiendo el plan c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c). La mayor dificultad está en probar que es lineal en el paso b) $\Rightarrow$ a); para ello utilizar el ejercicio 6.)

8. Sea $= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ la matriz de en una base ortonormal dada de $\mathbb{R}^2$.

   a) Demostrar que es la simetría (ortogonal) con respecto a la recta $a + by = 0$, donde

   $$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \quad , \quad \beta = \frac{-2ab}{a^2 + b^2}.$$

   b) Encontrar la recta de simetría para $= \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$.

   c) Encontrar para la recta $y = 0$.

9. Sea $= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha$ la matriz de en una base ortonormal dada de $\mathbb{R}^2$.

   a) Demostrar que es la proyección ortogonal sobre la recta $a + by = 0$, donde $\alpha = b^2/(a^2 + b^2)$, $\beta = -ab/(a^2 + b^2)$.

   b) Si es la proyección sobre la recta $a + by = 0$ y es la simetría (ortogonal) respecto de la perpendicular a $a + by = 0$, demostrar que $= - 2$.

   c) Encontrar la recta de proyección para $= \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$.

   d) Encontrar para la recta $y = 0$.

10. Encontrar las ecuaciones de la simetría con respecto al plano $2 + y + = 0$.

11. Sean (, (,)) y (, $\langle$, $\rangle$) dos espacios euclídeos; una aplicación lineal : $\rightarrow$ se dice que es una *i ometría* si satisface:

    $$\langle (\vec{\ }), \ (\vec{v})\rangle = (\vec{\ }, \vec{v}) \quad \text{para todo } \vec{\ }, \vec{v} \in .$$

    Decidir razonadamente cuáles de las siguientes aplicaciones son isometrías:

    a) : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde (, y) = (, 0, y).

    b) : $^{(2)}_{\mathbb{R}}[\ ] \rightarrow {}^{(3)}_{\mathbb{R}}[\ ]$, donde (( )) = ( ).

    c) : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, donde (, y,) $= \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$.

    ota. Los productos escalares de los espacios anteriores son los utilizados en el ejercicio 10 de la sección 8.2.

8.7. ESTRUCTURA DE LAS APLICACIONES LINEALES NO SINGULARES

En esta sección demostraremos que toda aplicación lineal no singular, es decir, biyectiva, de un espacio euclídeo , de dimensión finita, en sí mismo es la composición de una aplicación autoadjunta y una ortonormal de . Por tanto, el estudio de las aplicaciones lineales no singulares en un espacio euclídeo queda reducido al estudio realizado en las secciones anteriores.

Teorema 8.7.1

Toda aplicación lineal no singular en un espacio euclídeo de dimensión finita es de la forma

$$= \circ$$

donde es una aplicación autoadjunta y es ortogonal.

Para demostrar este teorema necesitamos el siguiente lema:

Lema 8.7.2

Sea una aplicación lineal en un espacio euclídeo de dimensión finita; la aplicación $= {}' \circ$ es autoadjunta y los autovalores de son no negativos.

Demostración. La cadena de igualdades

$$' = ({}' \circ)' = {}' \circ ({}')' = {}' \circ =$$

muestra que es autoadjunta. Sea λ un autovalor de con autovector $\vec{}$. Debido al Teorema 8.4.7, $\lambda \in \mathbb{R}$. Además,

$$0 \leqslant ((\vec{}), (\vec{})) = (\vec{}, {}' \circ (\vec{})) = (\vec{}, (\vec{})) = (\vec{}, \lambda\vec{}) = \lambda \|\vec{}\|^2.$$

De aquí deducimos que $\lambda \geqslant 0$, ya que $\|\vec{}\| > 0$. Esto termina la demostración. ■

Demostración del Teorema .7.1. Por el Teorema 8.4.8 existe una base ortonormal U de en la cual la matriz de la aplicación autoadjunta $= {}' \circ$ es de la forma

$$( ) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con los $\lambda_i \geqslant 0$ (Lema 8.7.2). Sea la aplicación autoadjunta que tiene como matriz

$$( ) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

en la base U (observar que es autoadjunta puesto que su matriz es simétrica en la base ortonormal U).

Puesto que $[( )]^2 = ( )$ tenemos que $^2 = \circ = $; además,

$$| ( )|^2 = | ( )| = | (')| \cdot | ( )| = | ( )|^2 \neq 0$$

Por tanto, $| ( )| \neq 0$ y posee una inversa.

Para concluir la demostración del teorema tomamos

$$= \circ {}^{-1}$$

con lo cual tenemos la igualdad $= \circ$.

Solamente falta probar que es ortogonal:

$$'\circ = (\circ {}^{-1})'\circ(\circ {}^{-1}) = ({}^{-1})'\circ('\circ)\circ {}^{-1} = ({}^{-1})'\circ\circ {}^{-1} =$$
$$= ({}^{-1})\circ {}^{2}\circ {}^{-1} = .$$

■

Este teorema, junto con el Teorema 8.6.2 (teorema de clasificación de las aplicaciones ortogonales) y el Teorema 8.4.8 (diagonalización de aplicaciones autoadjuntas) nos permite interpretar geométricamente las aplicaciones lineales no singulares en un espacio euclídeo de dimensión finita: toda aplicación de este tipo se reduce a varias rotaciones alrededor de ciertos ejes, a varias simetrías alrededor de hiperplanos y a varias dilataciones (positivas) a lo largo de ejes ortogonales dos a dos.

El lector no se sentirá extrañado si decimos que el Teorema 8.7.1 tiene una interpretación para matrices reales cuadradas no singulares, es decir, de determinante no nulo. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 8.7.3

Sea $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $|\ | \neq 0$; existen dos matrices $\in$ $(n;\mathbb{R})$ y simétrica, tal que $=\ \cdot\ .$

Demostración. Considerar como una aplicación lineal en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual. Por el Teorema 8.7.1,

$$= \circ$$

con ortogonal y autoadjunta. Si denotamos por , y las matrices de las aplicaciones , y , respectivamente, en una base ortonormal dada de $\mathbb{R}^n$, se tiene el resultado deseado. ■

Se invita al lector a demostrar el Teorema 8.7.3 directamente, siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 8.7.1; de esta forma obtendrá un método para calcular las matrices y del Teorema 8.7.3. Algunos ejercicios relativos a este teorema se encuentran al final de esta sección.

EJERCICIOS 8.7

1. Dada $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $|\ | \neq 0$, demostrar sin utilizar el Teorema 8.7.3 que existen dos matrices, $\in$ $(n;\mathbb{R})$ y simétrica, tal que $=\ \cdot\ .$

2. Para las siguientes matrices, encontrar la descomposición $=\ \cdot$ del ejercicio 1.

   a) $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Dada una matriz $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, decimos que $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una *raí a ra a e* si ${}^2 = .$

   a) Demostrar que si es autoadjunta y todos sus autovalores son no negativos, siempre existe una raíz cuadrada de .

b) Encontrar una raíz cuadrada de

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.8. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ

De acuerdo con el Teorema 8.6.3 (Teorema espectral) toda matriz simétrica con elementos reales se puede descomponer como

$$= \quad ^t$$

con diagonal y ortogonal. Para obtener esta descomposición basta tomar como columnas de una base ortonormal de autovectores de y disponer en la diagonal de los autovalores de (en el Teorema 8.4.7 se demuestra que estos autovalores son reales).

Hemos visto, además, que toda matriz cuadrada con elementos reales no singular, puede descomponerse como

$$= \quad .$$

con ortogonal y simétrica (ver Teorema 8.7.3).

Enlazando estos dos resultados, cualquier matriz cuadrada con elementos reales y no singular, se puede descomponer como

$$= \quad ^t = \quad ' \quad ^t$$

con diagonal y ′ y ortogonales. La interpretación geométrica de este hecho, mencionada en la sección 8.7, es que cualquier aplicación lineal no singular en un espacio euclídeo de dimensión finita se puede reducir a una sucesión de rotaciones, simetrías y dilataciones.

En esta sección mostraremos que toda matriz con elementos reales (no necesariamente cuadrada) puede descomponerse como

$$= U\,\Sigma \quad ^t \tag{8.1}$$

con U y ortogonales y con Σ diagonal. A los elementos σ_{ii} de Σ se les llamará *valore ing lare* de .

La extensión (8.1) del Teorema espectral se conoce como *e om o i i n en valore ing lare* ( ) y resulta de gran utilidad en múltiples aplicaciones como la compresión de imágenes, la recuperación de información y diversas técnicas estadísticas, como, por ejemplo, las empleadas en el análisis de la expresión de genes.

La clave para obtener una descomposición en valores singulares de una matriz cualquiera $\in \quad _{m\times n}(\mathbb{R})$ es el hecho de que la matriz $^t \in \quad _{n\times n}(\mathbb{R})$ es simétrica y, por tanto, aplicando el Teorema 8.6.3 se puede descomponer como

$$^t = \quad ^t$$

con diagonal y ortogonal, de forma que los elementos de la diagonal de son los autovalores de ^{t}, λ_i, $i = 1, ..., n$, y las columnas de , $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, constituyen una base ortonormal de autovectores de ^{t}.

Se cumple, además, que los λ_i son no negativos ya que:

$$0 \leqslant \| \ \vec{v}_i\|^2 = (\ \vec{v}_i, \ \ \vec{v}_i) = (\vec{v}_i, \ \ ^t \ \vec{v}_i) = (\vec{v}_i, \lambda_i\vec{v}_i) =$$
$$= \lambda_i(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \lambda_i\|\vec{v}_i\|^2 = \lambda_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{8.2}$$

Reordenando los vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ si es necesario, podemos suponer que

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > \lambda_{r+1} = 0 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad , \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

Para $i = 1, ..., r$ se considera

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad , \quad \vec{} _i = \frac{1}{\sigma_i} \quad (\vec{v}_i). \tag{8.3}$$

Los σ_i así definidos se llaman *valore ing lare* de . De (8.2) se deduce

$$\| \ (\vec{v}_i)\| = \sigma_i \quad , \quad i = 1, ..., r.$$

Por tanto, los $\vec{} _i$, $i = 1, ..., r$, son unitarios. Además, son ortogonales dos a dos ya que si $\neq i$

$$(\vec{} \ , \vec{} _i) = \frac{1}{\sigma \ \sigma_i} (\ \vec{v} \ , \ \vec{v}_i) = \frac{1}{\sigma \ \sigma_i} (\vec{v} \ , \ ^t \ \vec{v}_i) = \frac{\lambda_i}{\sigma \ \sigma_i} (\vec{v} \ , \vec{v}_i) = 0$$

ya que los $\vec{v}_i$ son ortogonales dos a dos. Si fuera necesario se extienden estos r vectores ortonormales a una base $\{\vec{} _1, ..., \vec{} _r, \vec{} _{r+1}, ..., \vec{} _m\}$ ortonormal de $\mathbb{R}^m$ mediante el proceso de Gram-Schmidt (ver sección 8.2). Sea $U \in \ _{m\times m}(\mathbb{R})$ la matriz cuyas columnas son dichos vectores $\{\vec{} _1, ..., \vec{} _m\}$; se define

$$\Sigma = U^t$$

que es una matriz de tamaño $m \times n$ (igual que el tamaño de).

Sea Σ_i el elemento de la fila i y la columna de la matriz Σ. Vamos a probar que $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ y que $\Sigma_i \ = 0$ si $i \neq$. Para $> r$ como $(\vec{v}\ ) = 0 \cdot \vec{v} \ = 0$, se tiene

$$\Sigma_i \ = (\vec{} _i, \ \ \vec{v}\ ) = (\vec{} _i, \vec{0}) = 0.$$

Si $\leqslant r$, por la definición de $\vec{}$

$$\Sigma_i \ = (\vec{} _i, \ \ \vec{v}\ ) = (\vec{} _i, \sigma \vec{} \ ) = \sigma \ (\vec{} _i, \vec{} \ ) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq \\ \sigma_i & \text{si} \quad i = \end{cases}$$

ya que los vectores $\vec{} _i$, $i = 1, ..., r$, son ortonormales.

Por tanto

$$= U\Sigma \ ^t,$$

que se llama *e om o i i n en valore ing lare* de .

El razonamiento anterior prueba el siguiente resultado.

Teorema 8.8.1

Dada $\in \ _{m\times n}(\mathbb{R})$, existen matrices ortogonales $U \in \ _{m\times m}(\mathbb{R})$, $\in \ _{n\times n}(\mathbb{R})$, y existe una $\Sigma \in \ _{m\times n}(\mathbb{R})$ cuyos elementos diagonales son los valores singulares de , y el resto nulos, tales que

$$= U\Sigma \ ^t. \tag{8.4}$$

EJEMPLO A. Vamos a hallar la descomposición en valores singulares de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

que es una matriz simétrica de orden 3. El polinomio característico de ^{t} es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-1] - (1-\lambda) =$$
$$= (1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

y, por tanto, los autovalores de ^{t} son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$; luego, los valores singulares de son

$$\sigma_1 = \sqrt{3} \quad , \quad \sigma_2 = 1.$$

Buscamos ahora autovectores ortonormales de ^{t}.

Para $\lambda_1 = 3$, Ker(^{t} $-$ 3) es

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2 & - & = 0 \\ -2y & - & = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} & = - & /2 \\ y & = - & /2 \end{Bmatrix}.$$

Tomando $\vec{v}_1 = (1,\ 1,\ -2)$, un autovector unitario es

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ -2).$$

Para $\lambda_2 = 1$, Ker(^{t} $-$) es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} & & = 0 \\ - & - y & = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} & = 0 \\ & = -y \end{Bmatrix}.$$

Tomando $\vec{v}_2 = (1,\ -1,\ 0)$, un autovector unitario es

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1,\ 0).$$

Observar que, como debe ser, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales.

Para $\lambda_3 = 0$, Ker(^{t}) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} & - & = 0 \\ y & - & = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} & = & \\ y & = & \end{Bmatrix}.$$

Tomando $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$, un autovector unitario es

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Observar que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son ortogonales entre sí.

Tenemos

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Utilizamos la definición (8.3) para construir los vectores $^{-}_1$ y $^{-}_2$. Como

$$(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y $\sigma_1 = \sqrt{3}$ se tiene

$$^{-}_1 = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{3}}(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Como

$$(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\sigma_2 = 1$ se tiene

$$^{-}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Luego la matriz U, que tiene por columnas los vectores $^{-}_1$ y $^{-}_2$, es

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz Σ de tamaño 3×2 es

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $\sqrt{3}$, 1 son los valores singulares de . Una descomposición de como en el Teorema 8.8.1 es

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

* * *

Nota 1. Considerar $\Sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ es

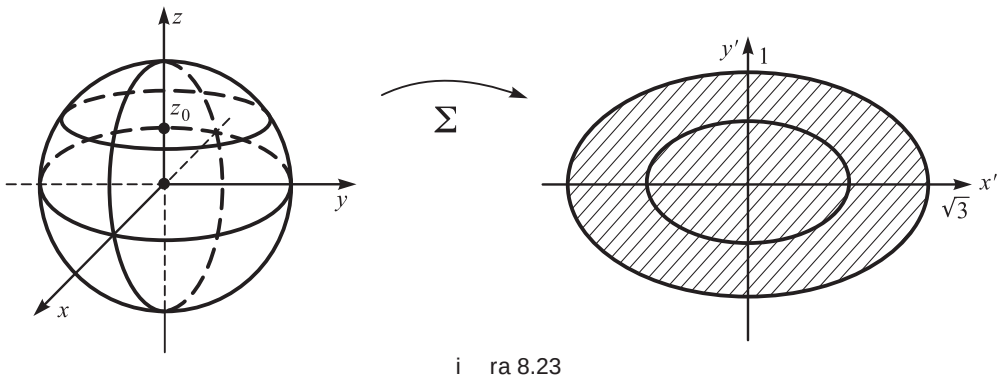
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que coincide con la matriz de los valores singulares de la matriz del ejemplo A de esta sección. Hallemos la imagen de la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $^2 + y^2 + ^2 = 1$.

Como

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ' \\ y' \end{pmatrix}$$

Si $= 0$ se tiene $1 = ^2 + y^2 = \dfrac{(\sqrt{3}\ )^2}{3} + y^2 = \dfrac{(\ ')^2}{3} + (y')^2$, que es la ecuación de una elipse de semiejes $\sqrt{3}$ y 1. Para $= {}_0$, $-1 \leqslant {}_0 \leqslant 1$, $\dfrac{(\ ')^2}{3} + (y')^2 = \dfrac{(\sqrt{3}\ )^2}{3} + y^2 = ^2 + y^2 = 1 - {}^2_0$ es una elipse de semiejes $\sqrt{3}\sqrt{1 - {}^2_0}$ y $\sqrt{1 - {}^2_0}$, por lo que la imagen de la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ es el interior de la elipse $\dfrac{(\ ')^2}{3} + (y')^2 = 1$ (ver figura 8.23).



i ra 8.23

Observar que los semiejes de la elipse son los valores singulares de . Por tanto, salvo las simetrías y rotaciones dadas en (8.5), la interpretación geométrica de Σ sobre la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ es la ilustrada en la figura 8.23.

De manera similar, usando la descomposición (8.4) del Teorema 8.8.1, puede decirse que, salvo rotaciones y simetrías en los espacios inicial y final, la aplicación que tiene como matriz actúa sobre la esfera unidad de $\mathbb{R}^m$ produciendo elipsoides con o sin su interior cuyos semiejes son los valores singulares de .

EJEMPLO B. Queremos hallar la descomposición en valores singulares de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix},$$

que es una matriz simétrica de orden 2. Su polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 1 \\ 1 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 20\lambda + 99 = (\lambda - 11)(\lambda - 9)$$

y, por tanto, sus autovalores son $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 9$. Luego los valores singulares de son

$$\sigma_1 = \sqrt{11} \quad , \quad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3.$$

Busquemos ahora autovectores ortonormales de ^{t}.

Para $\lambda_1 = 11$, Ker($^t - 11$) es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad - \quad + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad = y,$$

por lo que podemos tomar $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Para $\lambda_2 = 9$, Ker($^t - 9$) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad = -y,$$

por lo que podemos tomar $\vec{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

Con la fórmula (8.3) construimos los vectores $\vec{}_1$ y $\vec{}_2$:

$$\vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{}_2 = \frac{1}{3} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

El tercer vector $\vec{}_3$ hay que calcularlo de manera que sea ortonormal a $\vec{}_1$ y a $\vec{}_2$, según el procedimiento de Gram-Schmidt (sección 8.2). El lector puede comprobar que una posible elección es

$$\vec{}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \ , \ \frac{-3}{\sqrt{11}} \ , \ \frac{1}{\sqrt{11}} \right).$$

Por tanto, una descomposición en valores singulares de es

$$= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nota 2. Sea $\in {}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con una descomposición en valores singulares $= U\Sigma\ {}^t$ como en (8.4). Puesto que el rango de una aplicación no depende de la base elegida para representarla (ver la observación que precede al Corolario 5.4.3) el rango de la matriz coincide con el rango de la matriz Σ. El rango de esta matriz Σ es el número r de valores singulares no nulos (contando su multiplicidad).

Este hecho se utiliza en la práctica para calcular el rango de una matriz mediante ordenador, en lugar de contar el número de escalones de una forma escalonada de ya que, con frecuencia, los errores de redondeo pueden producir una forma escalonada con rango máximo a partir de una matriz con rango menor.

El cálculo de una descomposición en valores singulares de una matriz no es sencillo para matrices de tamaño mediano o grande. Los programas Maple©, Matlab© y Mathematica© incorporan funciones para calcular esta descomposición.

* * *

Veamos a continuación cómo la descomposición en valores singulares puede ser útil en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\vec{} = \vec{b} \quad \text{con} \quad \in {}_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad , \quad \vec{} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \tag{8.6}$$

y supongamos que no tiene solución. Es frecuente que esto ocurra cuando $m > n$, es decir, cuando hay más ecuaciones que incógnitas.

Si bien el sistema de ecuaciones lineales (8.6) no tiene solución (es decir $\vec{b} \notin \text{Im}$), en algunas aplicaciones es conveniente encontrar $\vec{}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que este vector minimice el tamaño del error $\vec{} - \vec{b}$. Esto equivale a hallar $\vec{}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\| \vec{}_0 - \vec{b}\| = \min\{\| \vec{} - \vec{b}\| : \vec{} \in \mathbb{R}^n\} \tag{8.7}$$

considerando en $\mathbb{R}^n$ la norma euclídea.

De acuerdo con el Lema 8.3.3 para $= \text{Im}$, esto se consigue si $\vec{}_0$ satisface que $\vec{}_0 - \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{}$ para todo $\vec{} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\vec{} \in \mathbb{R}^n$

$$0 = (\ \vec{},\ \vec{}_0 - \vec{b}) = (\vec{},\ {}^t(\ \vec{}_0 - \vec{b})),$$

de donde se deduce que ${}^t(\ \vec{}_0 - \vec{b}) = \vec{0}$. Por tanto, $\vec{}_0$ es una solución de

$${}^t\ \vec{} = \ {}^t\vec{b}. \tag{8.8}$$

Si ^{t} es invertible se tiene

$$\vec{}_0 = (\ {}^t\ )^{-1}\ {}^t\vec{b}.$$

Se dice, entonces, que $\vec{x}_0$ resuelve el problema de *mínimo cuadrático* descrito en (8.7) (observar que minimizar $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ equivale a minimizar $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$, que es una suma de cuadrados para la norma euclídea).

Además,

$$A^+ = (A^t A)^{-1} A^t$$

recibe el nombre de *pseudoinversa* de A. En general, se denomina matriz pseudoinversa de A a la que resuelve el problema de mínimos cuadrados planteado en (8.7), siendo $\vec{x}_0 = A^+\vec{b}$.

EJEMPLO C. Queremos hallar la solución por mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ -y &= 0 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y $A^t A$ es invertible con

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

la solución por mínimos cuadrados es

$$\vec{x}_0 = A^+\vec{b} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando la matriz $A^t A$ no es invertible una solución del problema (8.7) puede obtenerse usando la descomposición en valores singulares de A. Usemos el Teorema 8.8.1 para escribir

$$A = U\Sigma V^t$$

con U, V ortogonales, y Σ del mismo tamaño que A con los valores singulares σ_i de A en la diagonal. Observar que no todos los σ_i son no nulos ya que $A^t A$ no es invertible.

Lema 8.8.2

Sea Σ^+ la matriz de tamaño $m \times n$ cuyos elementos diagonales son $1/\sigma_i$, los inversos de los valores singulares no nulos de A. Sea $A^+ = V\Sigma^+ U^t$, con U y V como en el Teorema 8.8.1. Entonces $\vec{x}^+ = A^+\vec{b}$ es una solución del problema planteado en (8.7).

Demostración. Como U, son ortogonales $\|U\vec{\ }\| = \|\vec{\ }\|$ y $\|\ \ \vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ para todo $\vec{\ } \in \mathbb{R}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|\ \ \vec{\ } - \vec{b}\| = \|U\Sigma\ \ ^{t}\vec{\ } - \vec{b}\| = \|U\Sigma\ \ ^{t}\vec{\ } - UU^t b\| = \|\Sigma\ \ ^{t}\vec{\ } - U^t b\|$$

ya que $UU^t =$ por ser U ortogonal. Denotando por $\vec{y} =\ \ ^{t}\vec{\ } =\ \ ^{-1}\vec{\ }$ se tiene que $\|\vec{y}\| = \|\ \ ^{t}\vec{\ }\| = \|\vec{\ }\|$. Por tanto, minimizar $\|\ \ \vec{\ } - \vec{b}\|$ es equivalente a minimizar

$$\|\Sigma\vec{y} - U^t\vec{b}\|.$$

Escribamos

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)_{m\times n}$$

y $U^t\vec{b} = (\ _1, ..., \ _m)$. Entonces

$$\|\Sigma\vec{y} - U^t\vec{b}\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i y_i - \ _i)^2 + \sum_{=r+1}^{m} \ ^2,$$

por lo que la expresión $\|\Sigma\vec{y} - U^t\vec{b}\|$ se minimiza cuando $y_i = \dfrac{1}{\sigma_i}\ _i$, $i = 1, ..., r$, pudiendo tomar cualquier valor para y, $= r + 1, ..., m$. Por tanto, un $\vec{y}$ que minimiza la expresión $\|\Sigma\vec{y} - U^t\vec{b}\|$ es $\Sigma^+ U^t\vec{b}$; luego un $\vec{\ }$ que minimiza (8.7) es

$$^{+}\vec{\ } =\ \ \vec{y} =\ \ \Sigma^+ U^t\vec{b} =\ \ ^{+}\vec{b}$$

como queríamos demostrar. ■

Nota . Observar que cuando ^{t} no es invertible, la solución del problema de mínimos cuadrados planteado en (8.7) no es única.

Ejemplo D. Tratemos de hallar una solución por mínimos cuadrados de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$^{t}\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que no es invertible. Sus autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Es fácil comprobar que

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{v}_2 = (0, 1, 0)$$

es base de Ker($^t - 2$) y

$$\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$$

es base de Ker(^{t}). Además

$$^{\rightarrow}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\vec{v}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^{\rightarrow}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y podemos tomar $^{\rightarrow}_3 = (0, 0, 1)$. Se tiene

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $^+ = \Sigma^+ U^t$ es

$$^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$^{\rightarrow +} = \quad ^+\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución del problema de mínimos cuadrados.

Como

$$^{\rightarrow +} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es el vector de la forma $^{\rightarrow}, ^{\rightarrow} \in \mathbb{R}^3$, más cercano a $\vec{b}$, cualquier vector de la forma $^{\rightarrow +} + ^{\rightarrow}$ con $^{\rightarrow} \in$ Ker( ) satisface

$$(^{\rightarrow +} + ^{\rightarrow}) = \quad ^{\rightarrow +} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto es solución del problema de mínimos cuadrados planteado en (8.7). En este caso $^{\rightarrow} = t(0, 0, 1)$, por lo que $^{\rightarrow} = (0, 1, 0) + t(0, 0, 1) = (0, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$, son las soluciones de (8.7).

* * *

Nota . La descomposición en valores singulares $= U\Sigma\ ^t$ del Teorema 8.8.1 permite escribir como una suma de matrices de rango 1, de la forma

$$= \sigma_1 \vec{}_1 \vec{v}_1^t + \sigma_2 \vec{}_2 \vec{v}_2^t + \cdots + \sigma_r \vec{}_r \vec{v}_r^t$$

donde $\vec{}_i$, $\vec{v}_i$, $i = 1, ..., r$, son las r primeras columnas de U y respectivamente y los σ_i, $i = 1, ..., r$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r$, son los valores singulares de .

Entonces, una posible aproximación de por matrices del mismo tamaño y rango con $0 \leqslant \leqslant r$ es la matriz

$$= \sigma_1 \vec{}_1 \vec{v}_1^t + \cdots + \sigma \vec{} \vec{v}^t.$$

Nota . La descomposición de una matriz en valores singulares tiene aplicación en los campos de compresión de imágenes digitales, recuperación de información e indexación semántica latente.

Las imágenes pueden representarse con matrices de números enteros que se mueven en una escala que refleja, por ejemplo, una escala de grises. Las diversas aproximaciones de la matriz descritas en la Nota 4, con $< r =$ rango de , nos permiten obtener imágenes digitales comprimidas de , que visualmente son una aproximación de la imagen original.

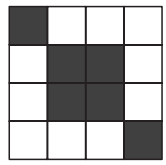
Para más información consultar el artículo «La descomposición en valores singulares» (SVD) y algunas de sus aplicaciones, J. J. Martínez Fernández de las Heras, *La Ga eta e la* , Vol. 8.3 (2005), págs. 795-810.

EJERCICIOS 8.8

1. Hallar la descomposición en valores singulares de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Con la notación 1 = Negro, 0 = Blanco, la imagen



puede representarse matricialmente por

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y calcular las matrices U y de su descomposición en valores singulares. Considerar

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular $_2 = U\Sigma_2 \ ^t$ y $_1 = U\Sigma_1 \ ^t$ dibujando en cada caso la imagen que representan.

3. Sea $\in \ _{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de rango r y denotemos por $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal con matriz en bases fijadas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Sea $= U\Sigma \ ^t$ la descomposición de en valores singulares según el Teorema 8.8.1. Sean $\{\vec{}_1, ..., \vec{}_m\}$ las columnas de U, $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ las columnas de y $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r$ los valores singulares de .

   a) Demostrar que $\{\vec{}_1, ..., \vec{}_r\}$ es una base ortonormal de Im( ).

   b) Demostrar que $\{\vec{}_{r+1}, ..., \vec{}_m\}$ es una base ortonormal de Ker(^{t}).

   c) Demostrar que $\{\vec{v}_{r+1}, ..., \vec{v}_n\}$ es una base ortonormal de Ker( ).

   d) Demostrar que $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r\}$ es una base ortonormal de Im(^{t}).

4. Se sabe que la descomposición en valores singulares de una matriz es

$$= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{22} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   Usar el ejercicio 3 para probar que la aplicación lineal $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz es en las bases canónicas es inyectiva y hallar bases ortonormales de Ker(^{t}), Im( ) e Im(^{t}).

5. **a)** Hallar una solución por mínimos cuadrados de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   b) Hallar una solución por mínimos cuadrados del sistema incompatible

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Dada la matriz

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hallar todos los vectores $\vec{} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\| \vec{} - \vec{b} \|$ sea lo menor posible con $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. a) Dada la matriz $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar la «mejor» solución $\vec{}_0$ del sistema $\vec{} = \vec{b}$ con $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, en el sentido de mínimos cuadrados, usando una descomposición en valores singulares de .

b) Generalizar el resultado del apartado anterior al caso $= \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ \end{pmatrix}$ con $a, \ , \in \mathbb{R}$.

Biografía

uclides vivió alrededor del año 300 antes de Cristo, pero no se conocen ni la fecha ni el lugar exactos de su nacimiento. De su vida solo se conoce que enseñó y fundó una escuela en Alejandría en la época de Ptolomeo I que reinó desde el año 323 hasta el año 285 antes de Cristo, aproximadamente.

Euclides es el matemático más prominente de la antigüedad, conocido por su libro *Lo ele mento* . Este libro ejerció una influencia enorme en el pensamiento matemático hasta el siglo XIX, en el que nuevas formas de geometría no euclídea fueron introducidas. Parte de *Lo ele mento* es una recopilación de trabajos de otros matemáticos puestos por primera vez juntos mediante un razonamiento lógico.

Capítulo 9

Espacios hermíticos.

9.1. Producto hermítico.

9.2. Aplicaciones entre espacios hermíticos.

9.1. PRODUCTO HERMÍTICO

En el capítulo anterior hemos introducido la noción de *ro to e alar* en un espacio vectorial *real*, obteniendo así los espacios euclídeos, en los cuales se pueden definir las nociones de longitud de un vector y de ortogonalidad de dos vectores. En este capítulo dotaremos a los espacios vectoriales *om le o* de una estructura adecuada para poder definir las nociones de longitud de un vector y de ortogonalidad de dos vectores en un espacio vectorial complejo. El nuevo concepto que introduciremos en un espacio vectorial complejo recibirá el nombre de *ro to er míti o* y los nuevos espacios así obtenidos se llamarán *e a io ermíti o* .

Advertimos al lector que muchos de los resultados en espacios hermíticos son similares a los resultados en espacios euclídeos y que las demostraciones de aquellos son similares a las de estos. Debido a esto, muchas de las demostraciones serán omitidas en este capítulo.

Definición 9.1.1 (Producto erm tico)

Sea un espacio vectorial complejo. Una aplicación (,): × → ℂ se dice que es un *ro to ermíti o* si satisface las siguientes propiedades:

a) $(\vec{\ }, \vec{\ }) = \overline{(\vec{\ }, \vec{\ })}$ para todo $\vec{\ }, \vec{\ } \in$.
b) $(\vec{\ }, \vec{\ } + \vec{v}) = (\vec{\ }, \vec{\ }) + (\vec{\ }, \vec{v})$ para todo $\vec{\ }, \vec{\ }, \vec{v} \in$.
c) $(\lambda\vec{\ }, \vec{\ }) = \lambda(\vec{\ }, \vec{\ })$ para todo $\vec{\ }, \vec{\ } \in$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.
d) $(\vec{\ }, \vec{\ }) > 0$ para todo $\vec{\ } \neq \vec{0}$ y $(\vec{\ }, \vec{\ }) = 0 \Leftrightarrow \vec{\ } = \vec{0}$.

Nota. Recordemos que si $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, es un número complejo, $\bar{\lambda} = a - ib$ recibe el nombre de *on ga o* de λ. Además, a se denomina la *arte real e* λ y se designa por $\mathrm{Re}(\lambda)$, y b se denomina la *arte imaginaria e* λ, y se designa por $\mathrm{Im}(\lambda)$. Se cumple que,

$$\lambda\bar{\lambda} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\lambda|^2,$$

donde $|\lambda|$ se utiliza para representar el módulo de λ.

De las propiedades b) y a) del producto hermítico se deduce

b′) $(\vec{\ } + \vec{\ }, \vec{v}) = (\vec{\ }, \vec{v}) + (\vec{\ }, \vec{v})$ para todo $\vec{\ }, \vec{\ }, \vec{v} \in$.

De las propiedades c) y a) del producto hermítico se deduce:

c′) $(\vec{\ }, \lambda\vec{\ }) = \overline{(\lambda\vec{\ }, \vec{\ })} = \overline{\lambda(\vec{\ }, \vec{\ })} = \bar{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ })$,

para todo $\vec{\ }, \vec{\ } \in$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Observar que esta propiedad es diferente de la correspondiente para el producto escalar.

Sean $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n, \vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n \in$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{C}$; combinando las propiedades b) y c) junto con b′) y c′) se deduce:

$$\left(\sum_{=1}^{n} \alpha\vec{\ }, \sum_{=1}^{m} \beta\vec{\ } \right) = \sum_{=1}^{n} \sum_{=1}^{m} \alpha\bar{\beta}\,(\vec{\ }, \vec{\ }). \tag{1.1}$$

* * *

Definición 9.1.2 (spacio erm tico)

Un espacio vectorial complejo dotado de un producto hermítico recibe el nombre de *e a io ermíti o*.

Un ejemplo de espacio hermítico es $\mathbb{C}^n$ con el producto hermítico dado por

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \ _1\bar{\ }_1 + \ _2\bar{\ }_2 + \cdots + \ _n\bar{\ }_n$$

donde $\vec{\ } = (\ _1, \ _2, ..., \ _n)$ y $\vec{\ } = (\ _1, \ _2, ..., \ _n)$, que se llamará *ro to ermíti o al*.

Otro ejemplo de espacio hermítico es el conjunto $\ _{\mathbb{C}}([a, b])$ de las funciones continuas con valores complejos definidas en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con el producto hermítico dado por

$$(\ , g) = \int_a^b \ ( )\overline{g( )}$$

para toda $\ , g \in \ _{\mathbb{C}}([a, b])$. En particular, los conjuntos $\ _{\mathbb{C}}([a, b])$ de todos los polinomios con coeficientes complejos definidos en el intervalo $[a, b]$ y $\ ^{(n)}_{\mathbb{C}}([a, b])$ de todos los polinomios del conjunto anterior de grado no superior a n son espacios hermíticos con el mismo producto hermítico que el definido en $\ _{\mathbb{C}}([a, b])$.

La comprobación de las afirmaciones anteriores se deja como ejercicio.

Supongamos que el espacio hermítico es de dimensión finita n, es decir, el espacio vectorial complejo tiene dimensión n, y sea $= \{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n\}$ una base de . Si $\vec{\ }, \vec{\ } \in$ podemos escribir

$$\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{\ }_i, \quad \vec{\ } = \sum_{=1}^{n} \ \vec{\ }$$

con $\ _i, \ _i \in \mathbb{C}$ para todo $i = 1, ..., n$.

Utilizando (1.1) se tiene el siguiente resultado:

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \left(\sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{\ }_i, \sum_{=1}^{n} \ \vec{\ }\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{=1}^{n} \ _i\bar{\ }(\vec{\ }_i, \vec{\ }). \tag{1.2}$$

La matriz

$$= \begin{pmatrix} (\vec{\ }_1, \vec{\ }_1) & (\vec{\ }_1, \vec{\ }_2) & \cdots & (\vec{\ }_1, \vec{\ }_n) \\ (\vec{\ }_2, \vec{\ }_1) & (\vec{\ }_2, \vec{\ }_2) & \cdots & (\vec{\ }_2, \vec{\ }_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\vec{\ }_n, \vec{\ }_1) & (\vec{\ }_n, \vec{\ }_2) & \cdots & (\vec{\ }_n, \vec{\ }_n) \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de *matri el ro to ermíti o on re e to a la ba e e* . Con esta notación la igualdad (1.2) puede escribirse de la forma

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = (\ _1, ..., \ _n) \begin{pmatrix} \bar{\ }_1 \\ \vdots \\ \bar{\ }_n \end{pmatrix}.$$

Debido a la propiedad a) del producto hermítico $(\bar{\ }_i, \bar{\ }) = \overline{(\bar{\ }, \bar{\ }_i)}$ para todo $i \neq$, luego la matriz no es, en general, simétrica, como ocurría en el producto escalar.

Dada una matriz $= (a_i)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ =1,\ldots,m}}$ con $a_i \in \mathbb{C}$, se denomina *on ga a e* a la matriz $\bar{} = (\overline{a_i})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ =1,\ldots,m}}$, que se obtiene hallando el conjugado de cada uno de los elementos de .

Una matriz cuadrada $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ se dice *im tri a on ga a* o *ermíti a* si

$$\bar{}^t = \ ,$$

donde $\bar{}^t$ representa la matriz traspuesta de $\bar{}$.

Si es simétrica conjugada, $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ para todo $i = 1, ..., n$; puesto que un número complejo es igual a su conjugado si y solo si este número es real, deducimos que los elementos de la diagonal principal de una matriz simétrica-conjugada son números reales. Además, $a_i = \overline{a}_i$, $i \neq$, y, por tanto, los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal son conjugados entre sí. Así pues,

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad a_{ii} \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO A. La matriz $= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica conjugada.

Nota. El lector habrá quedado convencido de que la matriz del producto hermítico con respecto a una base es siempre una matriz simétrica conjugada.

* * *

En un espacio hermítico la *longit* o *norma* de un vector $\bar{} \in$ se define mediante

$$\|\bar{}\| = \sqrt{(\bar{}, \bar{})}$$

que es un número real no negativo. Observar que la definición tiene sentido ya que $(\bar{}, \bar{}) \geqslant 0$ debido a la propiedad d) del producto hermítico. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\bar{} \in$ se tiene la igualdad:

$$\|\lambda\bar{}\| = \sqrt{(\lambda\bar{}, \ \lambda\bar{})} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(\bar{}, \bar{})} = \sqrt{|\lambda|^2(\bar{}, \bar{})} = |\lambda| \, \|\bar{}\|.$$

Un vector de norma 1 se dice *nitario*. Todo vector no nulo $\bar{} \in$ puede ser *normali a o*, es decir, multiplicado por un número complejo λ de manera que $\lambda\bar{}$ sea unitario: basta tomar

$$\lambda = \frac{1}{\|\bar{}\|}.$$

En un espacio hermítico se cumple también la *e ig al a e ar* :

$$|(\bar{}, \bar{})| \leqslant \|\bar{}\| \, \|\bar{}\|, \quad \bar{}, \bar{} \in \ .$$

La demostración es similar a la del caso euclídeo, excepto que debe tenerse cuidado en las operaciones con números complejos (para el caso euclídeo ver la Proposición 8.1.2). La demostración procede de la siguiente manera: si $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$0 \leqslant (\vec{\ } + \lambda\vec{\ }, \vec{\ } + \lambda\vec{\ }) = \|\vec{\ }\|^2 + \bar{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ }) + \lambda(\vec{\ }, \vec{\ }) + |\lambda|^2\|\vec{\ }\|^2;$$

los números $\lambda(\vec{\ }, \vec{\ })$ y $\bar{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ })$ son conjugados, ya que $\bar{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ }) = \overline{\bar{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ })} = \overline{\lambda(\vec{\ }, \vec{\ })}$ y, por tanto, su suma coincide con el doble de la parte real de $\lambda(\vec{\ }, \vec{\ })$; tenemos, pues,

$$0 \leqslant \|\vec{\ }\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda(\vec{\ }, \vec{\ })) + \|\vec{\ }\|^2|\lambda|^2.$$

Puesto que la parte real de todo número complejo nunca supera a su módulo tenemos la desigualdad

$$0 \leqslant \|\vec{\ }\|^2|\lambda|^2 + 2|\lambda||(\vec{\ }, \vec{\ })| + \|\vec{\ }\|^2.$$

Esta ecuación cuadrática en $|\lambda| \in \mathbb{R}$ no puede tener raíces reales distintas (el razonamiento es el mismo que en el caso euclídeo) y, por tanto, su discriminante ha de ser negativo o nulo:

$$|(\vec{\ }, \vec{\ })|^2 - \|\vec{\ }\|^2\|\vec{\ }\|^2 \leqslant 0$$

de donde deducimos el resultado deseado.

A partir de la desigualdad de Schwarz pueden demostrarse las *e ig al a e triang lare* siguientes:

$$\|\vec{\ } + \vec{\ }\| \leqslant \|\vec{\ }\| + \|\vec{\ }\| \text{ y también } |\|\vec{\ }\| - \|\vec{\ }\|| \leqslant \|\vec{\ } - \vec{\ }\|.$$

A pesar de que no puede definirse el concepto de ángulo en un espacio hermítico (¿por qué?), podemos dar la noción de *ortogonali a* : $\vec{\ } \in$ es *ortogonal* a $\vec{\ } \in$ si

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = 0.$$

Podemos definir, por tanto, el *om lemento ortogonal* $^{\perp}$, de un subespacio vectorial de :

$$^{\perp} = \{\vec{\ } \in \ : (\vec{\ }, \vec{\ }) = 0 \text{ para todo } \vec{\ } \in \ \}.$$

En un espacio hermítico el teorema de Pitágoras es también cierto: si $\vec{\ }$ es ortogonal a $\vec{\ }$,

$$\|\vec{\ } + \vec{\ }\|^2 = \|\vec{\ }\|^2 + \|\vec{\ }\|^2.$$

En los espacios hermíticos puede realizarse el *ro e o e ortogonali a i n* de un conjunto de vectores linealmente independientes (ver Teorema 8.2.1); el proceso es exactamente igual que en los espacios euclídeos, por lo cual se omite aquí. En particular, todo espacio hermítico de dimensión finita posee una *ba e ortonormal*, es decir, una base formada por vectores unitarios mutuamente ortogonales.

EJEMPLO B. Queremos aplicar el proceso de ortogonalización a los vectores $\vec{\ }_1 = (i, 0, 0)$, $\vec{\ }_2 = (0, i, 1)$ y $\vec{\ }_3 = (1, 0, 1)$ del espacio hermítico $\mathbb{C}^3$ con el producto hermítico usual. Tomamos $\vec{e}_1 = \vec{\ }_1$ y $\vec{e}_2 = \vec{\ }_2 + \lambda\vec{e}_1$, con $\lambda \in \mathbb{C}$; calculamos λ imponiendo la condición $(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0$:

$$0 = (\vec{e}_2, \vec{e}_1) = (\vec{\ }_2, \vec{e}_1) + \lambda(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0 + \lambda \cdot 1.$$

Por tanto, $\vec{e}_2 = \vec{\ }_2$. Finalmente, tomamos

$$\vec{e}_3 = \vec{\ }_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

y calculamos α y β con las condiciones $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$ y $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$.

$$0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{\ }_3) + \bar{\alpha}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = i + \bar{\alpha} \cdot 1$$
$$0 = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{\ }_3) + \bar{\beta}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 + \bar{\beta}(1 + 1).$$

Por tanto, $\bar{\alpha} = -i$ o, equivalentemente, $\alpha = i$, y $\bar{\beta} = -1/2$ o, equivalentemente, $\beta = -1/2$. El tercer vector es

$$\vec{e}_3 = \vec{\ }_3 + i\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 = (1, 0, 1) + (-1, 0, 0) - \frac{1}{2}(0, i, 1) = (0, -i/2, 1/2).$$

9.2. APLICACIONES ENTRE ESPACIOS HERMÍTICOS

En esta sección estudiaremos algunos tipos particulares de aplicaciones de un espacio hermítico en sí mismo, así como la diagonalización (compleja) de algunos de estos tipos.

Dado un espacio hermítico y una aplicación $\in L(\ )$, se denomina *a nta e* , y la llamaremos , a toda aplicación lineal que satisface

$$(\ (\vec{\ }), \vec{\ }) = (\vec{\ }, \ (\vec{\ \ })) \quad , \quad \vec{\ }, \vec{\ } \in \ .$$

Si el espacio hermítico es de dimensión finita, lo cual siempre se supondrá cierto de aquí en adelante, la existencia y unicidad de la aplicación adjunta de se demuestran como en el caso de espacios euclídeos (ver sección 8.4). Es conveniente demostrar la existencia para encontrar la relación que existe entre las matrices de y en una base ortonormal de .

Sea $= (a_i)$ la matriz de $\in L(\ )$ en una base ortonormal $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$; por tanto,

$$(\vec{e}\ ) = \sum_{=1}^{n} a \ \vec{e} \ .$$

Si $= (\ _i)$ es la matriz de $\in L(\ )$ se tiene que

$$(\vec{e}_i) = \sum_{=1}^{n} \ _i\vec{e} \ .$$

Por tanto,

$$a_i = \left(\sum_{=1}^{n} a \ \vec{e} \ , \vec{e}_i \right) = (\ (\vec{e}\ ), \vec{e}_i) = (\vec{e} \ , \ (\vec{e}_i)) =$$
$$= \left(\vec{e} \ , \ \sum_{=1}^{n} \ _i\vec{e} \ \right) = \overline{\ }_i.$$

Hemos llegado a la conclusión de que la matriz de en la base ortonormal es la *on ga a tra e ta* de , es decir, $\bar{\ }^t$. Esta matriz se suele denominar también *a nta* de y se denota con el símbolo .

Las propiedades de la aplicación adjunta son las mismas que las dadas en la sección 8.4 para la aplicación adjunta en espacios euclídeos.

* * *

Sea $\in L(\ )$; la aplicación se dice *a toa nta* si $=$. Por tanto, si es autoadjunta en , la matriz de en una base ortonormal ha de satisfacer

$$= \ ^{-t},$$

es decir, debe ser una matriz *im tri a on ga a*; a estas matrices se les da también el nombre de *ermíti a* .

* * *

Las aplicaciones de un espacio hermítico en sí mismo que conservan el producto hermítico reciben el nombre de *nitaria* . Por tanto, $\in L(\ )$ es *nitaria* si y solo si

$$(\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{\ \ })) = (\vec{\ }, \vec{\ \ }) \quad , \quad \vec{\ }, \vec{\ \ } \in \ .$$

Si es unitaria se ha de tener

$$(\vec{\ }, \ \circ \ (\vec{\ \ })) = (\vec{\ }, \vec{\ \ })$$

para todo $\vec{\ }, \vec{\ \ } \in$, y por tanto, $\circ \ =$.

Si y representan las matrices de y en una base ortonormal de , la igualdad anterior se escribe de la forma

$$. \ =$$

o, equivalentemente,

$$^{-1} = \ = \ ^{-t}.$$

Las matrices que satisfacen una cualquiera de las dos desigualdades anteriores reciben el nombre de *matri e nitaria* . El conjunto de todas las matrices unitarias de orden n se denota por $U(n)$ y, por tanto,

$$U(n) = \{ \ \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}): \ ^{-t} \cdot \ = \ \}.$$

Puesto que la composición de aplicaciones unitarias es otra aplicación unitaria y la inversa de una aplicación unitaria siempre existe y es una aplicación unitaria, el conjunto $U(n)$ es un *gr o* con respecto a la multiplicación de matrices que se llama *gr o nitario*. Se invita al lector a comprobar con detalle este resultado.

Lo a tovalore e na a li a i n nitaria eben er n mero om le o e m lo 1 *y lo a tovalore e na a li a i n a toa nta eben er reale* . En efecto, si $\in L(\ )$ es una aplicación unitaria y λ es un autovalor de con autovector $\vec{\ } \in$, se tiene

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = (\ (\vec{\ }),\ \ (\vec{\ })) = (\lambda\vec{\ }, \lambda\vec{\ }) = \lambda\bar{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ }) = |\lambda|^2\|\vec{\ }\|^2$$

de donde resulta $|\lambda| = 1$.

Si $\in L(\ )$ es una aplicación autoadjunta y λ un autovalor de con autovector $\vec{\ } \in$, se tiene

$$\lambda\|\vec{\ }\|^2 = \lambda(\vec{\ }, \vec{\ }) = (\lambda\vec{\ }, \vec{\ }) = (\ (\vec{\ }), \vec{\ }) = (\vec{\ }, \ (\vec{\ })) = (\vec{\ }, \lambda\vec{\ }) = \overline{\lambda}\|\vec{\ }\|^2, \tag{2.1}$$

de donde resulta que $\lambda = \overline{\lambda}$ y, por tanto, $\lambda \in \mathbb{R}$.

* * *

A continuación nos dedicaremos a demostrar que tanto las aplicaciones autoadjuntas como las aplicaciones unitarias en espacios hermíticos pueden diagonalizarse. (Comparar este resultado con los resultados análogos para aplicaciones autoadjuntas y aplicaciones ortogonales en espacios euclídeos obtenidos en las secciones 8.4 y 8.6).

Nuestra forma de proceder es demostrar que una clase de aplicaciones, que definiremos a continuación, y que engloba a las anteriores, es diagonalizable.

Una aplicación lineal $\in L(\ )$ se dice *normal* si conmuta con su adjunta, es decir,

$$\circ \ = \ \circ \ .$$

EJEMPLO A.

1. Si es autoadjunta, es normal, ya que $\circ = \circ = \circ$.
2. Si es unitaria, es normal, ya que $\circ = {}^{-1}\circ = $ y $\circ = \circ\ {}^{-1} = $.
3. La aplicación cuya matriz es

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}$$

en una base ortonormal, es también normal ya que

$$\cdot \ = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & |\lambda_2|^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = \ \cdot \ .$$

Para reducir una aplicación normal a su forma más sencilla es necesario tener conocimiento de sus posibles autovalores y de sus subespacios invariantes.

Proposición 9.2.1

Sea $\in L(\ )$ una aplicación normal. Todo autovector $\vec{\ } \in$ de , con autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, es un autovector de , con autovalor $\overline{\lambda}$.

Demostración. El subespacio $_1(\lambda)$ de todos los autovectores de que tienen el mismo autovalor λ es invariante por , ya que si $\vec{\ } \in \ _1(\lambda)$,

$$\circ \ (\vec{\ }) = \ \circ \ (\vec{\ }) = \ (\lambda\vec{\ }) = \lambda \ (\vec{\ })$$

y, por tanto, $(\vec{\ }) \in \ _1(\lambda)$. Además, si $\vec{\ }, \vec{\ } \in \ _1(\lambda)$,

$$(\ (\vec{\ }), \vec{\ }) = (\vec{\ }, \ (\vec{\ })) = (\vec{\ }, \lambda\vec{\ }) = \overline{\lambda}(\vec{\ }, \vec{\ }).$$

Tomando en particular $\vec{\ } = \quad (\vec{\ }) - \overline{\lambda}\vec{\ } \in \ _1(\lambda)$ se tiene que

$$(\quad (\vec{\ }) - \overline{\lambda}\vec{\ }, \quad (\vec{\ }) - \overline{\lambda}\vec{\ }) = 0,$$

de donde se deduce $\quad (\vec{\ }) = \overline{\lambda}\vec{\ }$. ■

Proposición 9.2.2

Sea $\in L(\ )$ una aplicación normal y sea $\ _1(\lambda)$ el subespacio vectorial de todos los autovectores de $\ $ con el mismo autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, $\ (\lambda) = \ _1(\lambda)^{\perp}$ es invariante por $\ $.

Demostración. Si $\vec{\ } \in \ (\lambda)$ y $\vec{\ } \in \ _1(\lambda)$ se tiene que $\ (\vec{\ }) = \overline{\lambda}\vec{\ }$ (Proposición 9.2.1) y, además,

$$(\ (\vec{\ }), \vec{\ }) = (\vec{\ }, \quad (\vec{\ })) = (\vec{\ }, \overline{\lambda}\vec{\ }) = \lambda(\vec{\ }, \vec{\ }) = 0$$

de donde se deduce que $\ (\vec{\ }) \in \ (\lambda)$. ■

El siguiente teorema nos da la diagonalización de toda aplicación normal en un espacio hermítico.

Teorema 9.2.3 (Teorema espectral)

La matriz de una aplicación normal $\ $ en un espacio hermítico puede ser reducida en una base ortonormal determinada a una matriz diagonal.

Demostración. Realizamos la demostración por inducción en la dimensión n del espacio hermítico $\ $. Si $n = 1$ el teorema es cierto. Supongamos que $n > 1$ y sea $\ _1(\lambda_1)$ el subespacio de autovectores de $\ $ con autovalor λ_1; si $\ _1(\lambda_1) = \ $, cualquier base ortonormal de $\ $ produce una matriz diagonal con λ_1 en su diagonal principal. Si $\ _1(\lambda_1) \subsetneq \ $, $\ (\lambda_1) = \ _1(\lambda_1)^{\perp}$ es de dimensión mayor o igual que 1 y menor que n. Por la hipótesis de inducción,

$$|\ _{1(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad , \quad |\ _{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\ = \ _1(\lambda_1) \oplus \ (\lambda_1),$ $\ $ puede reducirse a una matriz diagonal (yuxtaposición de las dos anteriores) en una base ortonormal. ■

Corolario .2.4

Las matrices simétricas conjugadas y las matrices unitarias son diagonalizables.

En el caso particular de que $\ $ sea *nitaria*, sus autovalores han de ser de módulo 1, es decir, $\lambda = e^{i\varphi}$ y, por tanto, puede reducirse a

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}.$$

Si es autoadjunta, sus autovalores son reales (ver (2.1)), y, por tanto, puede reducirse a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

* * *

Sea $\in U(n)$; por el Teorema 9.2.3 existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ de manera que

$$= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \ ^{-1},$$

donde es la matriz del cambio de base de la base canónica a . Por tanto, transforma una base ortonormal en otra base ortonormal y esto es suficiente para asegurar que $\in U(n)$. Por tanto,

$$= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} ^{-t}.$$

Cuando es simétrica conjugada o hermítica, un razonamiento similar produce

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} ^{-t}, \ \lambda_i \in \mathbb{R},$$

con $\in U(n)$.

Para futuras referencias enunciamos este resultado a continuación; observar que este resultado es el análogo para espacios hermíticos de la Proposición 8.6.3.

Proposición 9.2.5

1) Dada $\in U(n)$, existe $\in U(n)$ tal que

$$= \begin{pmatrix} e^{\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\varphi_n} \end{pmatrix} ^{-t}.$$

2) Dada $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y tal que $= \ ^{-t}$, existe $\in U(n)$ tal que

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} ^{-t}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

* * *

En espacios hermíticos existe un resultado análogo al enunciado en el Teorema 8.7.1 para espacios euclídeos. Se tiene entonces que *to a a li a i n lineal no ing lar en n e a io ermíti o e e e ribir e e la orma*

$$= U \circ$$

on e e a toa nta y U e nitaria. La demostración de este resultado es análoga a la dada para el Teorema 8.7.1.

En el caso de espacios hermíticos este resultado tiene una interpretación elegante; si estuviera definida en el espacio hermítico $\mathbb{C}$, la matriz de sería un número complejo $a + bi$ no nulo, la matriz de sería un número real r y la matriz de U sería un número complejo de módulo 1 de la forma $e^{i\varphi}$, por tanto

$$a + bi = e^{i\varphi} r,$$

que es la forma polar de un número complejo. Entonces, la fórmula

$$= U \circ$$

puede interpretarse como la «forma polar» de una aplicación no singular y de hecho recibe el nombre de *e om o i i n olar e* .

Evidentemente, también existe una descomposición polar de toda matriz $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ no singular, lo cual puede deducirse de la descomposición polar para aplicaciones. Puesto que no lo hicimos en el capítulo anterior, daremos aquí una demostración directa de este hecho.

Proposición 9.2.6

Sea $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $| \ | \neq 0$; existen dos matrices $U \in U(n)$ y simétrica conjugada, tales que $= U \cdot$.

Demostración. La aplicación $=$ es simétrico conjugada, ya que

$$= {}^{-t} = (\overline{{}^{-t}})^t = ({}^{t-})^t = {}^{-t} = .$$

Por la Proposición 9.2.5 tenemos que existe $\in U(n)$ tal que

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^{-t} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De la definición de se deduce que $\lambda > 0$, $= 1, 2, ..., n$. Pongamos

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

y también

$$= {}^{-t}.$$

y observemos que es invertible por ser producto de matrices invertibles. Sea $U =$ $^{-1}$. Entonces $= U$ y además es una matriz simétrica conjugada ya que

$$= {}^{-}{}^{t} = \overline{(\quad {}^{-}{}^{t})}^{t} = \overline{({}^{-}{}^{t})^{t}} \quad {}^{-}{}^{t} = \quad {}^{-}{}^{t} = \quad .$$

Únicamente falta por demostrar que U es unitaria:

$$\begin{aligned} U\ U &= \bar{U}^{t}U = \overline{(\quad {}^{-1})}^{t}(\quad {}^{-1}) = ({}^{\overline{\quad}}{}^{t})^{-1}\,{}^{-}{}^{t}.\quad {}^{-1} = \\ &= \overline{({}^{-}\quad {}^{t})^{-1}}\,{}^{-}{}^{t}\ (\quad {}^{-1}\,{}^{-}{}^{t}) = (\quad {}^{-}{}^{t})^{-1}\ (\quad {}^{-1}\,{}^{-}{}^{t}) = \\ &= \quad {}^{-1}({}^{-}{}^{t}\quad)\ {}^{-1}\,{}^{-}{}^{t} = \quad {}^{-1}\ {}^{2}\ {}^{-1}\,{}^{-}{}^{t} = \quad {}^{-}{}^{t} = \ , \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado repetidamente el hecho de que $^{-1} = {}^{-}{}^{t}$. ■

Finalmente, queremos resaltar que todo espacio euclídeo puede convertirse en un espacio hermítico. Ya sabemos (ejercicio 4 de la sección 6.9) que todo espacio vectorial *real* puede convertirse en un espacio vectorial *om le o* $_{\mathbb{C}}$; podemos tomar $=$ $_{\mathbb{C}}$ y definir

$$(\vec{} + i\vec{v}, \vec{} + i\vec{}\,)_{\mathbb{C}} = [(\vec{}, \vec{}) + (\vec{v}, \vec{}\,)] + i[-(\vec{v}, \vec{}) + (\vec{}, \vec{}\,)],$$

donde (,) denota el producto escalar en , y $\vec{} + i\vec{v}, \vec{} + i\vec{} \in$. El lector puede comprobar que $(\ ,\ )_{\mathbb{C}}$ es un producto hermítico en (ejercicio 6 al final de esta sección).

Las aplicaciones autoadjuntas en son también autoadjuntas en y las aplicaciones ortogonales en son unitarias en ; consecuentemente, los autovalores de aplicaciones ortogonales son números complejos de módulo 1 (comparar este resultado con el Teorema 8.5.4).

EJERCICIOS (Capítulo 9)

1. En el espacio hermítico $\mathbb{C}^3$ con el producto hermítico usual encontrar el complemento ortogonal del subespacio vectorial generado por el vector $\vec{} = (i, 0, 1)$.

2. Sea $\mathbb{C}^2$ con el producto hermítico usual. Estudiar si son unitarias las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3+2i & 5-i \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \dfrac{1+i\sqrt{2}}{2} & \dfrac{i}{2} \\ \dfrac{i}{2} & \dfrac{1-i\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ -1-i & -1 \end{pmatrix}$.

3. Encontrar las matrices de Jordan de las dos últimas matrices del ejercicio 2, así como matrices de cambio, siendo estas últimas unitarias si la matriz de partida es unitaria.

4. Demostrar que $= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz normal y encontrar una base ortonormal en $\mathbb{C}^3$ en la que tenga una forma diagonal.

5. Sea $= \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Encontrar una descomposición polar de , es decir, una matriz unitaria U y una matriz simétrica conjugada, tal que $= U$.

6. Sea un espacio euclídeo; en $= {}_{\mathbb{C}} = \{\vec{} + i\vec{v}\colon \vec{}, \vec{v} \in \}$ definir

$$(\vec{} + i\vec{v}, \vec{} + i\vec{}\,)_{\mathbb{C}} = [(\vec{}, \vec{}) + (\vec{v}, \vec{}\,)] + i[-(\vec{v}, \vec{}) + (\vec{}, \vec{}\,)]$$

donde (,) describe el producto escalar en y $\vec{} + i\vec{v}, \vec{} + i\vec{} \in$. Demostrar que $(\ ,\ )_{\mathbb{C}}$ es un producto hermítico en .

Biografía

arles ermite nació el 24 de diciembre de 1822 en Dieuze (Francia) y murió el 14 de enero de 1901 en París. A pesar de que a los 20 años ya había demostrado su capacidad matemática, sus dificultades con los exámenes le llevaron a dedicar cinco de los años más productivos de su vida a preparar los exámenes para la obtención de la licenciatura, que consiguió en 1848.

Enseñó en la Escuela Politécnica de París y después en el Colegio de Francia, en la misma ciudad. No fue hasta 1869 que fue nombrado profesor en la Escuela Normal de París, para pasar un año más tarde a ser profesor de Álgebra en la Sorbona.

En 1873 Hermite publicó la primera demostración de que el número *e* es trascendente, es decir, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Contribuyó decisivamente al desarrollo de la teoría de las formas cuadráticas, así como a la solución de la ecuación general de quinto grado utilizando las funciones elípticas.

Capítulo 10

Movimientos en un espacio afín euclídeo. Movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

10.1. Espacio afín. Variedades lineales.

10.2. Transformaciones afines. Ejemplos.

10.3. Espacio afín euclídeo. Movimientos.

10.4. Estudio geométrico de los movimientos en el plano.

10.5. Estudio analítico de los movimientos en $\mathbb{R}^2$.

10.6. Descripción geométrica de los movimientos en el espacio.

10.7. Clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^3$.

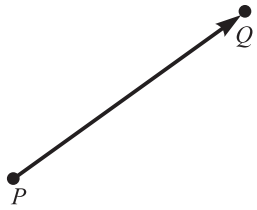
10.8. Ecuaciones de los movimientos en $\mathbb{R}^3$.

10.9. Movimientos en $\mathbb{R}^3$ y puntos fijos.

Introducción

Comenzaremos este capítulo definiendo el concepto de *e a io a ín*, que estará formado por un conjunto de puntos y un espacio vectorial asociado. Cuando este espacio vectorial sea un espacio euclídeo tendremos un *e a io a ín e lí eo*. Podemos pensar que el espacio afín es $\mathbb{R}^n$ y que está formado por puntos, los cuales serán designados por letras mayúsculas como , , , ... Dados dos puntos y de $\mathbb{R}^n$ definimos la distancia de a mediante

$$(,) = \| \overrightarrow{\quad} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (_i - y_i)^2}$$



donde ($_1$, $_2$, ..., $_n$) e (y_2, y_2, ..., y_n) son las coordenadas de y , respectivamente, con respecto a un sistema de referencia fijado en $\mathbb{R}^n$. En este capítulo vamos a estudiar detenidamente los tipos de aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que conservan la distancia.

El lector habrá podido adivinar que debe existir cierta relación entre las aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que conservan las distancias y aquellas aplicaciones que conservan el producto escalar usual en los mismos espacios considerados como espacios euclídeos. Tales aplicaciones han sido estudiadas en el Capítulo 8, y son las aplicaciones ortogonales. Debido a esto es conveniente que el lector esté familiarizado con los resultados demostrados en el Capítulo 8.

10.1. ESPACIO AFÍN. VARIEDADES LINEALES

En el ejemplo C de la sección 4.4 se observó que si es una matriz de m filas y n columnas de rango r, las soluciones del sistema homogéneo

$$\vec{} = \vec{0}, \quad \vec{} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

son un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $= n - r$. Este subespacio vectorial, que denotamos por $\mathcal{L}$, es un subespacio vectorial generado por vectores linealmente independientes $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$ que sean solución de (1.1); es decir:

$$\mathcal{L} = L(\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}).$$

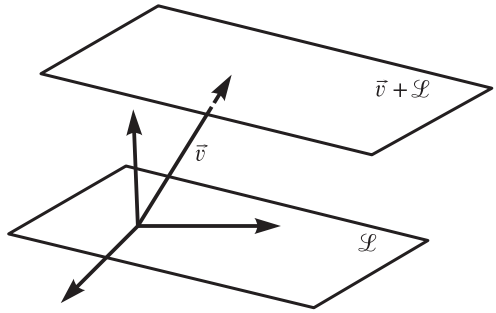
Si consideramos el sistema no homogéneo

$$\vec{} = \vec{b}, \quad \vec{} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

sabemos que sus soluciones pueden escribirse de la forma

$$\vec{} = \vec{v} + \ _1\vec{}_1 + \cdots + \ \vec{} \quad , \qquad \in \mathbb{R}$$

(Teorema 1.2.8). Por tanto, podemos describir el conjunto de soluciones de (1.2) como $\vec{v} + \mathcal{L}$ (véase figura 10.1).



i ra 10.1

Este conjunto se obtiene trasladando $\mathcal{L} = L(\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}\,)$ mediante el vector $\vec{v}$. Si $= 1$ se obtiene una recta, si $= 2$ se obtiene un plano y, en general, si > 2 los objetos que se obtienen se denominan *lano* . Todos ellos reciben el nombre de *varie a e lineale* .

Este tipo de construcción puede hacerse no solamente en $\mathbb{R}^n$, sino en otros espacios vectoriales.

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de elementos, que se denominarán *nto* , y un espacio vectorial. El par ($\mathcal{P}$,) recibe el nombre de *e a io a ín*, $\mathbb{A}$, si todo par ordenado (,) de puntos puede ponerse en correspondencia con un único vector $\vec{\omega}$ de , lo cual escribiremos de la forma $\overrightarrow{\quad} = \vec{\omega}$, que satisface las siguientes propiedades:

1) Para todo punto y para todo vector $\vec{\omega}$ de , existe un solo punto tal que $\overrightarrow{\quad} = \vec{\omega}$. Escribiremos entonces $=$ $+ \vec{\omega}$.
2) Para cada tres puntos , y se tiene que $\overrightarrow{\quad} + \overrightarrow{\quad} = \overrightarrow{\quad}$.

i ra 10.2

Usaremos la notación $\in \mathbb{A}$ para indicar $\in \mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de puntos del espacio afín $\mathbb{A}$.

El espacio afín $\mathbb{A}$ se dice que tiene *imen i n n* si el espacio vectorial asociado a $\mathbb{A}$ es de dimensión *n*. Todo subconjunto de $\mathbb{A}$ de la forma

$$+ \mathcal{L} = \{ \in \mathcal{P} : \overrightarrow{\quad} \in \mathcal{L}\},$$

donde es un punto y $\mathcal{L}$ es un subespacio vectorial de , recibe el nombre de *varie a lineal e* $\mathbb{A}$. La *imen i n* de $+ \mathcal{L}$ es la dimensión de $\mathcal{L}$ como subespacio vectorial de . Así las variedades lineales de dimensión 0 son los puntos de $\mathcal{P}$, las de dimensiones 1, 2, $n - 1$ se llaman *re ta* , *lano* e *i er lano* respectivamente, donde $n = \dim( )$.

EJEMPLO A. Consideremos en $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3$ la estructura afín habitual: si $= (_1, _2, _3)$ y $= (_1, _2, _3)$ entonces definimos

$$\overrightarrow{\quad} = (_1 - _1, _2 - _2, _3 - _3) \in = \mathbb{R}^3.$$

Sea $\mathcal{L} = L(\bar{\ }) \subset \ = \mathbb{R}^3$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 generado por el vector $\bar{\ } = (1, 1, 1)$. Entonces, la variedad lineal de dimensión 1 que pasa por $\ = (1, 2, 3)$ y tiene dirección $\mathcal{L}$ es

$$(1, 2, 3) + \mathcal{L} = \{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^2 = \mathcal{P} : \ (\ - 1, y - 2, \ - 3) \in \mathcal{L}\}$$
$$= \{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^3 = \mathcal{P} : \ \ - 1 = y - 2 = \ - 3\}.$$

Proposición 10.1.1

Sea $\mathcal{L}$ un subespacio vectorial de un espacio vectorial . Sean , dos puntos de un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$. Entonces, si $\in \ + \mathcal{L}$ se tiene $\ + \mathcal{L} = \ + \mathcal{L}$.

Demostración. Veamos que $\ + \mathcal{L} \subset \ + \mathcal{L}$. En efecto, si $\in \ + \mathcal{L}$, entonces $\overrightarrow{\ \ } = \vec{v} \in \mathcal{L}$. Además $\overrightarrow{\ \ } = \vec{\omega} \in \mathcal{L}$ por hipótesis. Luego

$$\overrightarrow{\ \ } = \overrightarrow{\ \ } + \overrightarrow{\ \ } = -\vec{\omega} + \vec{v} \in \mathcal{L}$$

y en consecuencia $\in \ + \mathcal{L}$.

Veamos ahora que $\ + \mathcal{L} \subset \ + \mathcal{L}$. Si $\in \ + \mathcal{L}$ se tiene $\overrightarrow{\ \ } = \vec{\ } \in \mathcal{L}$. Entonces,

$$\overrightarrow{\ \ } = \overrightarrow{\ \ } + \overrightarrow{\ \ } = \vec{\omega} + \vec{\ } \in \mathcal{L}$$

lo que prueba que $\in \ + \mathcal{L}$. ■

* * *

En un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ un *i tema e re eren ia* está formado por un punto $\in \mathcal{P}$, que se considera el *origen*, y una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ del espacio vectorial subyacente . Utilizaremos la notación

$$\mathcal{R} = \{ \ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$$

para designar este sistema de referencia.

Dado un punto , existe un vector $\bar{\ }$ de que está en correspondencia con el par de puntos , ; si

$$\vec{\ } = \ _1\vec{e}_1 + \ _2\vec{e}_2 + \cdots + \ _n\vec{e}_n$$

diremos que $(\ _1, \ _2, ..., \ _n)$ son las *oor ena a el nto on re e to al i tema e re eren ia* $\mathcal{R}$. Escribiremos

$$\overrightarrow{\ \ } = \ _1\vec{e}_1 + \ _2\vec{e}_2 + \cdots + \ _n\vec{e}_n.$$

Podemos plantearnos el problema de determinar unas ecuaciones implícitas de una variedad lineal dada por $\ = \ + \mathcal{L}$ en un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{ \ ; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ en un espacio afín $\mathbb{A}$.

EJEMPLO B. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ consideramos la recta afín $\ = (1, \ 2, \ 3) + \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} = L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base de $\ = \mathbb{R}^3$. Cada punto $(\ , y, \ )$ de $\mathbb{R}^3$ está en si y solamente si el vector $\overrightarrow{(1, 2, 3)(\ , y, \ )}$ pertenece a $\mathcal{L}$. Por tanto este vector debe ser proporcional a $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ y en consecuencia la matriz

$$\begin{pmatrix} \ - 1 & 1 \\ y - 2 & 1 \\ \ - 3 & 1 \end{pmatrix}$$

debe tener rango 1. Esto implica la equivalencia

$$(\ , y, \ ) \in \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego

$$= \{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^3 : \quad -y+1=0, \quad - \quad +2=0\},$$

que nos da una descripción de con ecuaciones implícitas, como ya se obtuvo en el ejemplo A.

* * *

Podemos generalizar el razonamiento del ejemplo B para hallar unas ecuaciones implícitas de una variedad lineal dada $= \ + \mathcal{L}$ cuando $\mathcal{L} = L(\vec{v}_1, ..., \vec{v} \ )$ es de dimensión y $= (\ _1, ..., \ _n)$ es un punto del espacio afín, en un sistema de referencia dado $\mathcal{R} = \{ \ ; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

Cada $= (\ _1, ..., \ _n)$ en debe satisfacer la condición $(\ _1 - \ _1, ..., \ _n - \ _n) \in \mathcal{L} = L(\vec{v}_1, ..., \vec{v} \ )$ y por tanto

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \ _1 - \ _1 & v_{11} & \cdots & v \ _1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ _n - \ _n & v_{1n} & \cdots & v \ _n \end{pmatrix} =$$

donde $\vec{v}_i = \{v_{i1}, ..., v_{in}\}$ son las coordenadas de $\vec{v}_i$ en la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ de . Supongamos que un menor no nulo de orden de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v \ _1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v \ _n \end{pmatrix}$$

es el determinante de la submatriz cuadrada

$$= \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v \ _1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 & \cdots & v \end{pmatrix}.$$

Entonces unas ecuaciones implícitas de son

$$\left| \begin{array}{c|c} x_1 - p_1 & \\ \vdots & M \\ x_k - p_k & \\ \hline x_j - p_j & v_{1j} \cdots v_{kj} \end{array} \right| = 0, \quad \text{para } j = k+1, ..., n,$$

(ver Teorema 2.5.1).

EJEMPLO C. Tratemos de hallar unas ecuaciones implícitas del plano π de $\mathbb{R}^4$ que contiene a los puntos

$$_1 = (1, 1, 1, 0) \quad , \quad _2 = (0, 1, 2, 3) \quad , \quad _3 = (0, 0, 1, -1).$$

Tenemos que $\pi = \ _1 + L(\overrightarrow{\ _1 \ _2}, \overrightarrow{\ _1 \ _3})$ con $\overrightarrow{\ _1 \ _2} = (-1, 0, 1, 3)$ y $\overrightarrow{\ _1 \ _3} = (-1, -1, 0, -1)$. Si $(\ _1, \ _2, \ _3, \ _4) \in \pi$, la matriz

$$\begin{pmatrix} \ _1 - 1 & -1 & -1 \\ \ _2 - 1 & 0 & -1 \\ \ _3 - 1 & 1 & 0 \\ \ _4 - 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

debe tener rango 2. Como $= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo, unas ecuaciones implícitas para π son

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & -1 & -1 \\ x_2 - 1 & 0 & -1 \\ x_3 - 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -1 & -1 \\ x_2 - 1 & 0 & -1 \\ x_4 - 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto es

$$\pi = \{(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4) \in \mathbb{R}^4 : \quad _1 - \ _2 + \ _3 = 1, \quad 3\ _1 - 4\ _2 + \ _4 = -1\}.$$

* * *

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia

$$\mathcal{R} = \{\ ; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \quad , \quad \mathcal{R}' = \{\ ; \vec{}_1, ..., \vec{}_n\}$$

en un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P},\ )$. Sean $(\ _1, ...,\ _n)$ las coordenadas de un punto $\in \mathcal{P}$ con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$ y sean $(\ '_1, ...,\ '_n)$ las coordenadas del mismo punto $\in \mathcal{P}$ con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}'$. Para encontrar las coordenadas $(\ '_1, ...,\ '_n)$ de en $\mathcal{R}'$ partir de las coordenadas $(\ _1, ...,\ _n)$ de en $\mathcal{R}$ procedemos en dos etapas:

a) Cambiamos el sistema de referencia $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S} = \{\ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, de manera que solamente hemos variado el origen.
b) Pasamos de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{R}'$ dejando fijo el origen y realizando el cambio de base en el espacio vectorial .

En la primera etapa el cambio de sistema de referencia se realiza de la siguiente manera: si $(y_1, ..., y_n)$ designan las coordenadas de respecto a $\mathcal{S}$ y $(\ _1, ...,\ _n)$ las de respecto a $\mathcal{R}$ se tiene que

$$\longrightarrow = \longrightarrow + \longrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad (\ _1, ...,\ _n) = (\ _1, ...,\ _n) + (y_1, ..., y_n).$$

Por tanto,

$$(y_1, ..., y_n) = (\ _1 - \ _1, ...,\ _n - \ _n).$$

En la segunda etapa se trata de realizar únicamente un cambio de base en el espacio vectorial subyacente: si $(\ '_1, ...,\ '_n)$ son las coordenadas del punto con respecto a $\mathcal{R}'$ y es la matriz del cambio de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ a la base $\{\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}_n\}$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ '_1 \\ \ '_2 \\ \vdots \\ \ '_n \end{pmatrix}.$$

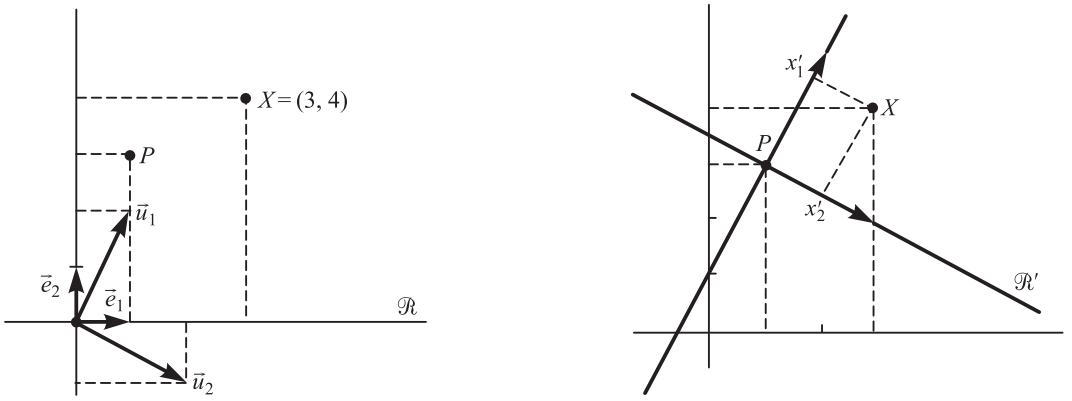
Combinando los resultados de estas dos etapas se tiene:

$$\begin{pmatrix} \ '_1 \\ \ '_2 \\ \vdots \\ \ '_n \end{pmatrix} = \ ^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \ ^{-1} \begin{pmatrix} \ _1 - \ _1 \\ \ _2 - \ _2 \\ \vdots \\ \ _n - \ _n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ '_1 \\ \ '_2 \\ \vdots \\ \ '_n \end{pmatrix} + \ ^{-1} \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \vdots \\ \ _n \end{pmatrix}$$

que nos da las coordenadas de con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

EJEMPLO D. Sea un punto de coordenadas (3, 4) en un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{\ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ del espacio afin $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{R}' = \{\ ; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un nuevo sistema de referencia, donde tiene como coordenadas (1, 3) con respecto a $\mathcal{R}$ y $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Las coordenadas del punto con respecto a $\mathcal{R}'$ son

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$



i ra 10.3

EJEMPLO E. Sea $\mathcal{R} = \{\ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un sistema de referencia en $\mathbb{R}^3$ con respecto al cual el plano π tiene por ecuación $_1 + \ _2 + \ _3 = 2$. Sea $\mathcal{R}' = \{\ ; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un nuevo sistema de referencia tal que $= (1, 1, 0)$, $\vec{u}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ y $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Para encontrar una ecuación implícita del plano π con respecto a $\mathcal{R}'$ observamos que

$$(\ _1, \ _2, \ _3) = (1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) + \ (0, -1, 1)$$

son ecuaciones paramétricas del plano π; por tanto, las coordenadas $(\ _1, \ _2, \ _3)$ de un punto de π se transforman en $(\ '_1, \ '_2, \ '_3)$ de manera que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} _1 - 1 \\ _2 - 1 \\ _3 - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ - \\ t + \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t - & + t + \\ -t + 2 & + t + \\ -t - & + t + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\ '_3 = 0$ es una ecuación implícita del plano π con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

EJERCICIOS 10.1

1. Hallar las ecuaciones implícitas de las siguientes variedades lineales

   a) El plano π de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos

   $$_1 = (1, 1, 0) \quad , \quad _2 = (0, 1, 1) \quad , \quad _3 = (1, 2, -1).$$

b) La variedad lineal $\quad + \mathscr{L}$ de $\mathbb{R}^4$ con $\quad = (1, -2, 3, 0)$ y $\mathscr{L} = L(\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3)$ con $\vec{\ }_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{\ }_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\vec{\ }_3 = (1, 2, -1, 0)$ en un sistema de referencia fijado.

2. En el plano, y respecto de una referencia dada $\mathscr{R}$, se dan los puntos $\quad = (1, 1)$ y $\quad = (-2, 0)$, los vectores $\vec{\ }_1 = (1, 2)$ y $\vec{\ }_2 = (-1, 1)$ y la recta $r \equiv \ _1 - \ _2 = 1$. Hallar:

   a) Las coordenadas de $\quad$ con respecto al sistema de referencia $\mathscr{R}' = \{\ ; \vec{\ }_1, \vec{\ }_2\}$.

   b) La ecuación de la recta r con respecto a $\mathscr{R}'$.

3. Sea $\mathscr{R}'$ el sistema de referencia en el plano que se obtiene girando un ángulo α en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia dado $\mathscr{R}$. Si $\quad \equiv (\ _1 - 1)^2 + \ _2^2 = 4$ es la ecuación de una circunferencia respecto a $\mathscr{R}$, encontrar la ecuación de $\quad$ respecto a $\mathscr{R}'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de $\mathscr{R}'$?

4. Dado el plano de ecuación $\ _1 - \ _2 + \ _3 = 3$ con respecto a un sistema de referencia $\mathscr{R}$ en $\mathbb{R}^3$, encontrar un sistema de referencia $\mathscr{R}'$ de $\mathbb{R}^3$ en el que el plano anterior tenga por ecuación $\ '_2 = 0$.

5. Dada la circunferencia $\quad \equiv (\ _1 - 1)^2 + (\ _2 - 1)^2 = 9$ en el plano, encontrar sus ecuaciones en el sistema de referencia $\mathscr{R}' = \{\ ; \vec{\ }_1, \vec{\ }_2\}$, donde $\quad = (3, 3)$, $\vec{\ }_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{\ }_2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}, -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$. ¿Qué tipo de curva es $\quad$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$?

6. Sea $\quad = \{\ _\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un conjunto de puntos de un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathscr{P}, \quad)$ con espacio vectorial asociado $\quad$. La *varie a lineal engen ra a* por $\quad$ se define como

$$(\ ) = \ _{\lambda_0} + L(\{\overrightarrow{\ _{\lambda_0}\ _\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}).$$

   a) Demostrar que $(\ )$ es la mínima variedad lineal que contiene a $\quad$.

   b) Calcular unas ecuaciones implícitas para la mínima variedad lineal de $\mathbb{R}^4$ que contiene a los puntos

$$\ _1 = (1, 0, 0, 1) \quad , \quad \ _2 = (0, 1, 0, 1) \quad , \quad \ _3 = (0, 0, 1, 1)$$

   dados en una referencia $\mathscr{R} = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Calcular su dimensión.

7. Dadas dos variedades lineales $\ _1$ y $\ _2$ en un espacio afín, llamaremos *varie a lineal ma* de $\ _1$ y $\ _2$, y la denotaremos por $\ _1 + \ _2$, a la mínima variedad lineal del espacio afín dado que contiene a $\ _1 \cup \ _2$.

   a) Considerar $\mathbb{R}^3$ con la estructura afín usual. Si $\ _1 = (1, 0, 0) + L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ y $\ _2 = (0, 0, 0) + L(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$, calcular la dimensión de $\ _1 + \ _2$. ¿Qué relación tiene esta dimensión con dim $\ _1$ y dim $\ _2$?

   b) Si $\ _3 = \{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^3 : 2\ - y - \ = 0\}$, calcular la dimensión de $\ _1 + \ _3$. ¿Qué relación tiene esta dimensión con dim $\ _1$ y dim $\ _3$?

8. Considerar dos variedades lineales $\ _1 + \mathscr{L}_1$ y $\ _2 + \mathscr{L}_2$ en un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathscr{P}, \quad)$.

   a) Demostrar que estas variedades lineales se cortan si y solo si $\overrightarrow{\ _1\ _2}$ está en el espacio vectorial $\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$.

b) Demostrar que si $\in (\ _1 + \mathcal{L}_1) + (\ _2 + \mathcal{L}_2)$ entonces

$$(\ _1 + \mathcal{L}_1) \cap (\ _2 + \mathcal{L}_2) = \mathrm{R} + (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2).$$

c) Dada la familia de hiperplanos π_λ de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones

$$(\lambda + 1)\ + (\lambda - 1)y + (\lambda + 1)\ = \lambda\ ,\quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R},$$

demostrar que hay un plano π de $\mathbb{R}^4$ tal que $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} \pi_\lambda = \pi$. Calcular la dimensión de $\pi_\lambda +\ $, donde es el plano de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $\ = y = \ $.

10.2. TRANSFORMACIONES AFINES. EJEMPLOS

Recordemos que un espacio afín $\mathbb{A}$ está formado por un conjunto $\mathcal{P}$ de puntos y un espacio vectorial de manera que a cada par de puntos , $\in \mathcal{P}$ le corresponde un único vector $\overrightarrow{\ \ } \in$ y tal que para cualesquiera tres puntos , , $\in \mathcal{P}$ se verifica $\overrightarrow{\ \ } = \overrightarrow{\ \ } + \overrightarrow{\ \ }$.

Definición 10.2.1

Sean $(\mathcal{P},\ )$ y $(\mathcal{P}',\ ')$ dos espacios afines sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una transformaci n af n o afinidad entre estos espacios es una aplicación $: \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ junto con una aplicación lineal $\tilde{}: \ \to\ '$ tal que

$$\tilde{}(\overrightarrow{\ \ }) = \overrightarrow{(\ )\ (\ )} \quad \text{para } ,\ \in \mathcal{P}.$$

La aplicación lineal $\tilde{}$ se llama aplicaci n lineal asociada a la transformaci n af n .

Comenzamos exponiendo un resultado que nos ayudará en varias de las demostraciones que siguen.

Proposición 10.2.2

Sea una transformación afín de un espacio afín $(\mathcal{P},\ )$ en otro $(\mathcal{P}',\ ')$. Son equivalentes:

a) es una transformación afín.

b) $(\ + \bar{}) = (\ ) + \tilde{}(\bar{})$ para $\in \mathcal{P}$ y $\bar{} \in$.

Demostración. Para demostrar b) a partir de a) sean $\in \mathcal{P}$ y $\bar{} \in$; tomar $= + \bar{} \in \mathcal{P}$, es decir $\overrightarrow{\ \ } = \bar{}$. Por la definición de transformación afín $\overrightarrow{(\ )\ (\ )} = \tilde{}(\overrightarrow{\ \ }) = \tilde{}(\bar{})$. Luego

$$(\ ) = (\ ) + \tilde{}(\bar{})$$

como queríamos demostrar. Recíprocamente, si , $\in \mathcal{P}$ tomar $\bar{} = \overrightarrow{\ \ } \in$. Por b), $\overrightarrow{(\ )\ (\ )} = \tilde{}(\bar{}) = \tilde{}(\overrightarrow{\ \ })$. ■

Una consecuencia fácil de la proposición anterior es el siguiente resultado.

Corolario 1 .2.3

Sean $(\mathcal{P}, \ )$ y $(\mathcal{P}', \ ')$ dos espacios afines y $_i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$, $i = 1, 2$, dos transformaciones afines. Si $_1 = \ _2$ y para un punto $\in \mathcal{P}$ se tiene $_1( ) = \ _2( )$, entonces $_1 = \ _2$.

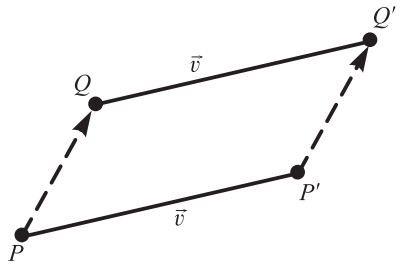
Demostración. Para cada $\in \mathcal{P}$ podemos escribir las igualdades

$$_1( ) = \ _1(+ \overrightarrow{\ }) = \ _1( ) + \tilde{}_1(\overrightarrow{\ }) = \ _2( ) + \tilde{}_2(\overrightarrow{\ }) = \ _2(+ \overrightarrow{\ }) = \ _2( )$$

en donde se ha hecho uso de la Proposición 10.2.2. ■

EJEMPLO A. Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la *tra la i n* de vector $\vec{v}$, que designamos por $_{\vec{v}}$, es una transformación afín. En este caso:

$$_{\vec{v}}( ) = \ ' \quad , \quad \text{si } \overrightarrow{\ '} = \vec{v}.$$



i ra 10.4

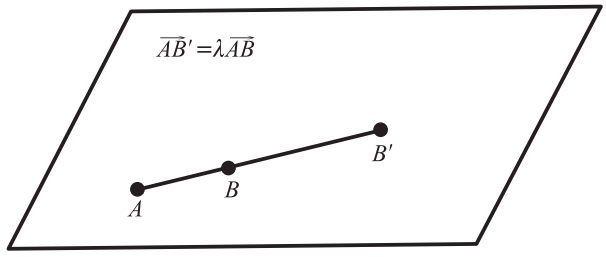
Es fácil comprobar que $_{\vec{v}}$ es una transformación afín, ya que

$$\overrightarrow{_{\vec{v}}( ) \ _{\vec{v}}( )} = \overrightarrow{\ ' \ '} = \overrightarrow{\ }$$

y, por tanto, basta tomar la aplicación lineal asociada a $_{\vec{v}}$ como la identidad en $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO B. En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ definimos la *omote ia* de centro y razón λ como la aplicación $\equiv \ _{ ,\lambda}$ tal que si $\in \mathbb{R}^2$, la imagen $'$ de mediante satisface

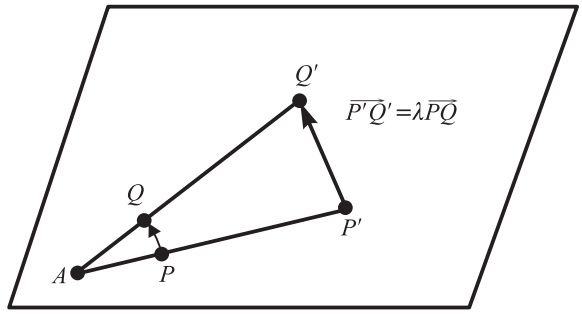
$$\overrightarrow{\ '} = \lambda \overrightarrow{\ }$$



i ra 10.5

La aplicación lineal $\tilde{\ }$ asociada a es $\tilde{\ }(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. En efecto, si , $\in \mathbb{R}^2$,

$$\overrightarrow{(\ )\ (\ )} = \overrightarrow{'\ '} = \overrightarrow{'} + \overrightarrow{\ '} = -\overrightarrow{\ '} + \overrightarrow{\ '} = -\lambda\overrightarrow{\ } + \lambda\overrightarrow{\ }$$
$$= \lambda(-\overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ }) = \lambda\overrightarrow{\ } = \tilde{\ }(\overrightarrow{\ }).$$



i ra 10.6

Cuando $\lambda = 1$ se tiene la transformación identidad. Observar que el mismo ejemplo es válido en el espacio afín $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO C. Tratemos de encontrar la expresión analítica de la homotecia de centro y razón λ del ejemplo B. Supongamos que $\mathcal{R} = \{\ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es un sistema de referencia afín en $\mathbb{R}^2$ con respecto al cual $= (a_1, a_2)$. Tenemos que si $' = (\ )$

$$\overrightarrow{\ '} = \overrightarrow{(\ )} = \overrightarrow{(\ )} + \tilde{\ }(\overrightarrow{\ }) = \overrightarrow{\ } + \overrightarrow{(\ )} + \tilde{\ }(\overrightarrow{\ }) = \overrightarrow{\ } + \lambda\overrightarrow{\ } + \lambda\overrightarrow{\ }.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} '_1 \\ '_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} _1 \\ _2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} _1 \\ _2 \end{pmatrix}$$

donde $\overrightarrow{\ '} = {}'_1\vec{e}_1 + {}'_2\vec{e}_2$ y $\overrightarrow{\ } = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2$.

* * *

El ejemplo C puede generalizarse para cualquier transformación afín.

Tratamos de encontrar la *e re i n analíti a e na tran orma i n a ín* en un sistema de referencia. Dado $\mathcal{R} = \{\ ; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ un sistema de referencia en un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ y una transformación afín en $\mathbb{A}$ tenemos que

$$\overrightarrow{\ '} = \overrightarrow{(\ )} = \overrightarrow{(\ )} + \overrightarrow{(\ )\ (\ )} = \overrightarrow{(\ )} + \tilde{\ }(\overrightarrow{\ })$$

para todo $\in \mathcal{P}$, donde $' = (\ )$. Si $('_1, ..., '_n)$ son las coordenadas de $'$ con respecto a $\mathcal{R}$, $(_1, ..., _n)$ son las coordenadas de con respecto a $\mathcal{R}$, $(a_1, ..., a_n)$ son las coordenadas de $(\ )$ con respecto al mismo sistema de referencia y $\tilde{\ }$ es la matriz de $\tilde{\ }$ con respecto a la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, la igualdad anterior se escribe en coordenadas de la forma

$$\begin{pmatrix} '_1 \\ \vdots \\ '_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \tilde{\ }\begin{pmatrix} _1 \\ \vdots \\ _n \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

El lector puede convencerse de que la expresión (2.1) sirve para definir una aplicación afín que tiene a (2.1) como expresión analítica en el sistema de referencia fijado.

Si ( ) = se tiene que $(a_1, ..., a_n) = (0, ..., 0)$ y la expresión (2.1) se reduce a

$$\begin{pmatrix} {}'_1 \\ \vdots \\ {}'_n \end{pmatrix} = \tilde{}\begin{pmatrix} {}_1 \\ \vdots \\ {}_n \end{pmatrix}.$$

* * *

Proposición 10.2.4

La composición de dos transformaciones afines $_1$ y $_2$ es otra transformación afín. Además, $\widetilde{{}_1 \circ {}_2} = \tilde{}_1 \circ \tilde{}_2$.

Demostración. Si , son puntos se tiene

$$\overrightarrow{{}_1 \circ {}_2( ) \; {}_1 \circ {}_2( )} = \tilde{}_1(\overrightarrow{{}_2( ) \; {}_2( )}) = \tilde{}_1 \circ \tilde{}_2(\overrightarrow{\quad})$$

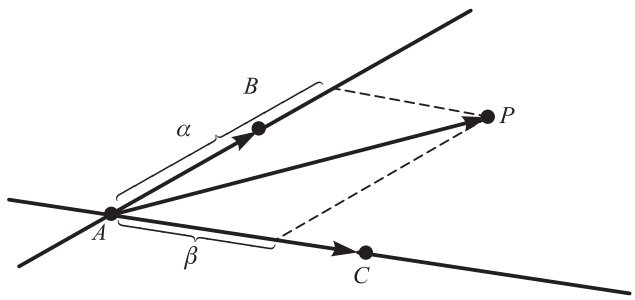
lo que prueba que $_1 \circ {}_2$ es otra transformación afín con $\widetilde{{}_1 \circ {}_2} = \tilde{}_1 \circ \tilde{}_2$. ■

Proposición 10.2.5

Sea una transformación afín de un plano afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, V)$ en sí mismo. Si tiene tres puntos fijos no alineados, entonces es la identidad en .

Demostración. Si , y son tres puntos no alineados, los vectores $\overrightarrow{\quad}$ y $\overrightarrow{\quad}$ son linealmente independientes en . Dado cualquier punto $\in \mathcal{P}$, como es de dimensión 2, el vector $\overrightarrow{\quad}$ debe ser combinación lineal de $\overrightarrow{\quad}$ y $\overrightarrow{\quad}$. Escribir

$$\overrightarrow{\quad} = \alpha\overrightarrow{\quad} + \beta\overrightarrow{\quad}, \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$



i ra 10.7

Si $\tilde{}$ es la aplicación lineal asociada a se tiene

$$\tilde{}(\overrightarrow{\quad}) = \alpha\tilde{}(\overrightarrow{\quad}) + \beta\tilde{}(\overrightarrow{\quad}).$$

Usamos la definición de transformación afín junto con el hecho de que , y son puntos fijos de para escribir

$$\overrightarrow{(\ )} = \overrightarrow{(\ )\ (\ )} = \tilde{}(\overrightarrow{\ }) = \alpha\tilde{}(\overrightarrow{\ }) + \beta\tilde{}(\overrightarrow{\ })$$
$$= \alpha\overrightarrow{(\ )\ (\ )} + \beta\overrightarrow{(\ )\ (\ )} = \alpha\overrightarrow{\ } + \beta\overrightarrow{\ } = \overrightarrow{\ }.$$

De aquí se deduce que $(\ ) =$, por lo que es la transformación identidad. ■

EJERCICIOS 10.2

1. Demostrar que una simetría en el plano con respecto a una recta es una transformación afín. Encontrar la expresión analítica de la simetría con respecto a la recta $= 1$ en el sistema de referencia canónico.

2. Encontrar la expresión analítica (en el sistema de referencia canónico) de los siguientes movimientos en $\mathbb{R}^3$:

   a) Giro G de 90^o con respecto al eje $= 1, y = 1$.

   b) Traslación de vector $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

   c) $\circ G$ y $G \circ$ que se obtienen como composición de los anteriores.

3. Determinar los puntos fijos, si existen, de la transformación afín en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}$$

   en el sistema de referencia canónico.

10.3. ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO. MOVIMIENTOS

Sea $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ un espacio afín. Se dice que $\mathbb{A}$ es un *espacio afín euclídeo* si es un espacio vectorial euclídeo. En este caso definimos la aplicación *distancia*

$$(\ ,\ ) = \|\overrightarrow{\ }\|$$

para cualquier par de puntos , $\in \mathcal{P}$. La aplicación $: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades

1) $(\ ,\ ) \geqslant 0$ y $(\ ,\ ) = 0 \Leftrightarrow =$
2) $(\ ,\ ) = (\ ,\ )$
3) (*desigualdad triangular*)

$$(\ ,\ ) \leqslant (\ ,\ ) + (\ ,\ )$$

donde , , $\in \mathcal{P}$.

Las propiedades 1) y 2) son inmediatas de la definición de norma en un espacio euclídeo, mientras que 3) se deduce de la correspondiente desigualdad triangular para espacios euclídeos probada al final de la sección 8.1.

Además se cumple la siguiente propiedad:

4) Para todo , , $\in \mathcal{P}$

$$| (,) - (,)| \leqslant (,).$$

Esto se demuestra con las siguientes desigualdades que se deducen de la desigualdad triangular 3):

$$(,) \leqslant (,) + (,) \Rightarrow (,) - (,) \leqslant (,)$$
$$(,) \leqslant (,) + (,) \Rightarrow - (,) \leqslant (,) - (,).$$

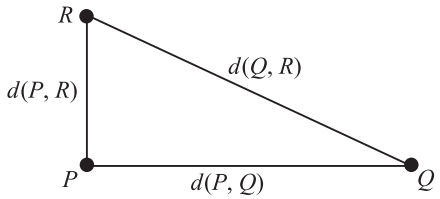
Teorema 10.3.1 (Teorema de Pitágoras)

Sea $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ un espacio afín euclídeo y sean , , puntos de $\mathbb{A}$. Si $\overrightarrow{\ }$ es ortogonal a $\overrightarrow{\ }$ entonces

$$(,)^2 = (,)^2 + (,)^2.$$

Demostración. Basta observar que se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$(,)^2 = \| \overrightarrow{\ } \|^2 = (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = (\overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ })$$
$$= \| \overrightarrow{\ } \|^2 + 2(\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) + \| \overrightarrow{\ } \|^2 = (,)^2 + (,)^2. \quad \blacksquare$$



i ra 10.8

* * *

Sea $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ un espacio afín euclídeo de *imen i n n*, es decir tiene dimensión *n* como espacio vectorial real. Un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ se dice *ortonormal* si la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ de es ortonormal.

Ayudados de la estructura euclídea de podemos definir la noción de ortogonalidad de variedades afines de $\mathbb{A}$.

Dos variedades lineales $_1 + \mathcal{L}_1$ y $_2 + \mathcal{L}_2$ se dicen *ortogonale* si $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2^{\perp}$. En consecuencia, $\dim(\mathcal{L}_1) \leqslant \dim(\mathcal{L}_2^{\perp}) = n - \dim(\mathcal{L}_2)$ y por tanto

$$\dim(_1 + \mathcal{L}_1) + \dim(_2 + \mathcal{L}_2) \leqslant n.$$

Si $\dim(_1 + \mathcal{L}_1) + \dim(_2 + \mathcal{L}_2) > n$, diremos que $_1 + \mathcal{L}_1$ es *ortogonal* a $_2 + \mathcal{L}_2$ si $_1 + \mathcal{L}_1^{\perp}$ es ortogonal a $_2 + \mathcal{L}_2^{\perp}$ en el sentido anteriormente expuesto, es decir $\mathcal{L}_1^{\perp} \subset \mathcal{L}_2$.

EJEMPLO A. Si en $= \mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar habitual decimos que $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \ )$ es el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ habitual. En él consideramos las siguientes variedades lineales:

$$L_1 = (0, 0, 0) + L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3),$$
$$L_2 = (1, 2, 3) + L(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3),$$

$$L_3 = (0, 0, 0) + L(\vec{e}_1 - \vec{e}_2\,, \vec{e}_1 - \vec{e}_3),$$
$$L_4 = \{(\ , y,\ ) \in \mathbb{R}^3 : y - \ = 1\}.$$

Las variedades lineales L_1 y L_2 no tienen puntos en común, pero son ortogonales ya que

$$L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \subset L(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)^{\perp}.$$

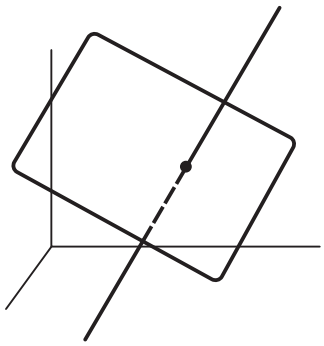
También L_1 y L_3 son ortogonales ya que $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ es ortogonal a $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ y a $\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ y se tiene

$$L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = L(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_3)^{\perp}.$$

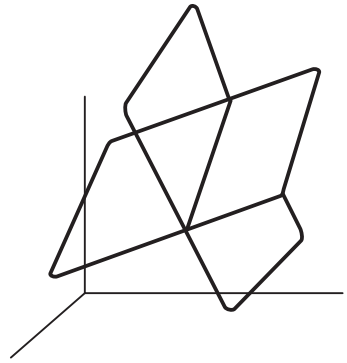
Las variedades lineales L_3 y L_4 tienen ambas dimensión 2 por lo que $\dim(L_3) + \dim(L_4) = 4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Como $L_4 = (0,\ 1,\ 0) + L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{e}_1)$ y $L(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_3)^{\perp} = L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ se tiene

$$L(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_3)^{\perp} \subset L(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1)$$

por lo que los planos L_3 y L_4 son ortogonales.



Recta y plano ortogonales



Planos ortogonales

i ra 10.9

* * *

Definición 10.3.2

Dado un espacio afín euclídeo $\mathbb{A} = (\mathcal{P},\ )$ una transformación afín en $\mathbb{A}$ se llama mo imiento si conserva las distancias entre puntos, es decir,

$$(\ (\ ),\ (\ )) = (\ ,\ )$$

para todo , $\in \mathcal{P}$.

Nota. Los movimientos en el espacio afin $\mathbb{R}^n$ reciben también el nombre de *i ometría* ; la palabra «isometría» proviene del griego y significa «igual medida».

Estudiaremos a continuación algunos ejemplos de movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de especial relevancia geométrica. Tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$ consideraremos la estructura afín euclídea habitual.

EJEMPLO B. En un plano, un *giro* o *rotación* de ángulo α alrededor de un punto (no necesariamente el origen de coordenadas) es un movimiento, que se denotará por $G_{,\alpha}$. Eligiendo un sistema de referencia $\{\ ;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ como en la figura adjunta, se tiene

$$G_{,\alpha}(\ ) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

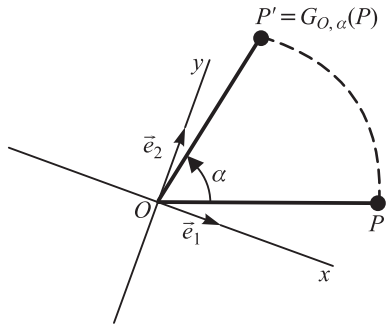


Figura 10.10

EJEMPLO C. Una *simetría ortogonal respecto a una recta r*, que denotaremos por $_r$, es un movimiento. Recordamos que el simétrico de un punto con respecto a r es un punto $'$ tal que el segmento $\overline{\ \ '}$ es perpendicular a r y r corta a $\overline{\ \ '}$ en su punto medio. Con la simetría respecto de una recta también se asocia a veces el nombre de *reflexión*.

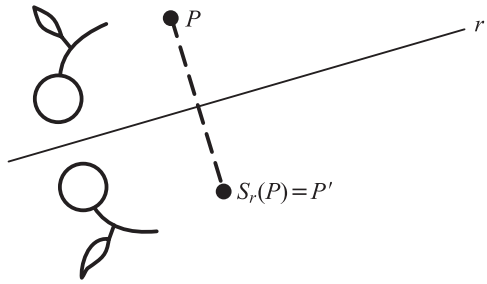


Figura 10.11

EJEMPLO D. Una *traslación* mediante un cierto vector $\vec{v}$, que denotaremos por $_{\vec{v}}$, es también un movimiento.

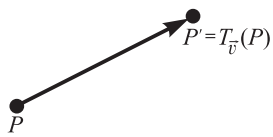
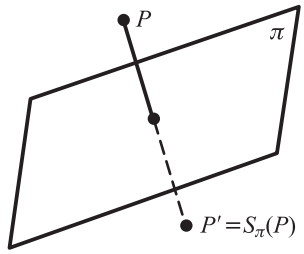


Figura 10.12

En este movimiento se produce un desplazamiento paralelo de todos los puntos según el vector $\vec{v}$.

EJEMPLO E. En el espacio, una *imetría on re e to a n lano* π, digamos $_{\pi}$, es un movimiento. El plano π divide al segmento $'$ en dos partes iguales siendo $'$ perpendicular a π, donde $'$ es la imagen de .



i ra 10.13

Proposición 10.3.3

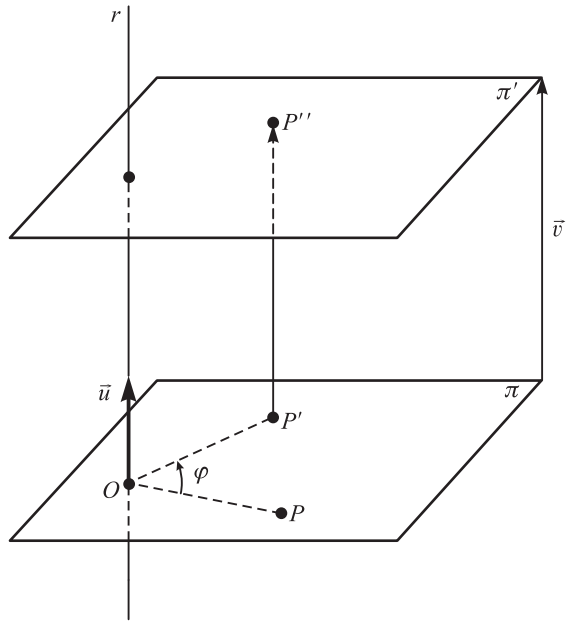
Si $_1$ y $_2$ son movimientos en un espacio afín euclídeo $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$, entonces la composición $_2 \circ _1$ es un movimiento en $\mathbb{A}$.

Demostración. Si , $\in \mathcal{P}$ entonces, por ser $_1$ y $_2$ movimientos se tiene que

$$(\ _2 \circ \ _1(\ ),\ \ _2 \circ \ _1(\ )) = (\ _1(\ ),\ \ _1(\ )) = (\ ,\ ).$$

■

EJEMPLO F. El movimiento que se produce en el espacio al subir por una escalera de caracol se denomina un *movimiento eli oi al*. El efecto de un movimiento helicoidal está producido por un giro de un cierto ángulo φ con respecto a una recta r seguido de una traslación de vector $\vec{v}$ en la dirección del eje de giro (ver figura 10.14). Este movimiento es la composición $_{\vec{v}} \circ G_{r,\varphi}$. Observar que los puntos de un plano π perpendicular a r se transforman en puntos de un plano π' paralelo a π. En la figura 10.14 el punto $''$ es el transformado de por el movimiento helicoidal.



i ra 10.14

Proposición 10.3.4

Sea $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ un espacio afín euclídeo y $\ : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ un movimiento con aplicación lineal asociada $\tilde{\ }: \ \to \ $. Entonces $\tilde{\ }$ es una aplicación ortogonal.

Demostración. Sean , dos puntos cualesquiera de $\mathcal{P}$ con $' = (\ )$ y $' = (\ )$ las imágenes de y , respectivamente, mediante . Entonces

$$\|\tilde{(\ \ )}\| = \|\overrightarrow{(\ )\ (\ )}\| = (\ ', \ ') = (\ , \ ) = \|\overrightarrow{\ \ }\|,$$

lo que prueba que $\tilde{\ }: \ \to \ $ conserva la longitud de los vectores y, por tanto, es ortogonal (ver Proposición 8.5.2). ■

Nota 1. Si es un movimiento en un espacio afín euclídeo $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ y denotamos por la matriz de $\tilde{\ }$ en una base ortonormal fijada de se tiene que $|\ | = \pm 1$ (ver sección 8.5). Si $|\ | = 1$ el movimiento se llama *ire to* y si $|\ | = -1$ el movimiento se llama *inver o*.

Nota 2. Es claro que los resultados del Capítulo 8 sobre aplicaciones ortogonales nos pueden ayudar ahora a clasificar los movimientos en $\mathbb{R}^n$. Es evidente que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ puede hacerse un estudio más geométrico de los movimientos.

* * *

10.4. ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Hemos dado en la sección 10.3 algunos ejemplos de movimientos en $\mathbb{R}^2$, pero ¿serán estos todos los movimientos posibles en el plano? Para responder a esta pregunta es necesario estudiar la composición de dos movimientos fijados de antemano ya que por la Proposición 10.3.3, la composición de movimientos es otro movimiento.

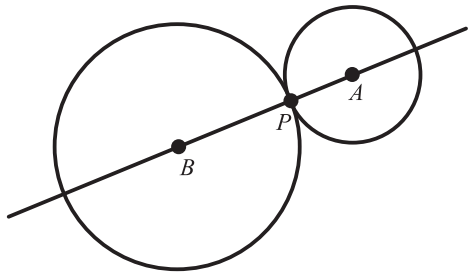
En el estudio de los movimientos es interesante considerar un tipo de puntos especiales que se denominan *nto i o* : un punto es un punto fijo de un movimiento si $(\ ) = $.

Todos los puntos son fijos para el movimiento identidad, mientras que las traslaciones no tienen ningún punto fijo. Un giro en el plano de centro tiene únicamente este punto como fijo y una simetría con respecto a una recta r deja a todos los puntos de r fijos.

Lema 10.4.1

Sea un movimiento de $\mathbb{R}^2$ con al menos dos puntos fijos y . Entonces, la recta r que pasa por y es una recta de puntos fijos de .

Demostración. Sea un movimiento con dos puntos fijos distintos y . Demostraremos que todos los puntos de la recta r que pasa por y son puntos fijos de . Sea $\in r$ y sea $' = (\ )$. Como es un movimiento $(\ , \ ) = (\ , \ ')$ y $(\ , \ ) = (\ , \ ')$. Por tanto, y $'$ deben estar en las circunferencias de centro y radio $(\ , \ )$ y de centro y radio $(\ , \ )$; como estas circunferencias se cortan únicamente en se ha de tener $' = $ (ver figura 10.15). Esto prueba que todos los puntos de r son fijos para la aplicación .



i ra 10.15 ■

Proposición 10.4.2

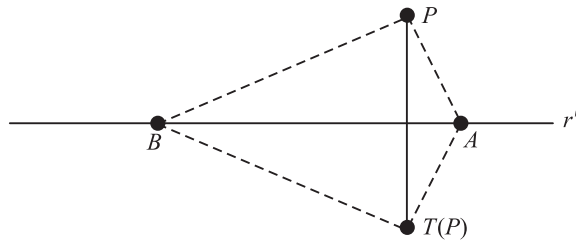
Si un movimiento en el plano tiene más de un punto fijo debe ser la identidad o una simetría con respecto de una recta que pasa por los puntos fijos.

Demostración. Sea un movimiento con dos puntos fijos y . Sea r la recta que los une. Por el Lema 10.4.1 la restricción de a r es la identidad en r. Si existiera $\in \mathbb{R}^2$ r que fuera punto fijo de , por la Proposición 10.2.5, sería la identidad en $\mathbb{R}^2$.

En otro caso ( ) $\neq$ para cada $\in \mathbb{R}^2$ r. Sea r' la recta mediatriz del segmento $\overline{\quad}$ ( ) (ver figura 10.16). Como es un movimiento

$$(\ , \ ) = (\ , \ ( )) \quad \text{y} \quad (\ , \ ) = (\ , \ ( )).$$

Por tanto y están en r', de donde se deduce que $r = r'$. Luego es la simetría con respecto a r (ver figura 10.16), lo que demuestra la proposición. ■



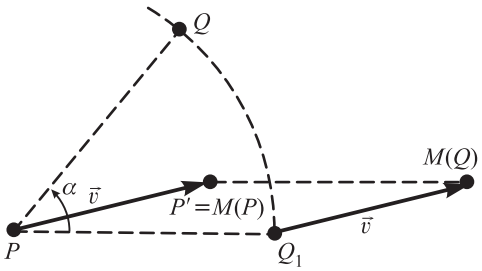
i ra 10.16

Teorema 10.4.3

Todo movimiento en un plano es o bien la composición de un giro y una traslación o bien la composición de una simetría con respecto a una recta, un giro y una traslación; el eje de simetría pasa por el centro del giro.

Demostración. Sea un movimiento cualquiera en el plano, un punto del plano y $' =$ ( ). Pongamos $\vec{v} = \overline{\quad}'$. Entonces $= ' - \vec{v} =$ $_{-\vec{v}}$ o ( ), es decir es un punto fijo para el movimiento $_{-\vec{v}}$ o .

Para determinar qué movimiento es tomemos otro punto de $\mathbb{R}^2$ tal que $\neq$. Sea $_1$ el punto de $\mathbb{R}^2$ tal que $_1 =$ ( ) $- \vec{v}$ (ver figura 10.17).



i ra 10.17

Entonces

$$0 < (,) = (_{-\vec{v}} \circ ( ), _{-\vec{v}} \circ ( )) = (, _1).$$

Por tanto, existe un giro $G_{,\alpha}$ de centro y ángulo α tal que $G_{,\alpha}(_1) =$. Ahora bien, la transformación geométrica

$$\varphi = G_{,\alpha} \circ _{-\vec{v}} \circ$$

es un movimiento con dos puntos fijos al menos, y . En consecuencia, por la Proposición 10.4.2 se tiene que $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ ó $\varphi = _r$, con $_r$ simetría con respecto a la recta r que une con . Así pues,

$$= _{\vec{v}} \circ G_{,-\alpha} \circ \varphi \tag{4.1}$$

lo que demuestra el teorema. ■

Observación. El orden de la composición en (4.1) es muy importante. Señalemos que la fórmula (4.1) se reduce a $= \varphi$ si y son dos puntos fijos de ya que en este caso $\vec{v} = \vec{0}$ y $\alpha = 0^o$.

Una vez establecido el Teorema 10.4.3, la clasificación de todos los movimientos en el plano requiere del estudio de las posibles composiciones de los movimientos que allí intervienen. Esto es lo que haremos a continuación.

Proposición 10.4.4

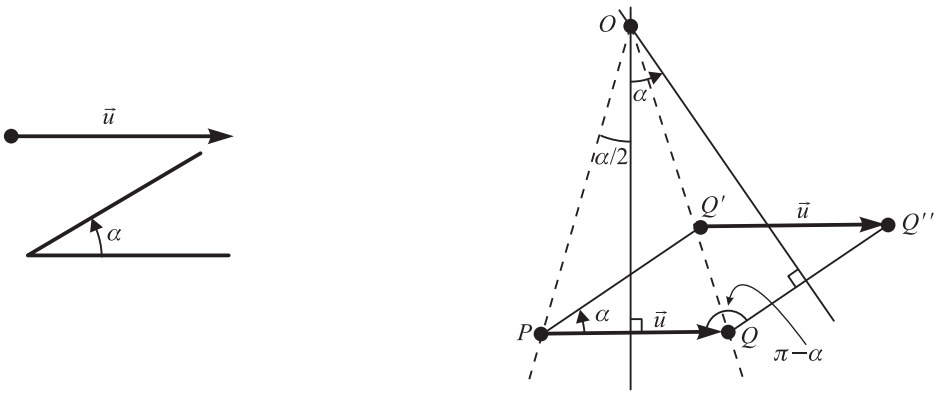
La composición de un giro y una traslación es otro giro del mismo ángulo.

Demostración. Sean $G_{,\alpha}$ y $_-$ el giro y la traslación dados (ver figura 10.18). Sea

$$= _-( ) = + \vec{}\,,$$
$$' = G_{,\alpha}( ),$$
$$'' = _-(') = ' + \vec{}\,.$$

Sea el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos y $''$. Observar que, por construcción, $G_{,\alpha}( ) =$ (figura 10.18). Por otro lado

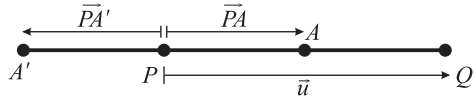
$$_- \circ G_{,\alpha}( ) = _-( ) = ,$$



i ra 10.18

luego los movimientos $G_{,\alpha}$ y $-\circ G_{,\alpha}$ coinciden en el punto . Además, por el Lema 10.2.4, $\widetilde{-\circ G_{,\alpha}} = \tilde{-}\circ \tilde{G}_{,\alpha}$ y como $\tilde{-} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ se tiene $\widetilde{-\circ G_{,\alpha}} = \tilde{G}_{,\alpha}$. Por el Corolario 10.2.3 se tiene $-\circ G_{,\alpha} = G_{,\alpha}$.

El razonamiento anterior es posible siempre que el punto exista. Esto sucede si $\alpha \neq 180^{\circ}$. Si $\alpha = 180^{\circ}$ sea el punto medio del segmento .



i ra 10.19

Se tiene que $G_{,\alpha}(\ ) =$ y que

$$-\circ G_{,\alpha}(\ ) = -(\ ') = \ ' + \vec{\ } = \ .$$

Luego los movimientos $G_{,\alpha}$ y $-\circ G_{,\alpha}$ coinciden en el punto cuando $\alpha = 180^{\circ}$. Además, $\widetilde{G_{,\alpha}} = \widetilde{G_{,\alpha}}$. Por el Corolario 10.2.3 se tiene $-\circ G_{,\alpha} = G_{,\alpha}$. ■

Observación. El centro del nuevo giro que se obtiene en la Proposición 10.4.4 es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos y $''$, donde $= -(\ )$ y $'' = -\circ G_{,\alpha}\circ -(\ )$, siempre que $\alpha \neq 180^{\circ}$. Si $\alpha = 180^{\circ}$, el centro es el punto medio de .

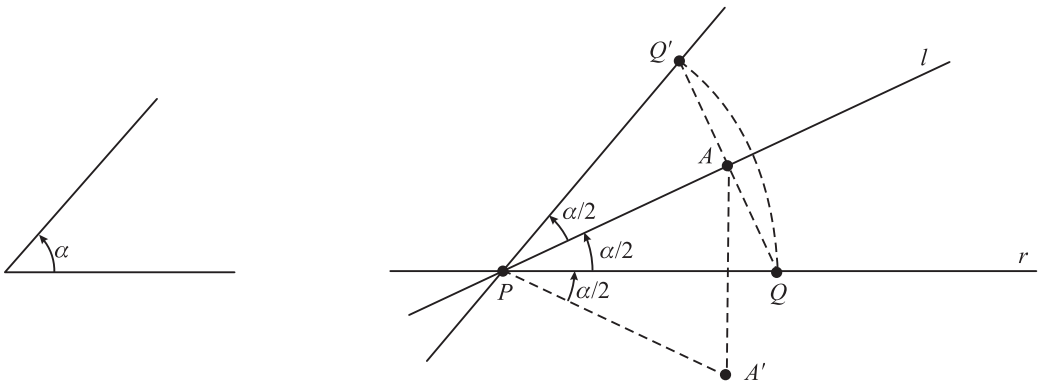
Proposición 10.4.5

La composición de una simetría y un giro de centro perteneciente al eje de simetría es otra simetría.

Demostración. Sean $_r$ y $G_{,\alpha}$ con $\in r$, la simetría con respecto a la recta r y el giro dados. Sea otro punto de r distinto de y $' = G_{,\alpha}(\ )$ (ver figura 10.20). Sea el punto medio del segmento $'$ y l la recta que une y . Se tiene que l es la mediatriz del segmento $'$ y a su vez bisectriz del ángulo $\widehat{\ \ '}$.

Entonces

$$G_{,\alpha}\circ {}_r(\ ) = \ = {}_l(\ )$$
$$G_{,\alpha}\circ {}_r(\ ) = \ ' = {}_l(\ ).$$



i ra 10.20

Además, si $_r(\ ) = \ '$ se tiene

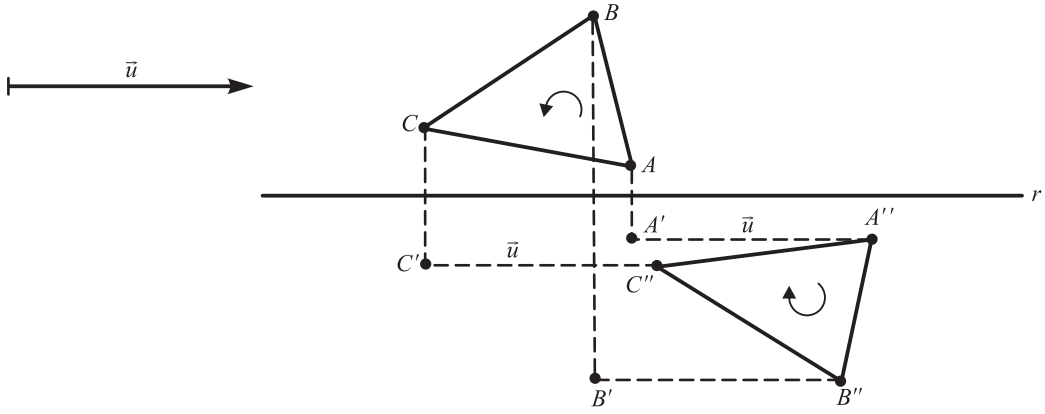
$$G_{\ ,\alpha} \circ \ _r(\ ) = G_{\ ,\alpha}(\ ') = \ = \ _l(\ ).$$

En consecuencia, el movimiento $\ _l^{-1} \circ G_{\ ,\alpha} \circ \ _r$ tiene tres puntos fijos no alineados: , y . Por la Proposición 10.2.5 debe ser la identidad y por tanto $G_{\ ,\alpha} \circ \ _r = \ _l$. ■

Observación. La recta de la nueva simetría axial en la proposición anterior es la bisectriz del ángulo $\widehat{\ \ '}$, con $\ ' = G_{\ ,\alpha}(\ )$ y $\ \in r, \ \neq \ .$

De todos los casos posibles que pueden ocurrir en el Teorema 10.4.3 nos queda por estudiar la composición de una simetría y una traslación.

Comenzaremos suponiendo que el vector de traslación $\bar{\ }$ es *aralelo* a la recta de simetría *r*. En la figura 10.21 se observa que este movimiento cambia la orientación y, sin embargo, no es una simetría axial. Estamos ante un nuevo movimiento al cual damos el nombre de *imetría e li ante*.

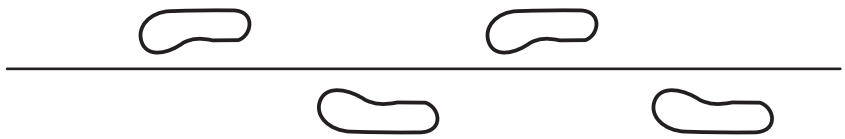


i ra 10.21

Definición 10.4.6

La composición de una simetría de recta r y una traslación de vector $\vec{}$ paralelo a r se denomina simetr a deslizante y se representa por $_{r,\vec{}}$.

El lector puede visualizar una simetría deslizante como las huellas que una persona deja en la nieve al caminar en línea recta.



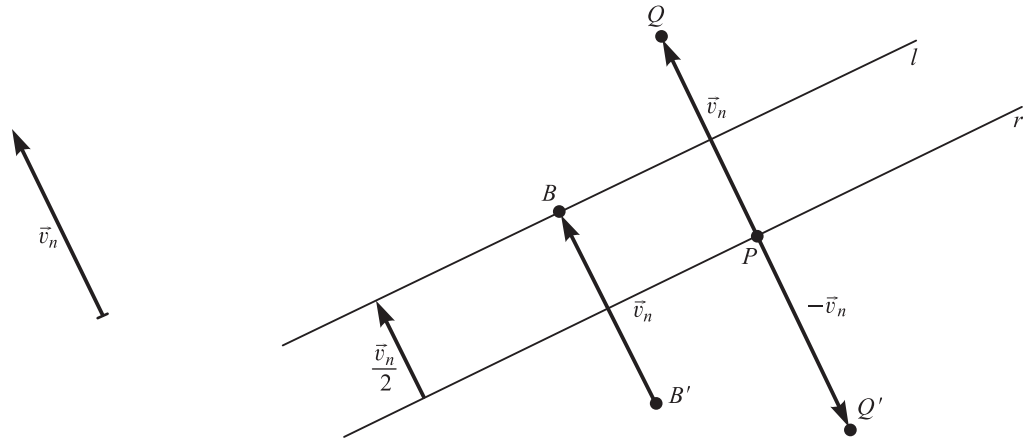
i ra 10.22

Estudiaremos ahora el resultado de, en general, componer una simetría de eje de simetría r con una traslación de vector cualquiera $\vec{v}$. Sea $_r$ una tal simetría y $_{\vec{v}}$ la traslación. Sea $\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}_n$ la descomposición de $\vec{v}$ es un vector $\vec{v}$ paralelo a r y un vector $\vec{v}_n$ perpendicular (o normal) a r. Entonces:

$$_{\vec{v}} \circ {}_r = {}_{\vec{v}} \circ {}_{\vec{v}_n} \circ {}_r .$$

Sea $\in r$, $= {}_{\vec{v}_n}(\ )$ y l la bisectriz del segmento $\overline{\ \ }$. Entonces (ver figura 10.23)

$$_{\vec{v}_n} \circ {}_r(\ ) = {}_{\vec{v}_n}(\ ) = \ = {}_l(\ )$$
$$_{\vec{v}_n} \circ {}_r(\ ) = {}_{\vec{v}_n}(\ ') = \ = {}_l(\ ).$$



i ra 10.23

Sea un punto de l distinto del punto medio del segmento $\overline{\ \ }$, y $' = {}_r(\ )$. Se tiene

$$_{\vec{v}_n} \circ {}_r(\ ) = {}_{\vec{v}_n}(\ ') = \ = {}_l(\ ).$$

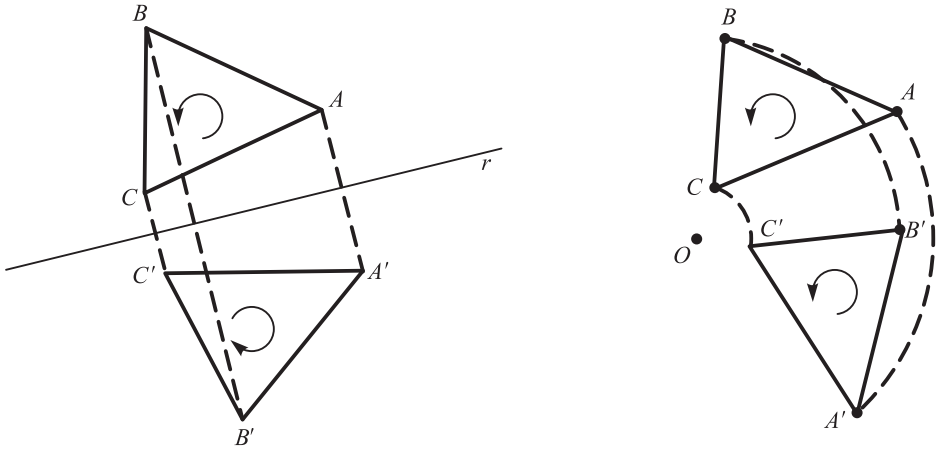
Tenemos tres puntos fijos, , y , no alineados, del movimiento $_l^{-1} \circ _{\vec{v}_n} \circ _r$. Por la Proposición 10.2.5 debe ser la identidad y por tanto $_{\vec{v}_n} \circ _r = _l$.

Así, en general, tenemos el siguiente resultado, según $\vec{} = \vec{0}$ ó $\vec{} \neq \vec{0}$.

Proposición 10.4.7

La composición de una simetría y una traslación es o bien una simetría o bien una simetría deslizante.

Observamos en la figura 10.24 que las simetrías cambian la orientación de las figuras, mientras que los giros no la cambian. Es claro que tampoco la cambian las traslaciones.



i ra 10.24

Del Teorema 10.4.3 y de las Proposiciones 10.4.4, 10.4.5 y 10.4.7 se deduce el siguiente resultado:

Teorema 10.4.8 (Descripci n de los mo imientos en un plano)

Todo movimiento en un plano es o bien la *i enti a* , o una *tra la i n* o una *rota i n* (movimientos *ire to* , es decir, que no cambian la orientación) o bien una *imetría* o una *imetría e li ante* (movimientos *inver o* , es decir, que cambian la orientación).

El lector puede ahora preguntarse cuál es el resultado de componer dos movimientos cualesquiera que no coinciden con los realizados en las proposiciones anteriores. Por ejemplo: ¿cuál es el resultado de componer dos giros? Es conveniente «jugar» un poco con este tipo de composiciones. Algunos de estos «juegos» se proponen como ejercicios al final de esta sección.

EJERCICIOS 10.4

1. Demostrar que la composición de dos simetrías en un plano, cuyos ejes se cortan en un punto es una rotación. ¿Cuáles son el centro y el ángulo de esta rotación?

2. Estudiar la composición de dos simetrías de ejes paralelos.

3. Demostrar que la composición de una simetría y un giro en un plano es una simetría o una simetría deslizante. ¿Cuál es el eje y cuál es el vector de la simetría deslizante?

4. a) Demostrar que la composición de dos giros de 90º en el mismo sentido alrededor de dos puntos distintos y es un giro de 180º alrededor del centro de uno de los cuadrados que tiene como lado.

   b) Estudiar la composición de dos giros cualesquiera en el mismo sentido.

5. Demostrar que la composición de tres simetrías de ejes concurrentes es otra simetría. ¿Cuál es el eje de esta nueva simetría?

6. Estudiar la composición de tres simetrías de ejes paralelos.

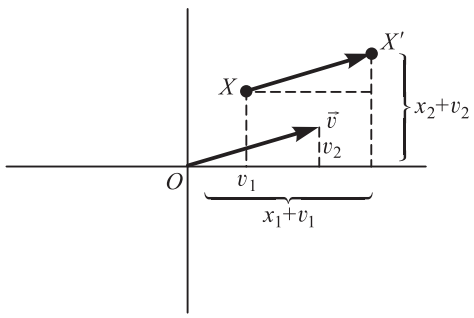
7. Un giro de 180º alrededor de un punto se dice también una *imetría e entro* . Demostrar que la composición de dos simetrías de centros $_1$ y $_2$, respectivamente, es una traslación de vector $2\overrightarrow{_1\ _2}$.

10.5. ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^2$

El primer objetivo de esta sección es aprender a escribir las ecuaciones de todos los movimientos en el plano, cuya descripción se ha dado en el Teorema 10.4.8. A continuación nos planteamos el problema recíproco, es decir, dadas las ecuaciones de un movimiento en el plano determinar qué tipo de movimiento es. Esto nos permitirá obtener de nuevo, ahora de manera analítica, el resultado expuesto en el Teorema 10.4.8.

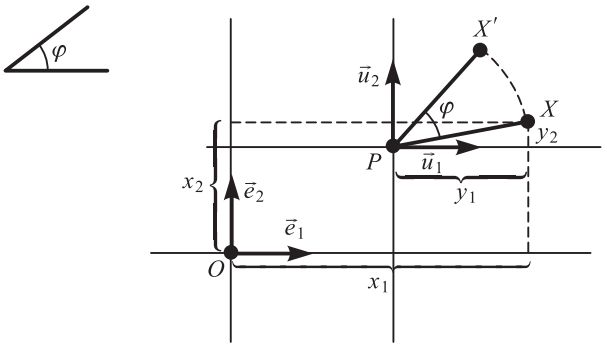
EJEMPLO A. *ra la i n e ve tor* $\vec{v} = (v_1, v_2)$: cualquier punto $= (\ _1,\ _2)$ se transforma en otro punto $_{\vec{v}}(\ ) = \ ' = (\ '_1,\ '_2)$ tal que

$$\begin{pmatrix} '_1 \\ '_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _1 + v_1 \\ _2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _1 \\ _2 \end{pmatrix}.$$



i ra 10.25

EJEMPLO B. *Giro o rota i n e entro = y ng lo φ.*



i ra 10.26

Si elegimos el sistema de referencia $\{\ ;\vec{}_1,\vec{}_2\}$ como muestra la figura 10.26, la imagen de un punto de coordenadas (y_1, y_2) en este sistema de referencia es un punto $' = (y_1', y_2')$ tal que

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Si $= (\ _1,\ _2)$ y $' = (\ '_1,\ '_2)$ en el sistema de referencia canónico $\{\ ;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_1 - {}_1 \\ {}_2 - {}_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} '_1 - {}_1 \\ '_2 - {}_2 \end{pmatrix},$$

que sustituido en la expresión anterior nos permite obtener:

$$\begin{pmatrix} '_1 \\ '_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO C. *allar la e a ione el giro e entro = (1, 2) y ng lo $\varphi = \pi/4$.*

Por tratarse de un giro de ángulo $\pi/4$ tendremos:

$$\begin{pmatrix} '_1 \\ '_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}.$$

A continuación calculamos $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ imponiendo que $= (1, 2)$ sea un punto fijo de este movimiento:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}/2 \\ 2 - 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}/2 \\ 2-3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO D. *Simetría con respecto a una recta r.* Supongamos que r tiene por ecuación $y = mx + b$; si elegimos el sistema de referencia $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, donde $O = (0, b) \in r$, $\vec{u}_1$ es un vector director unitario de r y $\vec{u}_2$ es un vector unitario perpendicular a r, de manera que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tengan la misma orientación[1], la imagen de un punto X de coordenadas (y_1, y_2) en este sistema de referencia es $X' = S_r(X)$ de coordenadas (y'_1, y'_2) en este mismo sistema tal que

$$S_r \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

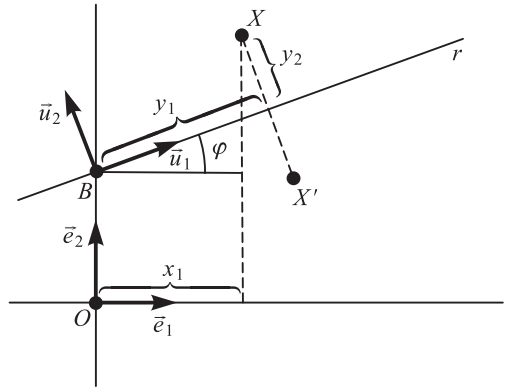


Figura 10.27

Para pasar al sistema de referencia $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ realizamos un giro de ángulo $(-\varphi)$, donde $\operatorname{tg}\varphi = m$, y una traslación de vector $(0, -b)$, de manera que si (x_1, x_2) son las coordenadas de X en este sistema de referencia se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix};$$

de la misma manera, si (x'_1, x'_2) son las coordenadas de X' en el sistema de referencia canónico se tiene

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (5.1) encontramos que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

[1] Dos bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma orientación si la matriz del cambio de base tiene determinante positivo, como se definió en la sección 8.6.

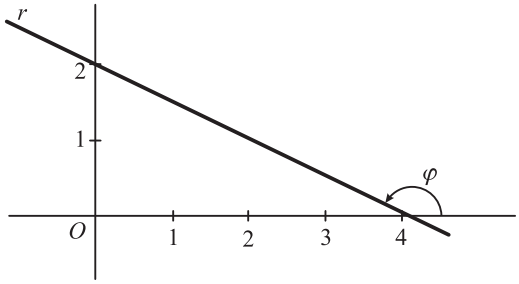
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO E. *allar la e re i n analíti a e la imetría on re e to a la re ta r e e a i n* $+ 2y = 4$.

De la figura 10.28 se deduce que

$$\cos\varphi = \frac{-2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



i ra 10.28

Por tanto

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{3}{5} \quad , \quad \operatorname{sen} 2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = -\frac{4}{5}.$$

Usando el resultado del ejemplo D las ecuaciones de esta simetría son de la forma

$$\begin{pmatrix} {}'_1 \\ {}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ponemos que $= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un punto fijo de este movimiento para escribir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de esta simetría son

$$\begin{pmatrix} {}'_1 \\ {}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO F. Vamos a mostrar cómo pueden obtenerse las ecuaciones de una simetría con respecto a una recta r de forma geométrica. La imagen de un punto es un punto $'$ que satisface

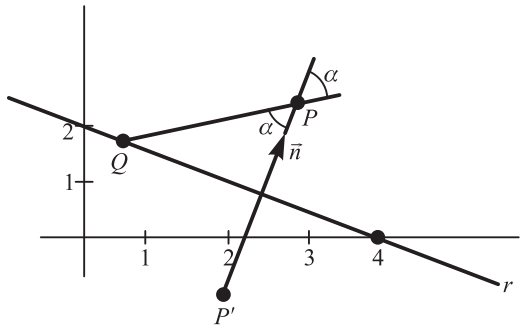
$$' = - \lambda\vec{n}$$

donde $\vec{n}$ es un vector unitario normal a r (ver figura 10.29) y $\lambda = \|\overrightarrow{\quad}'\| = 2\ (\ \ , r)$. Para calcular λ tomamos un punto cualquiera de la recta r y observamos que

$$(\ \ , r) = \|\overrightarrow{\quad}\| \cos\alpha = \|\overrightarrow{\quad}\| \frac{(\overrightarrow{\quad}, \vec{n})}{\|\overrightarrow{\quad}\|\,\|\vec{n}\|} = (\overrightarrow{\quad}, \vec{n}).$$

La ecuación de la simetría es

$$' = \quad - 2(\overrightarrow{\quad}, \vec{n})\vec{n}.$$



i ra 10.29

En el ejemplo E, si $= (\ _1, \ _2)$, $' = (\ '_1, \ '_2)$, tomamos $= (0, 2)$ y observamos que $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$; tenemos

$$\begin{pmatrix} ' \\ '_1 \\ '_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix} - 2\left(\begin{pmatrix} \\ _1 - 0 \\ _2 - 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \\ _1 + 2 \\ 2\ _1 + 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ _2 - 4 \\ _2 - 8 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix}.$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo E.

EJEMPLO G. *imetría e li ante e e e r y ve tor* $\vec{v}$: si r: $y = m\ + b$, utilizando el resultado obtenido en el ejemplo D y el hecho de que $_{r,\vec{v}} = \ _{\vec{v}}\,^{\circ}\ _r$ se obtiene que si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ entonces

$$_{r,\vec{v}}\begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix} = \ _{\vec{v}}\,^{\circ}\ _r\begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ _1 \\ _2 \end{pmatrix}.$$

Recordar que $\vec{v}$ es paralelo a la recta r y que $m = \operatorname{tg}\varphi$.

EJEMPLO H. *Encontrar la expresión analítica de la simetría deslizante de eje $y = x - 2$ y vector de deslizamiento $\vec{v} = (3, 3)$.*

Como $\varphi = \pi/4$ del ejemplo G se deduce que las ecuaciones buscadas son de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

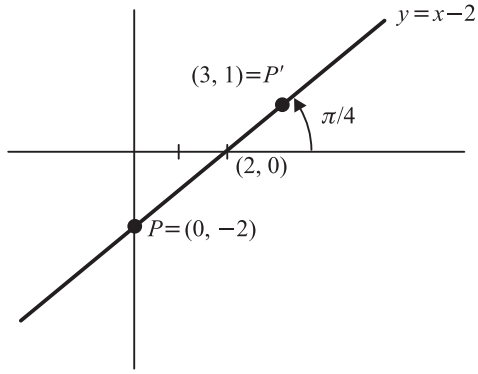


Figura 10.30

Calcularemos $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ si conocemos la imagen de un punto ; si tomamos $= (0, -2)$,

$$t_{r,\vec{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la expresión analítica de esta simetría deslizante es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

* * *

Con los ejemplos anteriores hemos aprendido a encontrar las ecuaciones de los movimientos en el plano. A continuación nos planteamos el problema recíproco, es decir, dadas las ecuaciones de un movimiento en el plano determinar qué tipo de movimiento es.

Sea $\mathcal{R} = \{ \ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal en el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$. Según la fórmula (2.1) la ecuación matricial de un movimiento de $\mathbb{R}^2$ en la referencia $\mathcal{R}$ se escribe

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Como es un movimiento, por la Proposición 10.3.4, es una matriz ortogonal, es decir $^t = {}_2 = {}^t$. Por el Teorema 8.6.1 podemos escribir $= {}^t$ con $\in {}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ortogonal y de la forma

$$ {}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad {}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.2} $$

La prueba del Teorema 8.6.1 muestra que en el caso ${}_1$ podemos elegir $=$.

Sea

$$ = \begin{pmatrix} {}_{11} & {}_{12} \\ {}_{21} & {}_{22} \end{pmatrix} $$

y definamos los vectores

$$ \vec{}_1 = {}_{11}\vec{e}_1 + {}_{21}\vec{e}_2 $$
$$ \vec{}_2 = {}_{12}\vec{e}_1 + {}_{22}\vec{e}_2. $$

Como es ortogonal, $\mathcal{R}' = \{\ ;\ \vec{}_1,\ \vec{}_2\}$ es un sistema de referencia ortonormal. Si $\overrightarrow{\ } = y_1\vec{}_1 + y_2\vec{}_2$, $\overrightarrow{\ }' = y'_1\vec{}_1 + y'_2\vec{}_2$ en la base $\{\vec{}_1, \vec{}_2\}$ tenemos

$$ \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} {}'_1 \\ {}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}. $$

De (5.1) se deduce que las ecuaciones del movimiento en $\mathcal{R}'$ son

$$ \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} {}'_1 \\ {}'_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + {}^t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{5.3} $$

en donde es una de las matrices de la lista (5.2) y

$$ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. $$

Para estudiar qué tipo de movimiento es estudiaremos la variedad lineal L de puntos fijos de . Cada $= ({}_1, {}_2)^t \in L$ es solución del sistema lineal

$$ \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} $$

o también

$$ (\quad - \quad) \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{5.4} $$

Según el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) el sistema (5.4) puede tener o no solución según los valores del rango de la matriz $-$ y del rango de la matriz ampliada con los términos independientes. Con $\vec{a} = (a_1, a_2)^t$ escribimos $(\quad - \quad |\vec{a})$ para indicar la matriz ampliada.

Puesto que $\quad = \quad ^t$ se tiene $r(\ - \ ) = r(\ - \ )$, con $\quad$ como en (5.2). Si $\varphi = 0$ en (5.2)

$$= \ _1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad - \ _1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y entonces $r(\ - \ ) = r(\ - \ _1) = 0$. Si

$$= \ _2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad - \ _2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene $r(\ - \ ) = r(\ - \ _2) = 1$. Finalmente si $\varphi \neq 0$ en (5.2)

$$| \ - \ _1| = \begin{vmatrix} 1 - \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & 1 - \cos\varphi \end{vmatrix} = (1 - \cos\varphi)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi) \neq 0$$

y por tanto $r(\ - \ ) = r(\ - \ _1) = 2$.

Todas las posibilidades para $r(\ - \ )$ y $r(\ - \ |\vec{a})$ se describen en el cuadro siguiente:

Caso	$r(I - T)$	$r(I - T\|\vec{a})$
I	0	0
		1
II	1	1
		2
III	2	2

i ra 10.31

dentidad traslaci n

Si $r(\ - \ ) = 0$ se tiene que $\quad = \quad$ es la matriz identidad. Si $\vec{a} = (0, 0)^t$, $r(\ - \ |\vec{a}) = 0$ y el movimiento es la *i enti a* . Si $\vec{a} \neq \vec{0}$, el movimiento es una *tra la i n* de vector $\vec{a}$. Observar que todos los movimientos de este caso son *ire to* ya que $| \ | = 1 > 0$.

imetr a simetr a deslizante

Si $r(\ - \ ) = 1 = r(\ - \ |\vec{a})$ el sistema (5.4) tiene una recta de soluciones y, por tanto, el movimiento tiene una recta de puntos fijos. Si $\quad$ es uno de estos puntos fijos, en el sistema de referencia $\{ \ ; \vec{}_1, \vec{}_2\}$ las ecuaciones del movimiento son, de acuerdo con (5.3),

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ya que $\quad_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la única matriz de (5.2) que satisface $r(\quad - \quad_2) = 1$. Tenemos, por tanto, una *imetría on re e to a la re ta e nto* fijos. Observar que en este caso se ha de tener $b_1 = 0$ en la ecuación (5.3) ya que el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \quad_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

debe se compatible.

Si $r(\quad - \quad) = 1$ pero $r(\quad - \quad |\vec{a}) = 2$ el sistema (5.4) no tiene soluciones y, por tanto, el movimiento no posee puntos fijos. En este caso $r(\quad - \quad_2|\vec{b}) = 2$ ya que si $r(\quad - \quad_2|\vec{b})$ fuera 1, la ecuación $(\quad - \quad_2)\,\vec{y} = \vec{b}$ sería compatible y también lo sería $\quad^t(\quad - \quad)\vec{\quad} = \quad^t\vec{a}$ ya que pondríamos $\vec{\quad} = \quad \vec{y}$ como solución, y como $\quad^t$ es invertible, $(\quad - \quad)\vec{\quad} = \vec{a}$ sería compatible, lo que implicaría $r(\quad - \quad |\vec{a}) = 1$.

En este caso, en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{\quad ; \vec{\quad}_1, \vec{\quad}_2\}$ podemos escribir el movimiento como

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] \tag{5.5}$$

donde necesariamente $b_1 \neq 0$ porque $r(\quad - \quad_2|\vec{b}) = 2$.

Como

$$r\left(\quad - \quad_2 \middle| \begin{matrix} 0 \\ b_2 \end{matrix} \right) = r\left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ b_2 \end{matrix} \right) = 1 = r(\quad - \quad_2)$$

la expresión entre corchetes en (5.5) son las ecuaciones de una simetría con respecto a un eje que tiene como vector director $\vec{\quad}_1$ (ver el caso $r(\quad - \quad) = 1 = r(\quad - \quad |\vec{a})$).

Por tanto, (5.5) es la composición de una simetría con una traslación de vector $\vec{b} = b_1\vec{\quad}_1$, que es paralelo a $\vec{\quad}_1$: se trata de una *imetría e li ante*.

La descomposición de una simetría deslizante como una simetría y una traslación no es única; solo existe unicidad si el vector de traslación es paralelo al eje de simetría y en este caso la descomposición de la simetría deslizante se dice *an ni a*.

En este caso II se tiene $|\quad| = |\quad| = -1 < 0$ por lo que este movimiento es *inver o*.

iro

Si $r(\quad - \quad) = 2 = r(\quad - \quad |\vec{a})$ el movimiento posee un único punto fijo que es la solución del sistema (5.4). En el sistema de referencia $\mathcal{R}'' = \{\quad ; \vec{\quad}_1, \vec{\quad}_2\} = \{\quad ; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ya que es la identidad, las ecuaciones del movimiento son de la forma

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

con $\varphi \neq 0$ y, por tanto, el movimiento es un *giro e ng lo φ on entro* . Observar que este movimiento es *ire to* ya que $|\quad| = |\quad| = \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1 > 0$.

A continuación resumimos los resultados anteriores en el siguiente cuadro:

T	$r(I-T)$	$r(I-T\|A)$	Movimiento $P' = A + T(P)$
I $\|T\| > 0$	0	0 1	*Identidad* *Traslación*
Simetría respecto a una recta: $\|T\| < 0$	1	1 2	*Simetría* respecto de la recta de puntos fijos. *Simetría deslizante*: composición de simetría y traslación paralela al eje de simetría.
Giro o rotación: $\|T\| > 0$	2	2	*Giro* en torno al punto fijo.

i ra 10.32

* * *

Para finalizar esta sección daremos algunos ejemplos de determinación de movimientos en el plano. A la vez aprenderemos a encontrar los elementos geométricos de cada uno de ellos, es decir, el vector de traslación si se trata de una traslación, el centro de giro y su ángulo si se trata de un giro, la recta de simetría si se trata de una simetría, o la descomposición canónica si se trata de una simetría deslizante.

Para referencias futuras diremos que una *bvarie a lineal* L en un espacio afín es *invariante* mediante una aplicación afín si $(L) \subset L$. En el plano, y dejando a un lado el plano, las subvariedades lineales invariantes pueden ser puntos o rectas. Observar que en el plano hay movimientos que no tienen puntos fijos, pero que poseen subvariedades lineales invariantes: ¿cuáles?

EJEMPLO I. *t iar el movimiento ya e re i n e*

$$\begin{pmatrix} ' \\ 1 \\ ' \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $| \quad - \quad | = \begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0$, $r(\quad - \quad) = 2$ y se trata de un giro. El ángulo de giro φ satisface $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y tenemos entonces $\varphi = -60^{\circ}$. El punto fijo $= (\ _1, \ _2)^t$ es el centro de giro y satisface la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Despejando se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

* * *

EJEMPLO J. *t iar el movimiento ya e re i n e*

$$\begin{pmatrix} ' \\ 1 \\ ' \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $- = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(-) = 1$ y puesto que $(- \mid) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(- \mid) = 1$; se trata, entonces, de una simetría. El eje de simetría es el conjunto de los puntos fijos y, por tanto, tiene por ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad {}_1 = 1.$$

EJEMPLO K. *t iar el movimiento ya e re i n e*

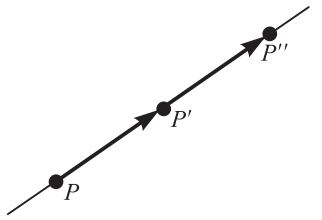
$$\begin{pmatrix} ' \\ 1 \\ ' \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $| - | = \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 + \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$, $r(-) = 1$ y puesto que

$$(- \mid) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 + \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(- \mid) = 2$. Se trata de una simetría deslizante. Para calcular el eje de simetría procedemos como sigue: si es un punto del eje de simetría, su imagen $'$ pertenece también al eje de simetría y $''$, la imagen de $'$, pertenece también al eje de simetría de manera que

$$\overrightarrow{\ \ '} = \overrightarrow{' \ ''} = \ + \ (\ ') - \ - \ (\ ) = (\overrightarrow{\ \ '}).$$



i ra 10.33

Por tanto, $\overrightarrow{\ \ '}$ es un autovector de de autovalor 1 y se tiene que

$$\vec{0} = (\ - \ )(\overrightarrow{\ \ '}) = (\ - \ )(\ + \ (\ ) - \ ) = (\ - \ )(\ ) + (\ - \ )^2(\ )$$

que es la ecuación que satisface el eje de simetría.

En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 - 1 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 - 1 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 - 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = (2 - \sqrt{3})\ {}_1 - \ {}_2.$$

Las ecuaciones paramétricas del eje de simetría son

$$r\colon (1/2, 0) + t(1, 2 - \sqrt{3}).$$

El vector de la traslación es $\vec{v} = \overrightarrow{\ \ '}$, donde es cualquier punto del eje de simetría; si tomamos $= (1/2, 0)$,

$$' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

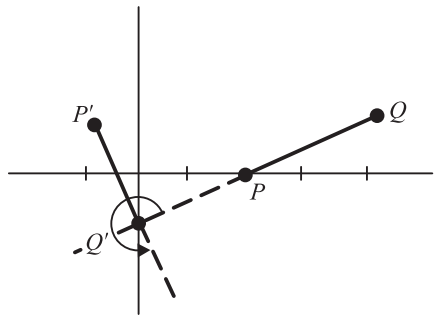
$$\vec{v} = \overrightarrow{\ \ '} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

* * *

EJEMPLO L. *n ontrar, i e i te, n giro e lleve* $= (2, 0)$ *en* $' = (-1, 1)$ *y* $= (4, 1)$ *en* $' = (0, -1)$.

Puesto que

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{\ \ }, \overrightarrow{\ \ '}) = \frac{((2, 1), (1, -2))}{5} = 0$$



i ra 10.34

del dibujo deducimos que

$$\sphericalangle(\overrightarrow{\ \ }, \overrightarrow{\ \ '}) = \frac{3\pi}{2}.$$

La ecuación del giro toma la forma

$$\begin{pmatrix} ' \\ 1 \\ ' \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si existe un giro satisfaciendo las condiciones dadas se ha de tener

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si estas dos ecuaciones producen el mismo valor de $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ existe el giro buscado; así es en este caso y se tiene $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} ' \\ {}_1 \\ ' \\ {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}.$$

Nota. Este problema también puede resolverse imponiendo

$$' = \quad + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

y

$$' = \quad + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

y calculando y φ para que las cuatro ecuaciones anteriores sean compatibles.

EJERCICIOS 10.5

1. Encontrar la expresión analítica de los siguientes movimientos:
   a) Giro de centro (1, 0) y ángulo $3\pi/4$.
   b) Simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2 + y = 3$ y que transforma (2, 1) en (1, 0).
   c) Giro de ángulo $\pi/3$ que lleve (2, 1) en (1, 0).
   d) La composición de los movimientos de a) y b).

2. Estudiar los siguientes movimientos del plano, hallando su tipo, subvariedades invariantes y elementos geométricos.

   a) $${}_1\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}.$$

b) $_2\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$.

c) $_3 = \ _2 \circ \ _1$ y $\ _4 = \ _1 \circ \ _2$.

3. Determinar todos los movimientos que transforman (1, 0) en (2, 1) y (0, 1) en (1, 0), indicando sus elementos geométricos.

4. Averiguar todos los movimientos del plano que conmutan con la simetría de eje $-2y = 1$.

5. Encontrar todos los movimientos del plano que conmutan con:

   a) Traslación de vector $\vec{}_0$.

   b) Giro de ángulo π y centro $_0$.

6. Probar que todo movimiento del plano es la composición de tres simetrías si $|\ | < 0$ y de dos simetrías si $|\ | > 0$.

10.6. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LOS MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

El objetivo de esta sección es realizar un estudio geométrico de los movimientos en el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ a partir de sus puntos fijos.

En lo que sigue llamaremos *re le i n* (en $\mathbb{R}^3$) a toda simetría respecto de un plano (ver ejemplo E de la sección 10.3). Si el plano de simetría es π, escribiremos $_\pi$ para denotar esta reflexión. Observar que $_\pi \circ \ _\pi = \mathrm{Id}$. Los resultados siguientes los usaremos para describir geométricamente los movimientos en $\mathbb{R}^3$ como composición de a lo sumo cuatro reflexiones.

Lema 10.6.1

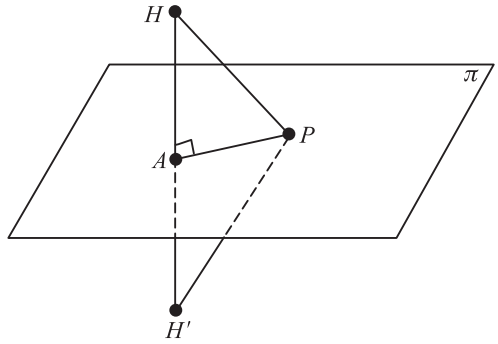
Sea un movimiento de $\mathbb{R}^3$ con al menos un punto fijo . Si $\in \mathbb{R}^3$ es tal que $' = (\ ) \neq$, entonces el plano que biseca ortogonalmente al segmento $\overline{\ \ '}$ contiene a .

Demostración. Sea el punto medio del segmento $\overline{\ \ '}$ y π el plano que biseca ortogonalmente al segmento $\overline{\ \ '}$ (ver figura 10.35). Entonces $\in \pi$ y $\pi = \ + \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} \perp \overrightarrow{\ \ }\}$. Como

$$(\ ,\ ) = (\ (\ ),\ (\ )) = (\ ,\ ')$$

el triángulo $\widehat{\ \ '}$ es isósceles. Luego la altura desde el vértice es el segmento $\overline{\ \ }$. Por tanto

$$= \ + \overrightarrow{\ \ } \in \ + \mathcal{L} = \pi. \qquad \blacksquare$$



i ra 10.35

Definición 10.6.2

Una colección de $n + 1$ puntos $\{ _1, _2, ..., _{n+1}\}$ en un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P},)$ de dimensión n se dice en posici n general si la colección de vectores $\{\overrightarrow{ _1 _2}, ..., \overrightarrow{ _1 _{n+1}}\}$ es una base de .

El siguiente resultado generaliza la Proposición 10.2.5.

Proposición 10.6.3

Sea una transformación afín de un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathcal{P},)$ en sí mismo con $\mathbb{A}$ de dimensión n. Si $ _1, _2, ..., _{n+1}$ son $n + 1$ puntos de $\mathcal{P}$ en posición general tales que $(_i) = _i$, para $i = 1, ..., n + 1$, entonces es la identidad en $\mathbb{A}$.

Demostración. Dado $\in \mathcal{P}$, como $\{\overrightarrow{ _1 _2}, ..., \overrightarrow{ _1 _{n+1}}\}$ es base de , el vector $\overrightarrow{ _1 }$ se expresa en esta base como

$$\overrightarrow{ _1 } = \sum_{=2}^{n+1} \alpha \overrightarrow{ _1 }.$$

Si $\tilde{}$ es la aplicación lineal asociada a se tiene

$$\tilde{}(\overrightarrow{ _1 }) = \sum_{=2}^{n+1} \alpha \tilde{}(\overrightarrow{ _1 }).$$

Usamos la definición de transformación afín junto con el hecho de que $ _1, _2, ..., _{n+1}$ son puntos fijos de para escribir

$$\overrightarrow{ _1 ( )} = \overrightarrow{(_1) ( )} = \tilde{}(\overrightarrow{ _1 }) = \sum_{=2}^{n+1} \alpha \tilde{}(\overrightarrow{ _1 })$$

$$= \sum_{=2}^{n+1} \alpha \overrightarrow{(_1) ( )} = \sum_{=2}^{n+1} \alpha \overrightarrow{ _1 } = \overrightarrow{ _1 }.$$

De aquí se deduce que $( ) =$, por lo que es la transformación idendidad. ■

Teorema 10.6.4

Sea un movimiento de $\mathbb{R}^3$. Entonces,

1) es la composición de a lo sumo cuatro reflexiones.
2) Si tiene un punto fijo , entonces es la composición de a lo sumo tres reflexiones respecto de planos que pasan por .

Demostración. 1). Sean $_1$, $_2$, $_3$, $_4$ cuatro puntos arbitrarios de $\mathbb{R}^3$ en posición general. Pongamos

$$'_i = \ (\ _i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Si $'_i = \ _i$, $i = 1, 2, 3, 4$, por la Proposición 10.6.3 se tiene que es la identidad en $\mathbb{R}^3$ y por tanto composición de dos reflexiones, a saber, $= \ _\pi \circ \ _\pi$ donde $_\pi$ es la reflexión de plano π, para un plano π de $\mathbb{R}^3$ cualquiera.

Si $'_i = \ _i$, $i = 1, 2, 3$ y $'_4 \neq \ _4$, veremos que $= \ _\pi$ para π el plano que contiene a $_1$, $_2$ y $_3$. En efecto, si Γ es el plano que biseca ortogonalmente al segmento $\overline{\ _4 \ '_4}$, por el Lema 10.6.1 se tiene que $_1$, $_2$ y $_3$ están en Γ; luego $\Gamma = \pi$. Además, $_\pi \circ$ tiene a $_1$, $_2$, $_3$ y $_4$ como puntos fijos. Por la Proposición 10.6.3, $_\pi \circ \ = \mathrm{Id}$, de donde se deduce $= \ _\pi^{-1} = \ _\pi$.

Supongamos que $'_1 = \ _1$, $'_2 = \ _2$ y $'_3 \neq \ _3$. Sea Δ el plano que biseca ortogonalmente al segmento $\overline{\ _3 \ '_3}$. Tendríamos que $_\Delta \circ$ fija $_1$, $_2$ y $_3$, pues por el Lema 10.6.1, $_1$, $_2 \in \Delta$. El movimiento $_\Delta \circ$ sería un movimiento de uno de los dos casos anteriores. Luego, $_\Delta \circ$ sería la identidad o una reflexión, y, por tanto, sería composición de a lo sumo dos reflexiones.

Supongamos que $'_1 = \ _1$ y $'_2 \neq \ _2$. Sea ∇ el plano que biseca ortogonalmente al segmento $\overline{\ _2 \ '_2}$. Tendríamos que $_\nabla \circ$ fija $_1$ y $_2$, pues $_1 \in \nabla$ por el Lema 10.6.1. El movimiento $_\nabla \circ$ sería un movimiento del caso anterior. Por lo tanto, sería la composición de a lo sumo tres reflexiones.

Supongamos que $'_i \neq \ _i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Sea π' el plano que biseca ortogonalmente a $\overline{\ _1 \ '_1}$. El movimiento $_{\pi'} \circ$ tiene un punto fijo, $_1$, y por tanto, por el caso anterior sería composición de a lo sumo tres reflexiones. Luego es composición de a lo sumo cuatro reflexiones.

2). Para demostrar 2) basta observar que si tiene a por punto fijo podemos tomar $_1 =$ en la demostración anterior y entonces nunca estaríamos en el caso 5. ■

* * *

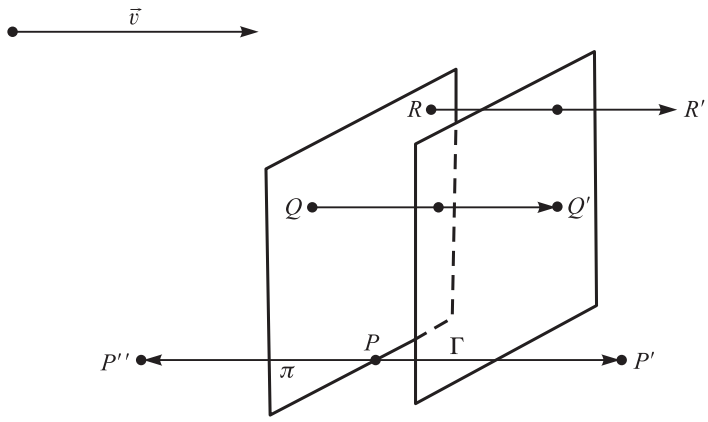
EJEMPLO A. La traslación $_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v}$ en el espacio es un movimiento. Veamos que puede escribirse como composición de dos reflexiones. Sea $\in \mathbb{R}^3$ y $' = \ _{\vec{v}}(\ ) = \ + \vec{v}$. Sea π el plano perpendicular a $\vec{v}$ que pasa por y Γ el plano que biseca ortogonalmente al segmento $\overline{\ \ '}$.

Considerar el movimiento $_{-\vec{v}} \circ \ _\Gamma \circ \ _\pi$. Si , , son tres puntos no alineados del plano π, los tres son fijos de este movimiento: por ejemplo,

$$_{-\vec{v}} \circ \ _\Gamma \circ \ _\pi(\ ) = \ _{-\vec{v}} \circ \ _\Gamma(\ ) = \ _{-\vec{v}}(\ ') = \ _{-\vec{v}}(\ + \vec{v}) = \ + \vec{v} - \vec{v} =$$

y lo mismo para y . Sea ahora $'' = \ - \vec{v}$, de manera que , , y $''$ están en posición general. Entonces,

$$_{-\vec{v}} \circ \ _\Gamma \circ \ _\pi(\ '') = \ _{-\vec{v}} \circ \ _\Gamma(\ ') = \ _{-\vec{v}}(\ ) = \ - \vec{v} = \ ''.$$

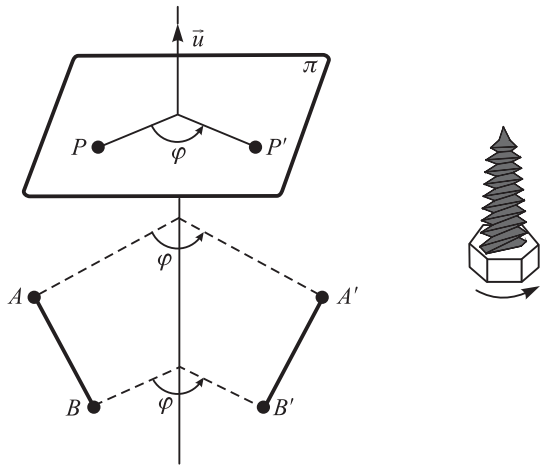


i ra 10.36

Por la Proposición 10.6.3, $_{-\vec{v}} \circ \ _{\Gamma} \circ \ _{\pi} = \mathrm{Id}$, de donde se deduce que $_{\vec{v}} = \ _{\Gamma} \circ \ _{\pi}$ es la composición de dos reflexiones con respecto a planos perpendiculares a $\vec{v}$ a distancia $\|\vec{v}\|/2$.

* * *

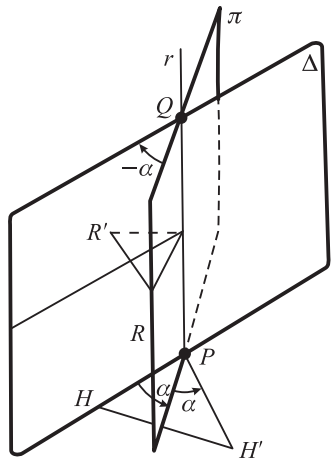
Los movimientos en $\mathbb{R}^3$ ya mencionados son las traslaciones, las reflexiones y los movimientos helicoidales (véanse los ejemplos de la sección 10.3), además de la identidad. Para los siguientes resultados necesitamos introducir un nuevo movimiento. El *giro* o *rota i n* de ángulo φ respecto a una recta r en $\mathbb{R}^3$ es un movimiento que lleva un punto $\in \mathbb{R}^3$ a un punto $' \in \mathbb{R}^3$ que se obtiene girando φ grados el punto en el plano π perpendicular a r que pasa por teniendo como centro de giro la intersección de la recta r y el plano π (figura 10.37). Denotaremos este movimiento por $G_{r,\varphi}$.



i ra 10.37 iro de ángulo φ alrededor de r.

Para que un giro quede completamente determinado necesitamos indicar el sentido de giro. Para ello pondremos una *orienta i n en la re ta r* mediante un vector $^{-}$ paralelo a r. El giro con respecto a la recta r, orientada según el vector $^{-}$, se hará en un sentido de tal manera que un tornillo apuntando en el sentido de $^{-}$ avance al girarlo (ver figura 10.37).

EJEMPLO B. Consideremos dos planos π y Δ que se cortan en una recta r. Vamos a demostrar que $_{\pi}\circ\ _{\Delta}$ es un giro con respecto a r y ángulo 2α, $G_{r,2\alpha}$, siendo α el ángulo que forman Δ y π (ver figura 10.38).



i ra 10.38

Todos los puntos de r quedan fijos tanto por $_{\pi}\circ\ _{\Delta}$ como por $G_{r,2\alpha}$. Luego, si y son dos puntos distintos de r se tiene

$$_{\pi}\circ\ _{\Delta}(\ ) = G_{r,2\alpha}(\ )$$
$$_{\pi}\circ\ _{\Delta}(\ ) = G_{r,2\alpha}(\ ).$$

Sea un punto de Δ distinto de y . Como $_{\pi}(\ ) = \ ' = G_{r,2\alpha}(\ )$ y $\in \Delta$ se tiene

$$_{\pi}\circ\ _{\Delta}(\ ) = \ _{\pi}(\ ) = G_{r,2\alpha}(\ ).$$

Sea $\in \pi$ distinto de y . Si $_{\Delta}(\ ) = \ ' = G_{r,-2\alpha}(\ )$ se tiene

$$_{\pi}\circ\ _{\Delta}(\ ') = \ _{\pi}(\ ) = \ = G_{r,-2\alpha}(\ ').$$

Los movimientos $_{\pi}\circ\ _{\Delta}$ y $G_{r,2\alpha}$ coinciden en cuatro puntos en posición general, a saber , , y $'$. Por la Proposición 10.6.3, $_{\pi}\circ\ _{\Delta} = G_{r,2\alpha}$.

Proposición 10.6.5

Sea un movimiento de $\mathbb{R}^3$. Entonces,

1) Si fija tres puntos de $\mathbb{R}^3$ no alineados es una reflexión o la identidad. El plano de reflexión contiene a los tres puntos fijos.
2) Si fija dos puntos distintos de $\mathbb{R}^3$ es una rotación con respecto a una recta, una reflexión o la identidad.

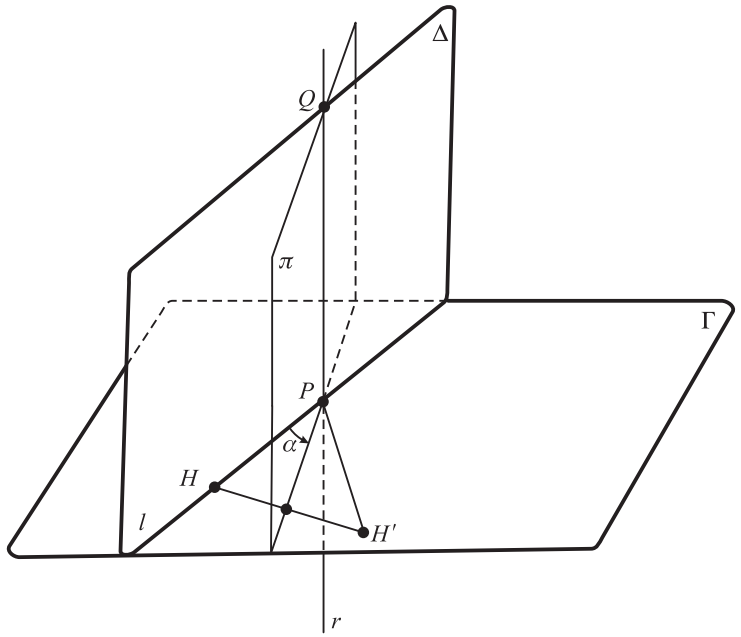
Demostración. 1). Si hay al menos tres puntos fijos estamos en el caso 1 o en el caso 2 de la demostración del Teorema 10.6.4. En el primer caso se obtiene la identidad y en el segundo una reflexión. En el caso 2 se ha probado que la reflexión es respecto al plano determinado por los tres puntos fijos.

2). Sean , dos puntos fijos distintos de . Todos los puntos de la recta r que pasa por y son fijos para . En efecto, como $\in r$, se tiene = + $a\overrightarrow{\ }$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Usando la definición de transformación afín y la Proposición 10.2.2 se deduce:

$$( ) = ( ) + a\,\tilde{}(\overrightarrow{\ }) = ( ) + a\overrightarrow{( )\ ( )} = + a\overrightarrow{\ } = .$$

Si tiene al menos otro punto fijo que no esté en r, fijaría al menos tres puntos no alineados y por la parte 1) sería una reflexión o la identidad. Basta estudiar qué sucede cuando los puntos de r son los únicos puntos fijos de .

Sea Γ el plano perpendicular a r que pasa por . Tomar $\in \Gamma$, $\neq$, y escribir ( ) = $'$ (ver figura 10.39).



i ra 10.39

Por el Lema 10.6.1 el plano π que biseca ortogonalmente a $\overline{\ '}$ contiene a r. Además, $_{\pi}$ o tiene tres puntos fijos no alineados: , y . Este movimiento, $_{\pi}$ o , no puede ser la identidad porque si lo fuera tendríamos = $_{\pi}$ y hemos supuesto que solo tiene una recta de puntos fijos. Por el apartado 1), $_{\pi}$ o = $_{\Delta}$, con Δ el plano que contiene a , y . Luego

$$= {}_{\pi}\,\mathrm{o}\,{}_{\Delta}.$$

El resultado se deduce del ejemplo , puesto que se ha probado que $_{\pi}$ o $_{\Delta} = G_{r,2\alpha}$, donde α es el ángulo que forman Δ y π. ■

* * *

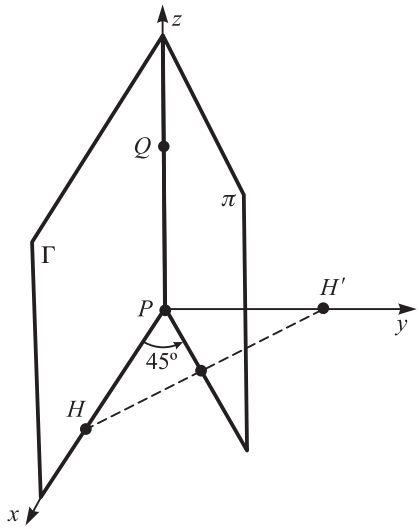
EJEMPLO C. Tratemos de determinar todos los movimientos en el espacio que dejan fijos los puntos = (0, 0, 0) y = (0, 0, 1) y llevan = (1, 0, 0) en $'$ = (0, 1, 0).

Llamemos a uno de tales movimientos. Como no es la identidad porque $\neq$ $'$, el apartado 2) de la Proposición 10.6.5 nos dice que es un giro con respecto a una recta o una reflexión.

Como y quedan fijos por , los puntos de la recta que los contiene, a saber $r: \{ = 0, y = 0, = t\}$, son todos puntos fijos de (ver la demostración de la Proposición 10.6.5). Por el Lema 10.6.1 el plano π que biseca ortogonalmente al segmento $'$ contiene a r. La ecuación de este plano π es $= y$. El movimiento $_\pi{}^{o}$ deja fijos , y , que son tres puntos no alineados. Por el apartado 1) de la Proposición 10.6.5, $_\pi{}^{o}$ es la identidad o una reflexión.

Si $_\pi{}^{o} = \mathrm{Id}$, $= {}_\pi$ es una reflexión respecto al plano π.

Si $_\pi{}^{o}$ es una reflexión, debe ser respecto al plano Γ que contiene a los puntos , y ; es decir $\Gamma: \{y = 0\}$. Por tanto $_\pi{}^{o} = {}_\Gamma$ y $= {}_\pi{}^{o}{}_\Gamma$. Como Γ y π forman un ángulo de 45^o el ejemplo B nos dice que $= G_{r, 90^o}$ es un giro de 90^o respecto a la recta r.



i ra 10.40

* * *

El estudio geométrico realizado hasta aquí nos ha permitido demostrar un teorema de estructura (parte 1) del Teorema 10.6.4) en el que se prueba que cualquier movimiento en $\mathbb{R}^3$ es composición, a lo sumo, de cuatro reflexiones.

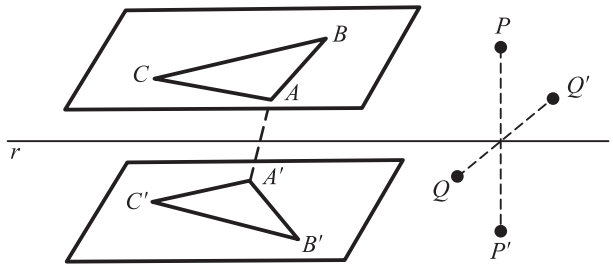
Hemos comenzado el estudio de los movimientos en el espacio a partir de la estructura de sus puntos fijos:

i) Si un movimiento en $\mathbb{R}^3$ tiene cuatro puntos fijos en posición general, todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ son fijos para y es la identidad (Proposición 10.6.3).

ii) Si el conjunto de puntos fijos de es un plano π, es una reflexión con respecto al plano π (parte 1) de la Proposición 10.6.5).

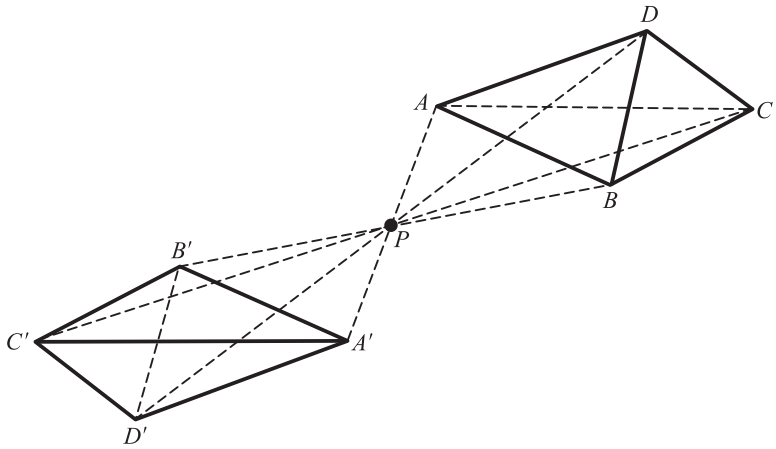
iii) Si el conjunto de puntos fijos de es una recta r, la demostración de la parte 2) de la Proposición 10.6.5 prueba que es la composición de dos reflexiones con respecto a planos que contienen a r. Este movimiento es también un giro con respecto a la recta r con ángulo doble del que forman los planos. Si el ángulo de giro es 180^o este movimiento recibe el nombre de *imetría a ial* porque cada punto se transforma en su simétrico respecto a la recta r (ver figura 10.41). Se escribe $_r$ para denotar este movimiento.

iv) Si el conjunto de puntos fijos de es un punto , se ha demostrado en el apartado 2) del Teorema 10.6.4 que es la composición de a lo sumo tres reflexiones respecto de planos que pasan por . La posición relativa de estos tres planos determinará el tipo de movimiento.



i ra 10.41 imetr a a ial de e e *r*.

Un ejemplo sencillo de un movimiento en $\mathbb{R}^3$ que tiene un solo punto fijo es la ***imetría entral*** con respecto a , , en el que cada punto se transforma en su simétrico respecto de (ver figura 10.42).



i ra 10.42 imetr a con respecto al punto *P*.

Otro ejemplo de un movimiento en $\mathbb{R}^3$ que tiene un solo punto fijo es $= {}_{\pi} \circ G_{r,\varphi}$, la composición de un giro de ángulo φ con respecto a una recta *r* con una reflexión respecto al plano π, de manera que π y *r* se cortan en un punto. Cuando la recta *r* es perpendicular al plano π este movimiento se llama ***imetría rotatoria*** (ver figura 10.43).

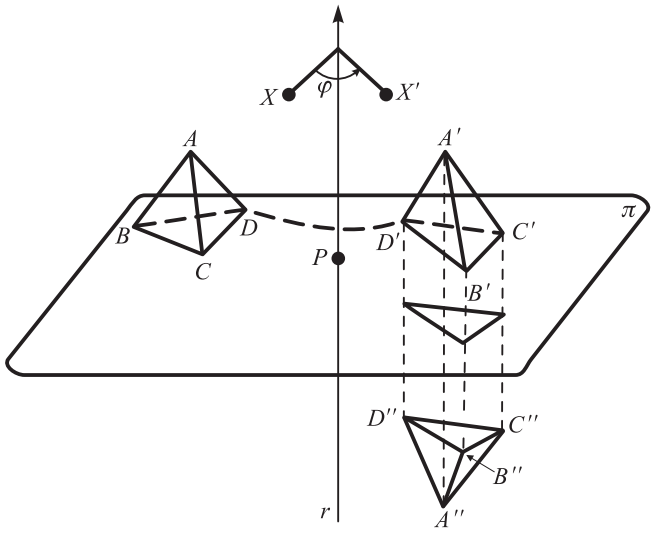
Observar que la simetría central o simetría con respecto a un punto es un caso particular de una simetría rotatoria en la que el ángulo de giro es $\varphi = 180^{\circ}$.

v) Si no tiene puntos fijos solo hemos probado que es la composición, a lo sumo, de cuatro reflexiones.

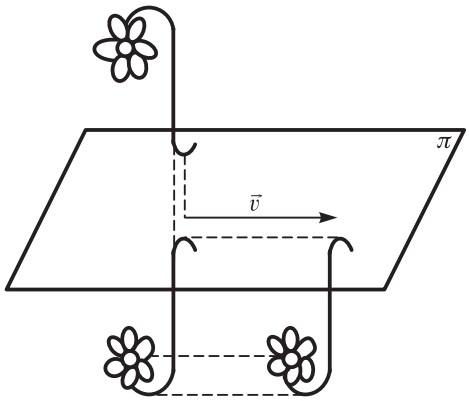
La traslación (ejemplo D de la sección 10.3) y el movimiento helicoidal (ejemplo F de la sección 10.3) son ejemplos de movimientos en el espacio que no tienen puntos fijos. El movimiento helicoidal es la composición de un giro con respecto a una recta *r* y una traslación de vector paralelo a *r*.

Otro movimiento en el espacio que no tiene puntos fijos es la composición de una reflexión con respecto a un plano π y una traslación de vector $\vec{v}$ paralelo a π. Este movimiento ${}_{\vec{v}} \circ {}_{\pi}$, denotado abreviadamente por ${}_{\pi,\vec{v}}$, se denomina ***imetría e li ante*** (ver figura 10.44).

Un estudio detallado de la composición de cuatro reflexiones según la posición relativa de los planos llevaría a una clasificación de todos los movimientos en el espacio, de manera simi-



i ra 10.43



i ra 10.44 imetr a deslizante.

lar a la que se enunció en el Teorema 10.4.8 para $\mathbb{R}^2$. El estudio completo se sale fuera de los contenidos de este texto; el lector puede consultarlo en G. E. Martin, «Transformation Geometry. An introduction to Symmetry». Springer-Verlag (1982).

En la sección siguiente se dará una clasificación de los movimientos en el espacio a partir de la clasificación de las aplicaciones ortogonales dada en el Teorema 8.6.2.

* * *

EJEMPLO D. Consideremos los planos π_1, π_2 y π_3 dados por

$$\pi_1 : \{\ \ = 0\} \quad , \quad \pi_2 : \{y = 0\} \quad , \quad \pi_3 : \{\ \ + y = 1\}.$$

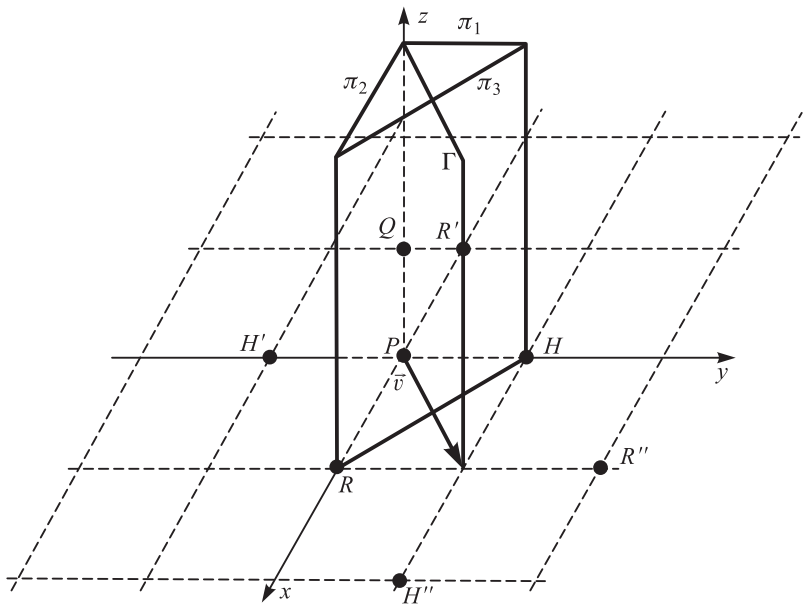
Tratemos de identificar el movimiento $\ = {}_{\pi_3} \circ {}_{\pi_2} \circ {}_{\pi_1}$ como alguno de los movimientos conocidos de $\mathbb{R}^3$.

La imagen de cualquier punto $= (0, 0,)$ del eje es $( ) = ' = (1, 1,)$. Luego si $\vec{v} = (1, 1, 0)$,

$$_{-\vec{v}} \circ \ ( ) = \ _{-\vec{v}}(') = \ ' - \vec{v} = \ .$$

Por tanto $_{-\vec{v}} \circ$ deja fijos todos los puntos del eje , y en particular deja fijos los puntos $= (0, 0, 0)$ y $= (0, 0, 1)$. Considerar los puntos $= (0, 1, 0)$ y $= (1, 0, 0)$. Se tiene que (ver figura 10.45)

$$_{-\vec{v}} \circ \ ( ) = \ _{-\vec{v}} \circ \ _{\pi_3} \circ \ _{\pi_2} \circ \ _{\pi_1}( ) = \ _{-\vec{v}} \circ \ _{\pi_3} \circ \ _{\pi_2}( ) = \ _{-\vec{v}} \circ \ _{\pi_3}(') = \ _{-\vec{v}}('') = \ .$$



i ra 10.45

Por el Lema 10.6.1 el plano Γ: { $= y$} que biseca ortogonalmente al segmento $\overrightarrow{\ \ }$ contiene al eje . Además el movimiento $_{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ$ deja fijos , y .

Se tiene que (ver figura 10.45):

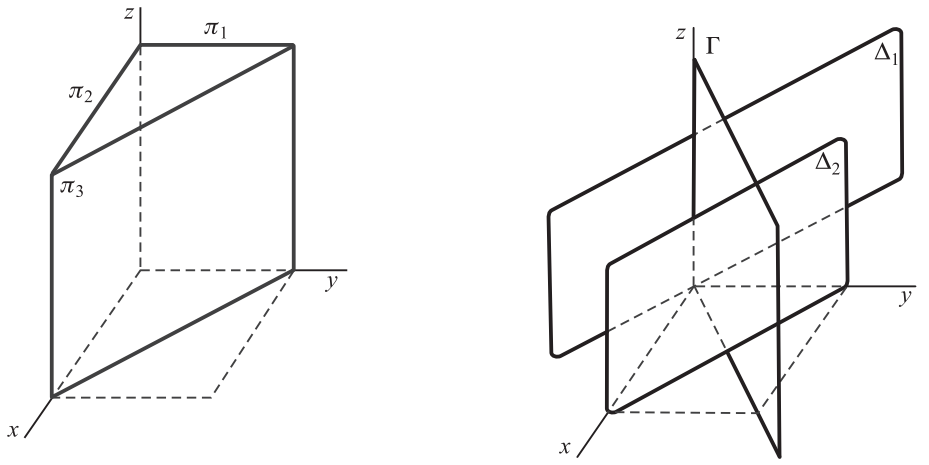
$$_{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ \ ( ) = \ _{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ \ _{\pi_3} \circ \ _{\pi_2} \circ \ _{\pi_1}( ) = \ _{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ \ _{\pi_3} \circ \ _{\pi_2}(') = \ _{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ \ _{\pi_3}(') =$$
$$= \ _{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}}('') = \ _{\Gamma}( ) = \ .$$

Luego $_{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ$ deja fijos los puntos , , y que están en posición general. Por el Lema 10.6.3, $_{\Gamma} \circ \ _{-\vec{v}} \circ \ =$ Id, de donde se deduce

$$= \ _{\vec{v}} \circ \ _{\Gamma}.$$

Como $\vec{v} = (1, 1, 0)$ es paralelo a Γ, es una simetría deslizante con plano de simetría Γ y vector de traslación $\vec{v}$.

Por el ejemplo A sabemos que $_{\vec{v}}$ puede escribirse como $_{\vec{v}} = \ _{\Delta_2} \circ \ _{\Delta_1}$ donde $\Delta_1 =$ $= \{ + y = 0\}$ y $\Delta_2 = \{ + y = 1\} = \pi_3$ son dos planos perpendiculares a $\vec{v}$ separados por una distancia $\|\vec{v}\|/2 = \sqrt{2}/2$. Por tanto, también podemos escribir $= \ _{\Delta_2} \circ \ _{\Delta_1} \circ \ _{\Gamma}$ (ver figura 10.46).



i ra 10.46 l mo imiento *M* del e emplo D es a la ez $M = S_{\pi_3} \circ S_{\pi_2} \circ S_{\pi_1}$ $M = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1} \circ S_{\Gamma}$.

EJERCICIOS 10.6

1. Sea $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \ )$ un espacio afín de dimensión m y sean $_1, \ _2, \ldots, \ _n \in \mathcal{P}$. Los puntos $_1, \ _2, \ldots, \ _n$ se dicen *a ínmente in e en iente* en $\mathbb{A}$ si el conjunto de vectores $\{\overrightarrow{\ _1 \ _2}, \ldots, \overrightarrow{\ _1 \ _n}\}$ es linealmente independiente. Demostrar que si $_1, \ _2, \ldots, \ _n$ son puntos afinmente independientes en $\mathbb{A}$, para todo $= 2, \ldots, n$ el conjunto de vectores $\{\overrightarrow{\ _1}, \ldots, \overrightarrow{\ , \ -1}, \overrightarrow{\ \ +1}, \ldots, \overrightarrow{\ _n}\}$ es linealmente independiente.

2. Sean , y tres puntos no alineados de $\mathbb{R}^3$ que son puntos fijos de un movimiento . Demostrar que todos los puntos del plano Γ que contiene a los puntos , y son puntos fijos de .

3. Demostrar que la composición de dos reflexiones con respecto a dos planos paralelos es una traslación.

4. Demostrar que un giro con respecto a una recta r es la composición de dos reflexiones con respecto a dos planos que tienen en común la recta r.

5. Demostrar que la composición de dos simetrías centrales es una traslación.

6. Sea $_r$ una simetría axial de eje r y $_{\vec{a}}$ una traslación de vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a}$ es perpendicular a r.

   a) Demostrar que $_{\vec{a}} \circ \ _r$ es una simetría axial de eje l que es la recta trasladada de r mediante el vector $\vec{a}/2$.

   b) Demostrar que $_r \circ \ _{\vec{a}}$ es una simetría axial de eje l' simétrico de l con respecto a r.

7. a) Demostrar que la composición de dos simetrías axiales respecto de ejes secantes es un giro.

   b) Demostrar que la composición de dos simetrías axiales respecto de ejes que se cruzan puede escribirse como la composición de un giro y una traslación.

8. Determinar todos los movimientos en el espacio que dejan fijos los puntos $=(1, 1, 1)$, $=(1, 0, 0)$ y $=(-1, 1, 0)$.

9. Determinar todos los movimientos en el espacio que dejan fijos los puntos $=(1, 1, 0)$ y $=(1, 1, 1)$ y llevan $=(1, 0, 1)$ en $'=(0, 1, 1)$.

10. a) Demostrar que si π y Γ son dos planos perpendiculares en el espacio, $_{\pi}{}^{o}{}_{\Gamma} = {}_{\Gamma}{}^{o}{}_{\pi}$.

    b) Dar un ejemplo de dos planos π y Γ, en el espacio, para los que la igualdad $_{\pi}{}^{o}{}_{\Gamma} = {}_{\Gamma}{}^{o}{}_{\pi}$ no sea cierta.

11. Sean $\Gamma_0:\{\ =0\}$, $\Gamma_1:\{\ =1\}$, $\pi_0:\{y=0\}$, $\pi_1:\{y=1\}$, $\Delta_0:\{\ =0\}$, $\Delta_1:\{\ =1\}$ los planos que contienen a las caras de un cubo de lado 1 en $\mathbb{R}^3$. Determinar qué movimientos son las siguientes composiciones de reflexiones:

    a) $_{\Gamma_1}{}^{o}{}_{\pi_1}{}^{o}{}_{\Gamma_0}$ b) $_{\Gamma_1}{}^{o}{}_{\pi_1}{}^{o}{}_{\Delta_1}$ c) $_{\Gamma_0}{}^{o}{}_{\pi_0}{}^{o}{}_{\Gamma_1}{}^{o}{}_{\pi_1}$

12. a) Demostrar que si π, Γ y Δ son tres planos en el espacio que son perpendiculares entre sí, $_{\pi}{}^{o}{}_{\Gamma}{}^{o}{}_{\Delta}$ es una simetría con respecto a un punto.

    b) Sean $\pi:\{2\ -y+\ =3\}$, $\Gamma:\{\ -y-3\ =-2\}$, $\Delta:\{\ -2\ =-1\}$ tres planos en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué tipo de movimiento es $_{\pi}{}^{o}{}_{\Gamma}{}^{o}{}_{\Delta}$?

10.7. CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^3$

El objetivo de esta sección es obtener la clasificación de los movimientos en el espacio $\mathbb{R}^3$. Demostraremos que cualquier movimiento en el espacio es de uno de los siguientes tipos: la identidad, una traslación, una reflexión o simetría con respecto a un plano, una simetría deslizante, un giro con respecto a una recta, un movimiento helicoidal, o una simetría rotatoria. Nuestra herramienta principal será la clasificación de las aplicaciones ortogonales dada en el Teorema 8.6.2.

Sea $\mathcal{R}=\{\ ;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ un sistema de referencia ortonormal en el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$. Observar que en esta referencia tiene como coordenadas (0, 0, 0). Según (2.1) la ecuación matricial de un movimiento de $\mathbb{R}^3$ en la referencia $\mathcal{R}$ se escribe

$$(\ )=\ '=\begin{pmatrix}'_1\\'_2\\'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\ +\ \cdot \tag{7.1}$$

donde $\overrightarrow{\ }=\ _1\vec{e}_1+\ _2\vec{e}_2+\ _3\vec{e}_3$ y $\overrightarrow{\ '}=\ '_1\vec{e}_1+\ '_2\vec{e}_2+\ '_3\vec{e}_3$.

Como es un movimiento, por la Proposición 10.3.4, es una matriz ortogonal, es decir $^t=\ _3=\ ^t$. Por el Teorema 8.6.2 podemos escribir $=\ ^t$ con $\in\ _{3\times3}(\mathbb{R})$ ortogonal y una de las siguientes matrices:

$$_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad _2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\operatorname{sen}\varphi\\0&\operatorname{sen}\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix},\quad 0<\varphi<2\pi, \tag{7.2}$$

$$_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad _4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Observar que si ponemos $\varphi = \pi$ en $_2$ y $_4$ se obtienen las matrices

$$_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad _6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

que junto con las anteriores nos proporcionan los seis tipos de matrices descritos al finalizar la demostración del Teorema 8.6.2. Observar también que si hubieramos permitido $\varphi = 0$ en $_2$ y $_4$ habríamos obtenido $_1$ y $_3$ respectivamente. El hecho de haberlas separado es porque estas matrices dan movimientos de naturaleza diferente.

Sea $= (\ _i)_{i,\ =1,2,3}$ y definimos

$$\begin{aligned} \vec{}_1 &= \ _{11}\vec{e}_1 + \ _{21}\vec{e}_2 + \ _{31}\vec{e}_3 \\ \vec{}_2 &= \ _{12}\vec{e}_1 + \ _{22}\vec{e}_2 + \ _{32}\vec{e}_3 \\ \vec{}_3 &= \ _{13}\vec{e}_1 + \ _{23}\vec{e}_2 + \ _{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{7.4}$$

los vectores cuyas coordenadas en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ son las columnas de . Como es ortorgonal, $\mathscr{R}' = \{\ ; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ es un nuevo sistema de referencia ortonormal. Si $\overrightarrow{\ } = y_1\vec{}_1 + y_2\vec{}_2 + y_3\vec{}_3$, $'\ = y'_1\vec{}_1 + y'_2\vec{}_2 + y'_3\vec{}_3$ en la base $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} '_1 \\ '_2 \\ '_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}.$$

De (7.1) se deduce que las ecuaciones del movimiento en $\mathscr{R}'$ son

$$(\ ) = \ ' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \ ^t\begin{pmatrix} '_1 \\ '_2 \\ '_3 \end{pmatrix} = \ ^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \ ^t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

donde es una de las matrices de la lista (7.2) y

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \ ^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Sea $_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, el movimiento cuyas ecuaciones en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$ son de la forma

$$_i\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \ _i\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{7.6}$$

Si $\vec{b} = b_1\vec{}_1 + b_2\vec{} + b_3\vec{}_3$, de (7.5) deducimos que

$$_i = \ _{\vec{b}} \circ \ _i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{7.7}$$

por lo que hemos de estudiar esta composición en cada uno de los cuatro casos que aparecen en la lista (7.2).

dentidad traslaci n

En este caso

$$_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{b} = \vec{0}$, $_1 = \ _1$ es la *i enti a* en $\mathbb{R}^3$, y si $\vec{b} \neq \vec{0}$, $_1 = \ _{\vec{b}} \circ \ _1 = \ _{\vec{b}} \circ \ _3 = \ _{\vec{b}}$ es una *tra la i n* en $\mathbb{R}^3$.

iro mo imiento elicoidal

En este caso

$$_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{b} = \vec{0}$, de (7.7) y (7.6) se deduce que $_2 = \ _2$ es un giro con respecto a la recta $l = \ + L(\vec{}_1)$. Sea α el ángulo de giro en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{ \ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Como el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ se hace con una matriz ortogonal , que conserva el producto escalar, se ha de tener $\cos\alpha = \cos\varphi$. Por tanto $\alpha = \varphi$ ó $\alpha = 2\pi - \varphi$, lo que depende de la orientación de l y de la orientación de los vectores de $\mathcal{R}'$ con respecto a los de $\mathcal{R}$ (ver sección 8.6). Escribimos $_2 = G_{l,\alpha}$ para denotar este movimiento.

Si $\vec{b} \neq \vec{0}$ escribamos

$$\vec{b} = \vec{} + \vec{v} \quad \text{con} \quad \vec{} \in L(\vec{}_1) \quad \text{y} \quad \vec{v} \in L(\vec{}_1)^{\perp} = L(\vec{}_2, \vec{}_3),$$

de manera que $\vec{} = b_1\vec{}_1$ y $\vec{v} = b_2\vec{}_2 + b_3\vec{}_3$ por definición de $\vec{b}$. De (7.7) se obtiene

$$_2 = \ _{-} \circ \ _{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}. \tag{7.8}$$

Con la notación anterior, se tiene el siguiente resultado:

Lema 10.7.1

La composición $_{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}$ es un giro con respecto a la recta $r = \ + L(\vec{}_1)$, donde es el punto cuyas coordenadas en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son $(0, \ _2, \ _3)$, solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \ _2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

con incógnitas y_2, y_3.

Demostración. El sistema (7.9) es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & 1-\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

que tiene solución única ya que

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} = (1-\cos\varphi)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi = 2(1-\cos\varphi) \neq 0$$

puesto que $0 < \varphi < 2\pi$. Observar que $_{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}$ tiene por ecuaciones (en $\mathcal{R}'$)

$$_{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \ _2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

por lo que es un punto fijo de $_{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}$ debido a (7.9).

Sea $\mathcal{R}'' = \{\ ;\ \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ el sistema de referencia ortonormal en el que solo se ha cambiado el origen con respecto a $\mathcal{R}'$. Si $(\ _1,\ _2,\ _3)$ son las coordenadas del punto en $\mathcal{R}''$, es decir $\overrightarrow{\ \ } = \ _1\vec{}_1 + \ _2\vec{}_2 + \ _3\vec{}_3$, por la sección 10.1 tenemos

$$\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}.$$

Usando las ecuaciones del movimiento $_{\vec{v}} \circ G_l$, dadas en (7.10) se tiene

$$_{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \ _{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \ _2\left[\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 0 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \ _2\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}$$

debido a que $(0,\ _2,\ _3)$ satisface (7.9). Por tanto, $_{\vec{v}} \circ G_{l,\alpha}$ es un giro con respecto a la recta $r = \ + L(\vec{}_1)$, que era lo que queríamos demostrar. ■

Se tiene entonces que

$$_2 = \ _{-} \circ G_{r,\alpha}$$

donde r es la recta descrita en el Lema 10.7.1. Como $\vec{}_1$ es un vector director de r y $\vec{} = b_1\vec{}_1$, $_2$ es un *giro* si $\vec{} = \vec{0}$ o un *movimiento eli oi al* si $\vec{} \neq \vec{0}$.

Observación. Si $\varphi = \pi$ la matriz $_2$ se transforma en $_5$ de (7.3) y $G_{r,180^\circ}$ es una *imetría on re e to a la re ta r*, denotada por $_r$.

efle i n simetr a deslizante

En este caso

$$_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{b} = \vec{0}$ de (7.7) y (7.6) se deduce que $\quad_3 = \quad_3$ es la reflexión $\quad_\pi$ con π el plano $+ L(\vec{\ }_2, \vec{\ }_3)$.

Si $\vec{b} \neq \vec{0}$ escribamos

$$\vec{b} = \vec{v} + \vec{\ } \quad \text{con} \quad \vec{v} \in L(\vec{\ }_2, \vec{\ }_3) \quad , \quad \vec{\ } \in L(\vec{\ }_1) = L(\vec{\ }_2, \vec{\ }_3)^\perp,$$

de manera que $\vec{v} = b_2\vec{\ }_2 + b_3\vec{\ }_3$ y $\vec{\ } = b_1\vec{\ }_1$ por definición de $\vec{b}$. De (7.7) se obtiene

$$_3 = \quad_{\vec{v}} \circ \quad_{-} \circ \quad_\pi. \tag{7.11}$$

Con la notación anterior, se tiene el siguiente resultado:

Lema 10.7.2

La composición $\quad_{-} \circ \quad_\pi$ es una reflexión con respecto al plano $\Delta = \quad + L(\vec{\ }_2, \vec{\ }_3)$, donde es el punto cuyas coordenadas son $\left(\dfrac{b_1}{2}, 0, 0\right)$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

Demostración. Las ecuaciones de $\quad_{-} \circ \quad_\pi$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son

$$\quad_{-} \circ \quad_\pi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

por lo que es un punto fijo de $\quad_{-} \circ \quad_\pi$ ya que

$$\quad_{-} \circ \quad_\pi \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{R}'' = \{\ ; \vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3\}$ un nuevo sistema de referencia ortonormal en el que solo se ha cambiado el origen con respecto a $\mathcal{R}'$. Si $(\ _1, \ _2, \ _3)$ son las coordenadas del punto en $\mathcal{R}''$, es decir $\overrightarrow{\quad} = \ _1\vec{\ }_1 + \ _2\vec{\ }_2 + \ _3\vec{\ }_3$, por la sección 10.1 tenemos

$$\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando las ecuaciones del movimiento $\quad_{-} \circ \quad_\pi$ dadas en (7.12) se tiene

$$\quad_{-} \circ \quad_\pi \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \quad_{-} \circ \quad_\pi \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \ _3 \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\quad_{-} \circ \quad_\pi$ es una simetría con respecto al plano $\Delta = \quad + L(\vec{\ }_2, \vec{\ }_3\}$, que era lo que queríamos demostrar. ■

De (7.11) se deduce que

$$_3 = \quad_{\vec{v}} \circ \quad_\Delta$$

donde Δ es el plano descrito en el Lema 10.7.2. Como $\vec{v} = b_2\vec{}_2 + b_3\vec{}_3$ es paralelo a Δ, $\quad_3$ es una *re le i n* si $\vec{v} = \vec{0}$ o una *imetría e li ante* si $\vec{v} \neq \vec{0}$.

imetr a rotatoria

En este caso

$$\quad_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir

$$\quad_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

que es el producto de las matrices de una simetría con respecto a un plano y de un giro.

Si $\vec{b} = \vec{0}$ en (7.7), $\quad_4 = \quad_4$. De (7.6) y (7.13) se deduce que $\quad_4 = \quad_4 = \quad_\pi \circ G_{l,\alpha}$ (composición de un giro y una reflexión) con $\pi = \quad + L(\vec{}_2, \vec{}_3)$ y l la recta $\quad + L(\vec{}_1)$. Como l es perpendicular a π, $\quad_4 = \quad_4$ es, en este caso, una *imetría rotatoria*. El ángulo α puede ser r ó $2\pi - \varphi$ según la orientación de l y del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ (ver caso II).

Sea $\vec{b} \neq \vec{0}$. El sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

tiene solución única ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} = 2[(1-\cos\varphi)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi] = 4(1-\cos\varphi) \neq 0$$

por ser $0 < \varphi < 2\pi$. La primera de las ecuaciones de (7.14) produce $y_1 = b_1 - y_1 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{b_1}{2}$. Sea

$$\quad_0 = \left(\frac{b_1}{2}, \quad_2, \quad_3\right) \tag{7.15}$$

la solución de 7.14.

Con la notación anterior, se tiene el siguiente resultado:

Lema 10.7.3

El movimiento $\quad_4 = \quad_{\vec{v}} \circ \quad_\pi \circ G_{l,\alpha}$ es una simetría rotatoria con respecto a la recta $r = \quad_0 + L(\vec{}_1)$ y al plano Δ dado por $y_1 = \dfrac{b_1}{2}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$. El punto $\quad_0$ tiene como coordenadas la solución de (7.14) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Demostración. Sea $\mathcal{R}'' = \{\ _0; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ un nuevo sistema de referencia ortonormal en el que solo se ha cambiado el origen con respecto a $\mathcal{R}'$. Si $(\ _1,\ _2,\ _3)$ son las coordenadas de un punto en $\mathcal{R}''$, es decir $\overrightarrow{\ _0} = \ _1\vec{}_1 + \ _2\vec{}_2 + \ _3\vec{}_3$, de la sección 10.1 sabemos que

$$\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1/2 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del movimiento $\ _4 = \ _{\vec{v}} \circ \ _{\pi} \circ G_{l,\alpha}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son

$$\ _4\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \ _4\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

El punto $\ _0$ queda fijo por $\ _4$ debido a (7.14). Entonces en el sistema de referencia $\mathcal{R}''$

$$\ _4\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \ _4\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1/2 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \ _4\left[\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1/2 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} b_1/2 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix} = \ _4\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\ _4$ es la composición de un giro con respecto a la recta con vector director $\vec{}_1$ que pasa por $\ _0$ y una simetría con respecto al plano determinado por los vectores $\vec{}_2$ y $\vec{}_3$ que pasa por $\ _0$. Este plano es perpendicular a $\vec{}_1$ y pasa por $\ _0$; luego, en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ su ecuación es $y_1 = b_1/2$. ■

Del Lema 10.7.3 se deduce que $\ _4 = \ _{\Delta} \circ G_{r,\alpha}$. Como la recta r es perpendicular al plano Δ porque los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3$ son ortonormales, $\ _4$ es siempre una *imetría rotatoria*.

Observación. Si $\varphi = \pi$ la matriz $\ _4$ se transforma en $\ _6$ de (7.3) y el giro $G_{r,\alpha}$ es de 180º. En este caso $\ _4$ es una *imetría entral* respecto al punto $\ _0$.

* * *

Podemos resumir el estudio de casos realizado para en el siguiente resultado que nos da una clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 10.7.4 (Clasificaci n de los mo imientos en $\mathbb{R}^3$)

Todo movimiento en $\mathbb{R}^3$ es o bien la *i enti a* , o una *tra la i n*, o un *giro alre e or e n e e*, o un *movimiento eli oi al* (en estos casos $|\ | = 1 > 0$ y el movimiento se dice *ire to*), o bien una *re le i n*, o una *imetría e li ante*, o una *imetría rotatoria* (en estos casos $|\ | = -1 < 0$ y el movimiento se dice *inver o*).

* * *

El estudio de casos realizado en esta sección para clasificar los movimientos en el espacio puede usarse para determinar el movimiento conocidas sus ecuaciones en un sistema de referen-

cia ortonormal. La información necesaria está contenida en las matrices y del Teorema 8.6.2 y los Lemas 10.7.1, 10.7.2 y 10.7.3. Damos varios ejemplos a continuación.

EJEMPLO A. *eterminar el movimiento e e a ione*

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

a a en el i tema e re eren ia al e $\mathbb{R}^3$ *enota o or* $\mathscr{R}$.

Sea

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal. Su polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 1/3-\lambda & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3-\lambda & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2,$$

por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (doble). Esto nos indica que estamos en el caso III, por lo que es una simetría o una simetría deslizante.

Un autovector unitario $\vec{}_1$ correspondiente al autovalor $\lambda_1 = -1$ tiene como componentes una solución normalizada no nula de

$$\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos tomar

$$\vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ las coordenadas de sus autovectores satisfacen

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como este sistema equivale a $_1 + _2 + _3 = 0$, elegimos

$$\vec{}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \quad , \quad \vec{}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

para tener la referencia ortonormal

$$\mathscr{R}' = \{ \ ; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3 \}.$$

La matriz del cambio de base es

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

lo que produce

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con (7.5) las ecuaciones de en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

por lo que es una *imetría e li ante*.

Si π es el plano $+ L(\bar{}_2, \bar{}_3)$, $\bar{} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}\bar{}_1$ y $\vec{v} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\bar{}_2$ se tiene

$$= {}_{\vec{v}} \circ {}_{-} \circ {}_{\pi}.$$

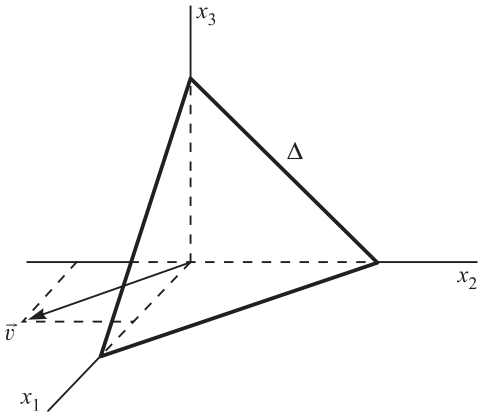
Por el Lema 10.7.2, ${}_{-} \circ {}_{\pi} = {}_{\Delta}$ con $\Delta = + L(\bar{}_2, \bar{}_3)$ donde $\longrightarrow = \dfrac{1}{2}\bar{} = \dfrac{1}{2}\dfrac{6}{\sqrt{3}}\bar{}_1$, es decir $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{3}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ en $\mathcal{R}$. Como $\bar{}_1$ es perpendicular a Δ, la ecuación del plano de simetría es

$${}_1 + {}_2 + {}_3 = 3.$$

El vector de traslación es

$$\vec{v} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (2, -2, 0), \quad \text{en } \mathcal{R}.$$

En resumen, es una simetría deslizante de plano Δ y vector de traslación $\vec{v}$. El plano Δ y el vector de traslación $\vec{v}$ se han dibujado en la figura 10.47.



i ra 10.47

* * *

EJEMPLO B. *eterminar el movimiento e e a ione*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a o en el i tema e re eren ia al e $\mathbb{R}^3$ *enota o or* $\mathcal{R}$.

Sea

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal. Su polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 1),$$

por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (doble). Esto nos indica que

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo que estamos en el caso II con $\varphi = 180^{\circ}$. Hemos de determinar si es un giro o un movimiento helicoidal.

Los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = 1$ satisfacen

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que podemos tomar

$$\vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$$

Los autovectores correspondientes a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ satifacen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que podemos tomar

$$\vec{}_2 = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1).$$

Por tanto,

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{ \ ; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ las ecuaciones de son

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

por lo que es un *movimiento eli oi al.*

Por el Lema 10.7.1 el eje de giro es paralelo a $L(\vec{}_1)$ y debe pasar por el punto de coordenadas $(0, {}_2, {}_3)$ en $\mathcal{R}'$ que son solución de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Como $1 - y_2 = y_2 \iff y_2 = \frac{1}{2}$ y también $\frac{1}{\sqrt{2}} - y_3 = y_3 \iff y_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, el punto en la referencia $\mathcal{R}$ es

$$= \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Por tanto, el eje de giro es

$$r: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) + t(0, 1, 1).$$

El vector de traslación es, en la referencia $\mathcal{R}$,

$$\vec{} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0, 1, 1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Observar que el vector de traslación es paralelo a la recta *r*, como corresponde en un movimiento helicoidal.

EJEMPLO C. *eterminar el movimiento e e a ione*

$$\begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a a en el i tema e re eren ia al e $\mathbb{R}^3$ *enota o or* $\mathcal{R}$.

Sea

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es una matriz ortogonal. Su polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2+1),$$

por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Esto nos indica que

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que estamos en el caso IV con $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ con lo cual es una *imetría rotatoria*.

Calculamos la matriz para obtener el eje de giro y el plano de simetría. Los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = -1$ satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que podemos tomar

$$\vec{}_1 = (0, 1, 0),$$

que elegiremos también como orientación del eje de giro. Los autovectores correspondientes a $\lambda_2 = i$ satisfacen

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 \\ 0 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce ${}_2 = 0$, ${}_1 = i\ {}_3$. Tomando

$$\vec{}_2 = (-1, 0, 0) \quad , \quad \vec{}_3 = (0, 0, 1),$$

que son las partes reales e imaginarias de $(-1, 0, i)$, se tiene

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\ | = 1.$$

En el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{\ ; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ las ecuaciones de están descritas en (7.5) y son

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

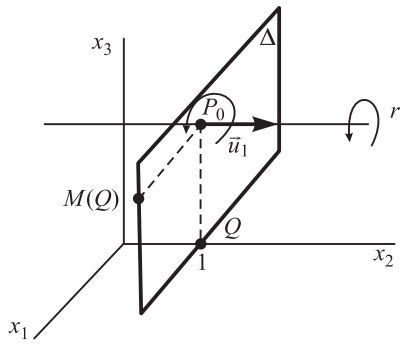
Por el Lema 10.7.3, es una simetría rotatoria, $= {}_\Delta \circ G_{r,\alpha}$ con Δ el plano de ecuación $y_1 = 1$ en $\mathcal{R}'$, es decir ${}_2 = 1$ en $\mathcal{R}$. El eje de giro tiene como vector director $\vec{}_1$ y pasa por el punto ${}_0$ cuyas coordenadas en $\mathcal{R}'$ son solución de (7.14), es decir:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Como $y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 2$, las coordenadas de ${}_0$ en $\mathcal{R}$ son

$${}_0 = (0, 1, 0) + 2(0, 0, 1) = (0, 1, 2).$$

Para hallar el ángulo de giro α tomamos $= (0, 1, 0) \in \Delta$ y observamos que $(\ ) = (2, 1, 2)$. En la figura 10.48 se observa que con la orientación elegida para r, esto es la del vector $\vec{}_1$, se tiene $\alpha = 270^o$.



i ra 10.48

En resumen, es una simetría rotatoria con respecto al plano Δ de ecuación $_2 = 1$, eje de giro

$$r: (0, 1, 2) + t(0, 1, 0)$$

y ángulo de giro 270º poniendo en r la orientación de $\vec{}_1 = (0, 1, 0)$. El plano Δ y la recta r se han dibujado en la figura 10.48.

Observa que si hubieramos elegido $-\vec{}_1 = (0, -1, 0)$ para orientar r el ángulo de giro sería 90º.

10.8. ECUACIONES DE LOS MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^3$

El Teorema 10.7.4 nos da una descripción de cuáles son los posibles movimientos en el espacio. En esta sección mostraremos cómo hallar las ecuaciones de estos movimientos. Puesto que las ecuaciones de una traslación $_{\vec{a}}$ son sencillas, a saber,

$$_{\vec{a}}\begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a} = \ _1\vec{e}_1 + \ _2\vec{e}_2 + \ _3\vec{e}_3,$$

basta aprender a construir las ecuaciones de una reflexión con respecto a un plano y un giro con respecto a un eje. El resto de los movimientos se obtiene como composición de los tres anteriores.

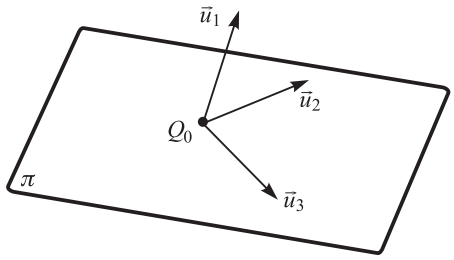
Sea $_\pi$ la reflexión con respecto al plano π de ecuación

$$\pi: a \ + by + \ \ = \ \ $$

dado en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{ \ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Se puede proceder hallando un vector unitario $\vec{}_1$ perpendicular a π y completándolo con dos vectores $\vec{}_2$, $\vec{}_3$ de manera que $\{\vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. En el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{ \ _0; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$, donde $_0$ es un punto de π, las ecuaciones de $_\pi$ son (ver figura 10.49)

$$_\pi\begin{pmatrix} \\ y' \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y' \\ \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$



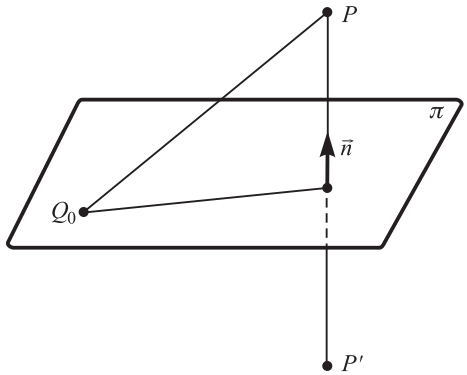
i ra 10.49

Las ecuaciones de $_\pi$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ se obtienen cambiando de sistema de referencia como se indicó en la sección 10.1.

Describiremos a continuación un procedimiento geométrico para hallar las ecuaciones de $_\pi$. Sea $\vec{n}$ un vector unitario perpendicular (o normal) a π, es decir

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + \ ^2}}(a, b, \ )$$

en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.



i ra 10.50

La imagen, $'$, de un punto es de la forma $' = \ - \lambda\vec{n}$, donde $\lambda = 2\ (\ , \pi)$. Para calcular $(\ , \pi)$ tomamos $_0$ un punto cualquiera de π y observamos que

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{\ _0}, \vec{n}) = \frac{(\ , \pi)}{\|\overrightarrow{\ _0}\|}.$$

Por tanto,

$$(\ , \pi) = \|\overrightarrow{\ _0}\| \cos \sphericalangle(\overrightarrow{\ _0}, \vec{n}) = (\overrightarrow{\ _0}, \vec{n}).$$

Así pues, las ecuaciones de la simetría están dadas por

$$' = \ - 2(\overrightarrow{\ _0}, \vec{n})\vec{n}. \tag{8.2}$$

Para escribir (8.2) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ tomamos

$$= \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}, \quad _0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi.$$

Un sencillo cálculo permite llegar a la conclusión siguiente:

$$_\pi \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \frac{2}{a^2+b^2+\ ^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{2}{a^2+b^2+\ ^2} \begin{pmatrix} (a^2-b^2-\ ^2)/2 & ba & a \\ ab & (b^2-a^2-\ ^2)/2 & b \\ a & b & (\ ^2-a^2-b^2)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \end{pmatrix},$$

que es la expresión en coordenadas cartesianas de la simetría con respecto al plano π.

EJEMPLO A. *n ontrar la e a ione e la imetría on re e to al lano e a a or* (0, 1, 1) *y e er en i lar al ve tor* (2, 1, 1).

Si $= \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puesto que $' = \ - 2(\overrightarrow{\ _0}, \vec{n})\vec{n}$ tenemos:

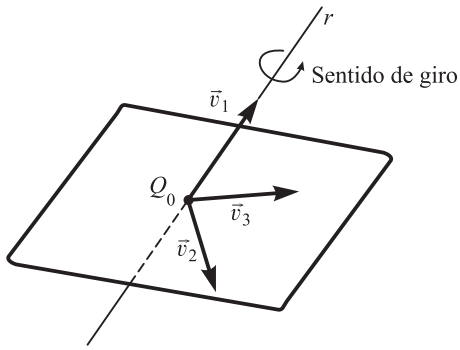
$$_\pi \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} - 2 \left(\left(\begin{pmatrix} y-1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} - \frac{2}{6} (2 \ + y - 1 + \ - 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3\ y - 2/3 & +4/3 \\ y - 2/3 & -1/3\ y - 1/3 & +2/3 \\ -2/3 & -1/3\ y - 1/3 & +2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}.$$

* * *

Sea $G_{r,\varphi}$ un giro de ángulo φ con respecto a una recta r en $\mathbb{R}^3$, orientada según un vector unitario $\vec{v}_1$. Se toman $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ tal que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1$ (ver figura 10.51).



i ra 10.51

Si $_0$ es un punto de la recta r, en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{\ _0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ las ecuaciones de $G_{r,\varphi}$ son

$$G_{r,\varphi}\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix}$$

(ver sección 10.7). Las ecuaciones de $G_{r,\varphi}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{\ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se obtienen cambiando de sistema de referencia como se indicó en la sección 10.1.

Nota Si hubieramos elegido una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{v}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3\}$ con $\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_3 = -\vec{v}_1$ (orientación distinta de la orientación dada por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$) las ecuaciones serían

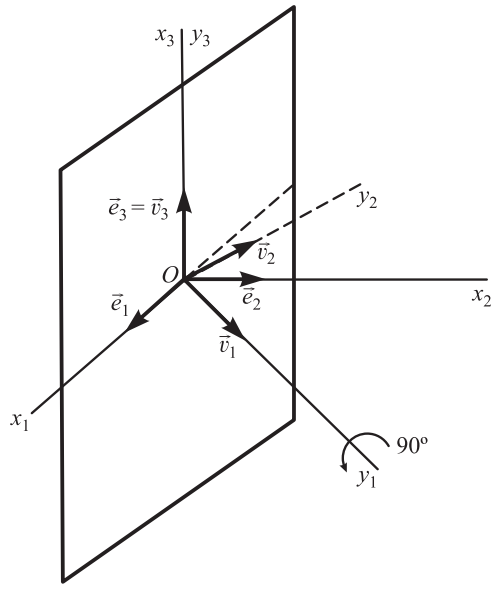
$$G_{r,\varphi}\begin{pmatrix} '' \\ y'' \\ '' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} '' \\ y'' \\ '' \end{pmatrix}$$

(ver ejemplo A de la sección 5.2).

EJEMPLO B. *allar la e a ione el giro e ng lo o on re e to a la re ta r orienta a eg n* $\vec{v} = (1, 1, 0)$ *y e a a or* $= (0, 0, 0)$.

Tomamos $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ *y* $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$; elegimos $\vec{v}_2$ de manera que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{\ } & \vec{\ } \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$



i ra 10.52

Con respecto al sistema de referencia $\{\ ;\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ (ver figura 10.52) las ecuaciones de $G_{r,\,90^o}$ son

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

A continuación cambiamos del sistema de referencia $\{\ ;\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ al sistema de referencia $\{\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$: si $\vec{\ } = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 + {}_3\vec{e}_3$ se tiene

$${}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 + {}_3\vec{e}_3 = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + y_3\vec{v}_3 = y_1\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + y_2\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + y_3\vec{e}_3$$

$$= \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}.$$

Similarmente,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1' \\ {}_2' \\ {}_3' \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo estos resultados en (8.3) y realizando el cálculo correspondiente se tiene:

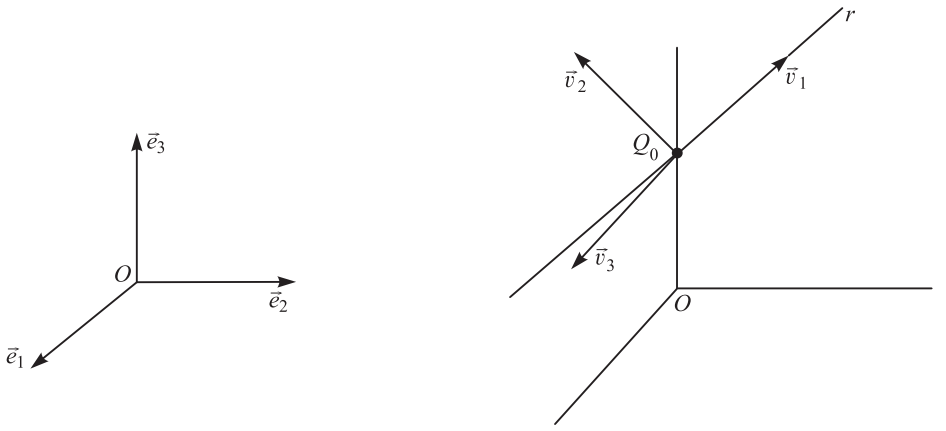
$$\begin{pmatrix} {}_1' \\ {}_2' \\ {}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}.$$

* * *

EJEMPLO C. *allar la e a ione e la om o i i n el giro e ng lo o on re e to a la re ta r* $(0, 0, 1) + t(0, 1, 1)$ *on la tra la i n e ve tor* $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

Sea $\mathcal{R}' = \{\ ;\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ con $= (0,\ 0,\ 1),\ \vec{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1),\ \vec{v}_3 = (1,\ 0,\ 0)$ y $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$.



i ra 10.53

Las ecuaciones del giro de ángulo 180º en torno a r (no hace falta indicar la orientación en r por ser el giro de 180º) en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$ son

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = G_{r,\,180^o} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

A continuación pasamos al sistema de referencia $\{\ ;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: si $\ = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 + {}_3\vec{e}_3$ $= y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + y_3\vec{v}_3$ se tiene

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, en el sistema de referencia $\{\ ;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} {}_1' \\ {}_2' \\ {}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}.$$

Para pasar ahora al sistema de referencia $\{\ ;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ trasladamos $\ = ({}_1, {}_2, {}_3)$ y $' = ({}_1', {}_2', {}_3')$ mediante el vector (0, 0, 1) para obtener

$$\begin{pmatrix} {}_1' \\ {}_2' \\ {}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}.$$

Al hacer la composición con $_{\vec{v}}$, donde $\vec{v} = (1, 1, 0)$ se tiene que si $= {}_{\vec{v}} \circ G_{r,\,180^\circ}$,

$$\begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prime \\ 1 \\ \prime \\ 2 \\ \prime \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

que son las ecuaciones buscadas.

Observación. Al mismo resultado se habría llegado si observamos que $_{\vec{v}} \circ G_{r,\,180^\circ}(\ ) = \ + \ (\ )$, donde

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$, $(\vec{e}_2) = \vec{e}_3$, $(\vec{e}_3) = \vec{e}_2$ (ver figura 10.53) y calculamos teniendo en cuenta que

$${}_{\vec{v}} \circ G_{r,\,180^\circ}(\ ) = {}_{\vec{v}} \circ G_{r,\,180^\circ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}_{\vec{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.9. MOVIMIENTOS EN $\mathbb{R}^3$ Y PUNTOS FIJOS

En la sección 10.7 se ha mostrado cómo identificar un movimiento en $\mathbb{R}^3$ a partir de sus ecuaciones y como determinar sus elementos geométricos (recta y ángulo de giro, plano de simetría y vector de traslación). Para ello se hizo uso de la forma de Jordan real de la matriz ortogonal asociada a un movimiento .

En esta sección vamos a mostrar cómo se identifica un movimiento en $\mathbb{R}^3$ y cómo se determinan sus elementos geométricos a partir del estudio de sus puntos fijos y de sus subvariedades invariantes.

Recordar que un movimiento en $\mathbb{R}^3$ tiene por ecuaciones

$$(\ ) = \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \ + \ \cdot \tag{9.1}$$

en un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ en el que $\overrightarrow{\ } = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 + {}_3\vec{e}_3$, $\overrightarrow{\ } = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, y es una matriz ortogonal de orden 3.

Un punto es un *nto i o* de si $(\ ) = $, es decir

$$= \ + \ \cdot \quad \Leftrightarrow \quad (\ - \ )\cdot \ = \ . \tag{9.2}$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4) para estudiar el sistema de ecuaciones (9.2) basta conocer el rango de $-$, $r(\ -\ )$, y el rango de $(\ -\ |\ )$, $r(\ -\ |\ )$, donde

(− |) es la matriz − a la que se ha añadido la columna $(a_1, a_2, a_3)^t$. Como se ha añadido solo una columna y la matriz − es de orden 3, las posibilidades que tenemos se describen en el siguiente cuadro:

Caso	$r(I - T)$	$r(I - T\|A)$
I	0	0
		1
II	1	1
		2
III	2	2
		3
IV	3	3

i ra 10.54

r − T) =

Si r(−) = 0, se tiene = . Si r(− |) = 0, el movimiento es la identidad; si r(− |) = 1, el movimiento es una traslación de vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \neq \vec{0}$.

Para estudiar el resto de los casos escribamos = ^{t} (ver Teorema 8.6.2) con $\in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonal y una de las matrices

$$
{}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad {}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,
$$

$$
{}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad {}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \tag{9.3}
$$

En la sección 10.7 se ha probado que en el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{\ ; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$, donde las coordenadas de $\vec{}$, = 1, 2, 3, en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ son los elementos de la columna de la matriz , el movimiento dado en (9.1) se escribe

$$
(\ ) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \quad + \ \cdot \ , \quad \text{con} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \ {}^t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{9.4}
$$

Puesto que − = (−) ^{t} y el rango de una aplicación no depende de la base elegida para representarla,

$$
r(\ - \ ) = r(\ - \ ). \tag{9.5}
$$

El resultado siguiente muestra que también se cumple $r(\ -\ |\ ) = r(\ -\ |\ )$.

Lema 10.9.1

Si $\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $=\ ^{-1}$ con $,\ \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y invertible, $r(\ |\ ) = r(\ |\ )$ con $= (a_1, ..., a_n)^t$ y $=\ ^{-1}\cdot\ .$

Demostración. Sea $= r(\ |\ ), 0 \leqslant \leqslant n$. Si $= 0,$ y son nulos y también y . Así pues, consideremos $1 \leqslant \leqslant n$. Como es un vector columna, $r(\ ) =$ ó $r(\ ) =\ - 1$.

Si $r(\ ) =\ = r(\ |\ )$, el sistema de ecuaciones $\cdot\ =\ ,$ con $= (\ _1, ..., \ _n)^t$ es compatible. Puesto que es invertible, el sistema de ecuaciones $\cdot\ =\ ,\ = (y_1, ..., y_n)^t$, es compatible. Luego, $^{-1}\ \cdot\ =\ ^{-1}$ es también compatible. Por tanto, $\cdot\ =$ es compatible, de donde se deduce $r(\ |\ ) = r(\ ) = r(\ ) =\ ,$ puesto que y son matrices equivalentes.

El razonamiento en el caso $r(\ ) =\ - 1$ es similar, teniendo en cuenta que ahora el sistema de ecuaciones $\cdot\ =$ es incompatible. ■

Observación 1 . .2. De la clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^3$ dada en el Teorema 10.7.4 podemos concluir lo siguiente:

i) $r(\ -\ ) = 0 = r(\ -\ |\ ) \Leftrightarrow$ es la identidad.
ii) $r(\ -\ ) = 1 = r(\ -\ |\ ) \Leftrightarrow$ es una reflexión (que es el único movimiento con un plano de puntos fijos).
iii) $r(\ -\ ) = 2 = r(\ -\ |\ ) \Leftrightarrow$ es un giro (que es el único movimiento con una recta de puntos fijos).
iv) $r(\ -\ ) = 3 = r(\ -\ |\ ) \Leftrightarrow$ es una simetría rotatoria (que es el único movimiento con un solo punto fijo).

Estudiamos a continuación los casos II, III y IV de la tabla de la figura 10.54.

$$r\quad - T) =$$

Como $r(\ -\ ) = r(\ -\ )$ y $\ _3$ es la única matriz de la lista (9.3) que satisface $r(\ -\ ) = 1$, la ecuación del movimiento en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{\ ;\ \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ es

$$(\ ) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =\ +\ _3\cdot\ . \tag{9.6}$$

Si $r(\ -\ |\ ) = 1$, por la parte ii) de la observación 10.9.2, es una reflexión con respecto a un plano π. El plano π es el plano de puntos fijos, por lo que es la solución del sistema $(\ -\ )\cdot\ =\ .$

Si $r(\ -\ |\ ) = 2$, por el Lema 10.9.1 con $=\ -\ , r(\ -\ _3|\ ) = 2$. Como

$$2 = r(\ -\ _3|\ ) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right),$$

se ha de tener $\vec{v} = b_2\vec{}_2 + b_3\vec{}_3 \neq \vec{0}$. Escribir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ {}_3\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \ {}_{\vec{v}}\circ \ {}' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Como

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1 = r\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el movimiento $'$ es una reflexión (parte ii) de la observación 10.9.2). Puesto que $= \ {}_{\vec{v}}\circ \ {}'$ y $\vec{v}$ es un vector paralelo al plano de simetría $\pi = \ + L(\vec{}_1, \vec{}_2)$, es una simetría deslizante.

Lema 10.9.2

Sea $( ) = \ + \ \cdot$ una simetría deslizante, $= \ {}_{\vec{v}}\circ \ {}_{\Delta}$, en $\mathbb{R}^3$.

a) El plano de simetría Δ de es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $(-) - (-)^2 = .$

b) Si ${}_0 \in \Delta$, el vector de traslación de es $\vec{v} = \overrightarrow{{}_0 \ (\ {}_0)}$.

Demostración. La parte b) es sencilla. Para demostrar a) observar que los puntos del plano de simetría deben satisfacer $\overrightarrow{\ '} = \overrightarrow{' \ ''}$ con $' = \ (\ ), \ '' = \ (\ ')$. Entonces,

$$\overrightarrow{\ '} = \ '' - \ ' = \ + \ \cdot \ ' - \ - \ = \ (\overrightarrow{\ '}),$$

por lo que $\overrightarrow{\ '}$ es un autovector de de autovalor 1. Por tanto $(\ - \ )(\overrightarrow{\ '}) = \vec{0}$ y como puntos de $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$= (\ - \ )(\ + \ \cdot \ - \ ) = (\ - \ ) \cdot \ - (\ - \ )^2 \cdot \ ,$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

$$r \ - T) =$$

Como $r(\ - \ ) = r(\ - \ ) = 2$ y ${}_2$ es la única matriz de la lista (9.3) que satisface $r(\ - \ ) = 2$, la ecuación del movimiento en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{ \ ; \vec{}_1, \vec{}_2, \vec{}_3\}$ es

$$( ) = \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \ + \ {}_2 \cdot \ . \qquad (9.7)$$

Si $r(\ - \ | \ ) = 2$, por la parte iii) de la observación 10.9.2, es un giro con respecto a una recta r. La recta r tiene todos sus puntos fijos, por lo que es la solución del sistema $(\ - \ ) \cdot \ = \ .$

Si $r(\ - \ | \ ) = 3$, por el Lema 10.9.1 con $= \ -$ se tiene que, $r(\ - \ {}_2| \ ) = 3$. Como

$$3 = r(\ - \ {}_2| \ ) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1-\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & b_2 \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & 1-\cos\varphi & b_3 \end{array}\right)$$

se ha de tener $\vec{} = b_1\vec{}_1 \neq \vec{0}$. Escribir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \ _2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \ _{-o} \ ' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Como

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & b_2 \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & 1-\cos\varphi & b_3 \end{array}\right) = 2 = r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & 1-\cos\varphi \end{pmatrix}$$

el movimiento $'$ es un giro (parte iii) de la observación 10.9.2). Puesto que $= \ _{-o} \ '$ y $\vec{}$ es un vector paralelo al eje de giro, $r = \ + L(\vec{}_1)$, es un movimiento helicoidal.

Lema 10.9.3

Sea $( ) = \ + \ \cdot$ un movimiento helicoidal, $= \ _{-o} G_{r,\varphi}$, en $\mathbb{R}^3$.

a) El eje de giro r de es el conjunto de punto de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $(-) - (-)^2 = .$

b) El ángulo de giro φ satisface $1 + 2\cos\varphi =$ traza$( )$ con traza$( ) =$ suma de los elementos de la diagonal principal de .

c) Si $_0 \in r$, el vector de traslación de es $\vec{v} = \overrightarrow{\ _0 \ (\ _0)}$.

Demostración. a) Si es un punto del eje de giro, $\overrightarrow{\ '} = \overrightarrow{\ ' \ ''}$ con $' = ( )$, $'' = (')$. Entonces,

$$\overrightarrow{\ '} = \ '' - \ ' = \ + \ \cdot \ ' - \ - \ \cdot \ = (\overrightarrow{\ '}),$$

por lo que $\overrightarrow{\ '}$ es un autovector de de autovalor 1. Por tanto $(-)(\overrightarrow{\ '}) = \vec{0}$ y como puntos de $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$= (-)(\ + \ \cdot \ - \ ) = (-) \cdot \ - (-)^2 \cdot \ .$$

b) Puesto que

$$^t \quad = \ _2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

y la traza de una matriz no varía al hacer cambios de base (ver ejercicio 7 al final de esta sección), traza $( )$ = traza $(_2) = 1 + 2\cos\varphi$.

c) Esta parte es evidente. ■

$$r \ - T) =$$

En este caso $r(- \ | \ ) = 3 = r(-)$ y, por la parte iv) de la observación 10.9.2, es una simetría rotatoria, $= \ _{\Delta} o \, G_{r,\varphi}$. El punto fijo $_0$ de es la solución del sistema $(-) \cdot \ = \ .$ Los elementos geométricos de este movimiento se determinan usando el siguiente resultado:

Lema 10.9.4

Sea $( ) = + \cdot$ una simetría rotatoria, $= {}_{\Delta} \circ G_{r,\varphi}$, en $\mathbb{R}^3$.

a) El eje de giro r de es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $(+) \cdot + ({}^2 -) = .$

b) El ángulo de giro φ satisface $-1 + 2\cos\varphi =$ traza( ) con traza( ) = suma de los elementos de la diagonal principal de .

c) El plano Δ es perpendicular al eje de giro r y pasa por el punto fijo ${}_0$ solución de $(-) = .$

Demostración. a) Si es un punto del eje de giro, $\overrightarrow{\ \ '} = -\overrightarrow{' \ ''}$ con $' = ( )$, $'' = (')$. Entonces

$$\overrightarrow{\ \ '} = -\overrightarrow{' \ ''} = ' - '' = + \cdot - - \cdot ' = -(\overrightarrow{\ \ '})$$

por lo que $\overrightarrow{\ \ '}$ es un autovector de de autovalor -1. Por tanto $(+)(\overrightarrow{\ \ '}) = \vec{0}$ puntos de $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$= (+)(+ \cdot -) = (+) \cdot + ({}^2 -) \cdot .$$

b) Puesto que

$$^t = {}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

y la traza de una matriz no varía al hacer cambios de base (ver ejercicio 7 al final de esta sección), traza( ) = traza(${}_4$) $= -1 + 2\cos\varphi$.

c) Esta parte es evidente por definición de simetría rotatoria. ■

* * *

Para usar en los ejercicios que siguen es conveniente resumir algunos de los resultados anteriores, lo que se hace en el cuadro de la figura 10.55.

T	$r(I - T)$	$r(I - T \mid A)$	**Movimiento $P' = A + T(P)$**
I $\lvert T\rvert = 1$	0	0 1	*Identidad* *Traslación*
Simetría respecto a un plano: $\lvert T\rvert = -1$	1	1 2	*Simetría* respecto a un plano de puntos fijos. *Simetría deslizante*: composición de simetría y traslación paralela al plano de simetría.
Giro o rotación: $\lvert T\rvert = 1$	2	2 3	*Giro* en torno a un eje de puntos fijos. *Movimiento helicoidal*: composición de giro y traslación paralela al eje de giro.
Simetría $\circ$ Giro: $\lvert T\rvert = -1$	3	3	*Simetría rotatoria*: composición de un giro y una simetría; el eje de giro y el plano de simetría son perpendiculares.

i ra 10.55

* * *

Recordar que una *bvarie a lineal* L en un espacio afín es *invariante* mediante una transformación afín si $(L) \subset L$. En el espacio, además de $\mathbb{R}^3$, las subvariedades lineales invariantes pueden ser puntos, rectas o planos. Observar que en el espacio hay movimientos que no tienen puntos fijos, pero poseen subvariedades invariantes: ¿cuáles?

EJEMPLO A. *t iar el mo imiento e e a ione*

$$( ) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \quad .$$

Como

$$- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad r(-) = 1,$$

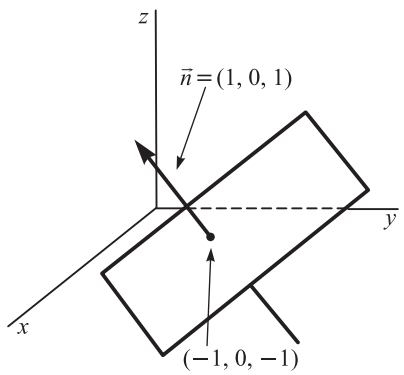
y puesto que

$$(- \mid) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad , \quad r(- \mid) = 1,$$

el movimiento es una *imetría*.
El plano de simetría es el conjunto de puntos fijos que satisfacen

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - \\ y \\ - \end{pmatrix}.$$

Se trata del plano $+ = -2$, que ha sido dibujado en la figura 10.56.



i ra 10.56

Todas las rectas perpendiculares al plano de simetría son rectas invariantes; estas rectas tienen por ecuaciones paramétricas

$$(, y,) = (_1, _2, _3) + t(1, 0, 1) \, , \, t \in \mathbb{R},$$

con $(_1, _2, _3)$ un punto cualquiera del plano $+ = -2$.

* * *

EJEMPLO B. *t iar el mo imiento a o or*

$$( ) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \quad .$$

Como

$$r(\ -\ ) = r\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

y

$$r(\ -\ |\ ) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) = 2,$$

el movimiento es un giro. Los puntos del eje de giro satisfacen

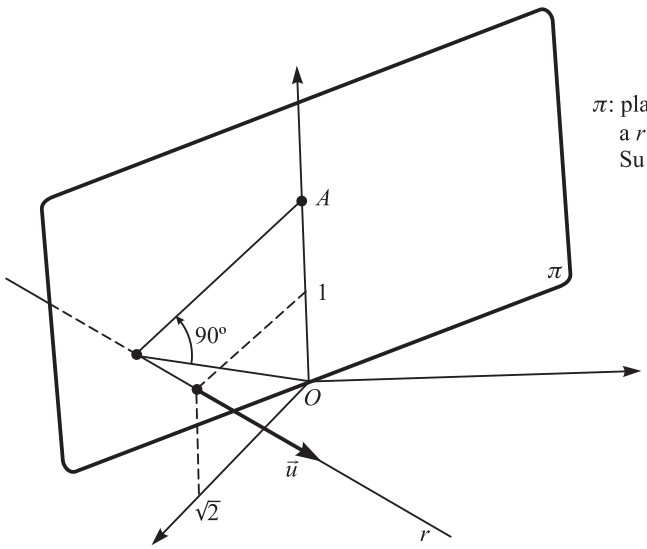
$$(\ -\ )\cdot\ =\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene como soluciones $= 1$, $- y = \sqrt{2}$. El eje de giro es

$$r: (\ , y,\ ) = (\sqrt{2}, 0, 1) + t(1, 1, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Para hallar el ángulo de giro φ se usa el Lema 10.9.3: $1 + 2\cos\varphi = \text{traza}(\ ) = 1$. Por tanto, $\cos\varphi = 0$.

Si elegimos $\vec{\ } = (1, 1, 0)$ como orientación de r, como el punto $= (0, 0, 0)$ se transforma en $= (0, 0, 2)$ mediante se tiene $\varphi = 90^o$ (ver figura 10.57). Si hubieramos elegido $-\vec{\ }$ como orientación de r, el ángulo de giro sería 270^o.



π: plano perpendicular a r que pasa por O. Su ecuación es $x+y=0$.

i ra 10.57

EJEMPLO C. *eterminar lo elemento geom tri o el mo imiento a o or*

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}.$$

Como

$$r(\ -\ ) = r\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

y

$$r(\ -\ |\ ) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3$$

el movimiento es un *movimiento eli oi al*. Hemos de determinar el eje de giro, el ángulo de giro y el vector de traslación (paralelo al eje de giro).

Por el Lema 10.9.3 los puntos $= ({}_1, {}_2, {}_3)^t$ del eje de giro satisfacen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, las ecuaciones del eje de giro son

$${}_1 = \frac{1}{2}, \quad 2\ {}_2 - 2\ {}_3 = -1.$$

Un punto ${}_0$ de este eje de giro es ${}_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ y puesto que

$${}'_0 = \quad ({}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

el vector de traslación de este movimiento helicoidal es

$$\overrightarrow{{}_0\ {}'_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Observar que las ecuaciones del eje de giro pueden escribirse de la forma

$$_1 = \frac{1}{2}, \quad _2 = t, \quad _3 = \frac{1}{2} + t$$

y que el vector de traslación $\overrightarrow{\ \ \ }$ es paralelo al eje de giro.

Para el ángulo de giro φ, el apartado b) del Lema 10.9.3 produce $1 + 2\cos\varphi = \text{traza}(\ ) = -1$. Por tanto $\cos\varphi = -1$, por lo que el ángulo de giro es 180^o.

EJEMPLO D. *t iar el mo imiento e e a ione*

$$\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$- \ = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (\ - \ | \ ) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right),$$

se tiene que $r(\ - \ ) = 1$ y $r(\ - \ | \ ) = 2$. El movimiento es una simetría deslizante. Hemos de determinar el plano de simetría y el vector de traslación.

Por el Lema 10.9.2, los puntos $= (\ , y, \ )^t$ del plano de simetría Δ satisfacen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} \ + y + \\ \ + y + \\ \ + y + \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\ + y + \ = 1$ es la ecuación del plano de simetría Δ. Para encontrar el vector de traslación tomamos $_0 = (1,\ 1,\ -1) \in \Delta$, con lo cual tenemos

$$'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}.$$

El vector de traslación $\vec{a}$ es

$$\vec{a} = \overrightarrow{\ \ \ } = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El plano Δ es una subvariedad invariante de este movimiento. Las subvariedades lineales invariantes de dimensión 1 de este movimiento son todas las rectas contenidas en el plano Δ que tienen a $\vec{a} = \frac{1}{3}(1,\ 1,\ -2)$ como vector director.

* * *

EJEMPLO E. *t iar el mo imiento*

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$r(\ -\ ) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Se trata de una simetría rotatoria con plano de simetría Δ perpendicular al eje de giro r. El punto de intersección del plano de simetría y del eje de giro es el punto fijo $_0$ de esta transformación. Las coordenadas de $_0$ satisfacen

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{r} = 2 - \\ y = 2 - y \\ = 2 + \end{array}\right\},$$

de donde deducimos que $_0 = (0, 1, 2)$.

Según el Lema 10.9.4, los puntos $= (\ , y,\ )^t$ del eje de giro satisfacen

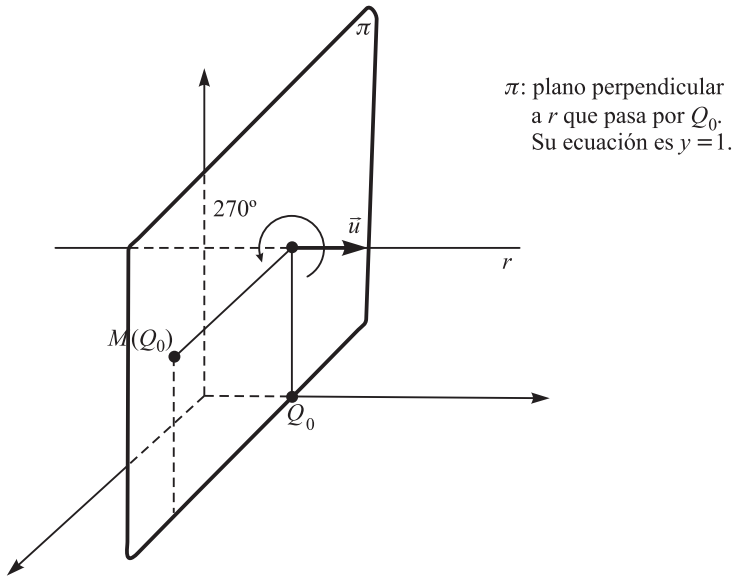
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} = 0 \\ = 2 \end{array} \right\}.$$

El eje de giro es

$$r\colon (0, 0, 2) + t(0, 1, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Como el plano de simetría ha de ser perpendicular al eje de giro y pasar por el punto fijo $_0 = (0, 1, 2)$, su ecuación es $y = 1$.

La parte b) del Lema 10.9.4 nos da $-1 + 2\cos\varphi = \text{traza}(\ ) = -1$. Por tanto $\cos\varphi = 0$. Si orientamos r según el vector $^{\rightarrow} = (0, 1, 0)$, tomando $_0 = (0, 1, 0)$ se tiene $(\ _0) = (2, 1, 2)$ y se observa en la figura 10.58 que el ángulo de giro es 270^o. Si hubiéramos elegido $-^{\rightarrow}$ para orientar r el ángulo de giro sería 90^o.



i ra 10.58

EJERCICIOS (Secciones 10.8 y 10.9)

1. Hallar la expresión analítica de los siguientes movimientos en el espacio:
   a) Simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.
   b) Movimiento helicoidal respecto al eje $\{\lambda(1, -1, 0);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ con un giro de 180º y vector de traslación $\vec{v} = (2, -2, 0)$.
   c) Giro cuyo eje pasa por (1, 1, 0) y (0, 0, 1) y que envía (0, 1, 0) en (1, 1, 1).
   d) Composición de los movimientos a) y b).

2. Estudiar los siguientes movimientos en el espacio, hallando su tipo, subvariedades invariantes y elementos geométricos:

   a) $$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   b) $$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   c) $$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   d) La composición $f_3 \circ f_2$ y $f_2 \circ f_3$.

3. Hallar los movimientos del espacio que conmutan con la simetría respecto del plano $= 0$.

4. Dado el movimiento helicoidal

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix},$$

hallar su descomposición canónica como composición de un giro con una traslación de vector paralelo al eje de giro.

5. a) Dados los planos paralelos π_1 y π_2 de ecuaciones π_1: $+ y = 1$ y π_2: $+ y = 4$, encontrar las ecuaciones del movimiento $= {}_{\pi_2} \circ {}_{\pi_1}$. Demostrar que es una traslación y encontrar su vector de traslación.

   b) Demostrar que para cualesquiera dos planos paralelos π_1 y π_2 en $\mathbb{R}^3$, $= {}_{\pi_2} \circ {}_{\pi_1}$ es una traslación; encontrar el vector de traslación.

6. a) Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones π_1: $= 1$ y π_2: $+ y - = 2$, encontrar las ecuaciones de $= {}_{\pi_1} \circ {}_{\pi_2}$. Demostrar que es un giro con respecto a un eje y encontrar el eje y el ángulo de giro.

   b) ¿Qué relación existe entre el eje del giro y los planos π_1 y π_2?

   c) ¿Qué relación existe entre el ángulo de giro de y el ángulo que forman π_1 y π_2?

7. Sean , $\in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ con $| \ | \neq 0$. Demostrar que si $= {}^{-1}$, traza ( ) = traza ( ). [*geren ia*: si $(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda + a_0$ es el polinomio característico de , demostrar que $a_2 =$ traza ( ); utilizar a continuación que (λ) es invariante mediante un cambio de base].

Capítulo 11

Secciones cónicas.

11.1. Definiciones.

11.2. La circunferencia y algunas de sus propiedades.

11.3. La elipse y la hipérbola.

11.4. Nueva definición de las secciones cónicas: la elipse, la hipérbola y la parábola.

11.5. Ecuaciones de las cónicas.

11.6. Determinación de las cónicas.

11.7. Determinación del tipo de una cónica.

11.8. Invariantes de las cónicas y reducción a su forma canónica.

11.9. Determinación del centro y de los ejes principales de una cónica con centro.

11.10. Determinación del vértice y del eje de una parábola.

11.11. Haces de cónicas.

11.1. DEFINICIONES

Un *doble cono recto* en $\mathbb{R}^3$ es la figura que engendra una recta g al girar alrededor de una recta que la corta. La recta se denomina *eje del cono* y las distintas posiciones de g, *generatrices del cono*; el punto de intersección del eje con una cualquiera de las generatrices del cono se denomina *vértice* (ver figura 11.1).

Toda figura (plana) que se obtiene como intersección de un doble cono recto con un plano se denomina una *cónica*.

Según las distintas posiciones del plano las secciones cónicas, o simplemente *cónicas*, reciben nombres diferentes, que se dan a continuación (ver figura 11.2).

a) El plano y el eje del cono forman entre sí un ángulo superior al ángulo que forman el eje del cono y una cualquiera de las generatrices.

   a1) Si el plano es perpendicular al eje del cono, y no pasa por el vértice, la cónica se denomina una *circunferencia*. En el caso especial de que el plano pase por el vértice se obtiene *punto*.

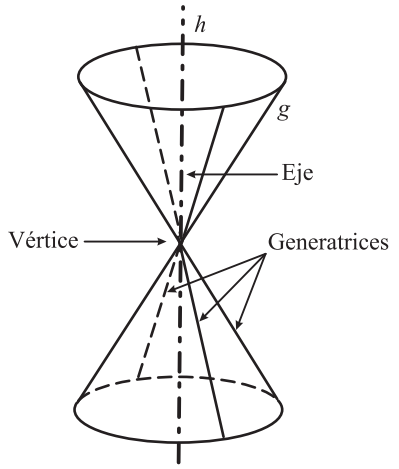
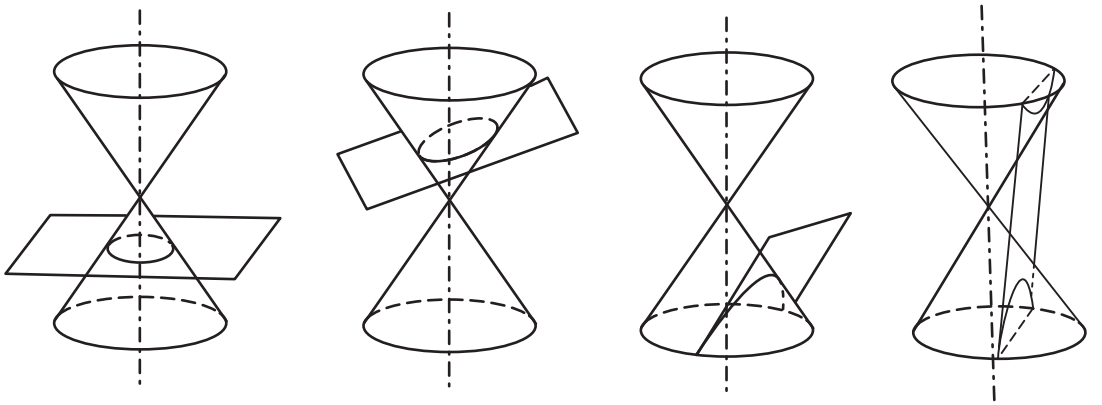


figura 11.1



*a*1) Circunferencia *a*2) Elipse *b*) Parábola *c*) Hipérbola

figura 11.2

a2) Si el plano no es perpendicular al eje del cono, la cónica resultante se denomina *eli e*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtiene un *nto*.

b) Si el plano es paralelo a una cualquiera de las generatrices la cónica se denomina *ar bola*, excepto si el plano pasa por el vértice, en cuyo caso se obtiene una *re ta*, tangente al cono.

c) Si el ángulo que forman el plano y el eje de giro es inferior al ángulo que forman el eje y una cualquiera de las generatrices, la cónica se denomina *i rbola*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtienen *o re ta e e ortan*.

Los casos especiales que aparecen en los casos anteriores se denominan *e ione ni a egenera a* . De ellos *no* nos ocuparemos aquí por haber sido estudiados anteriormente.

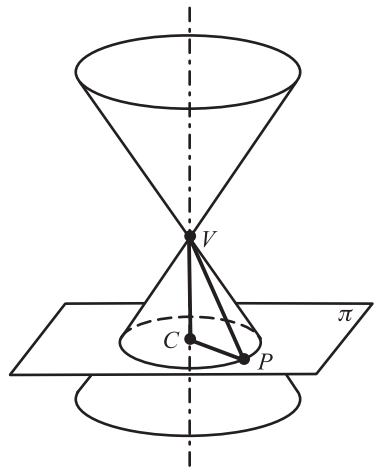
La primera persona que estudió las secciones cónicas fue Menaechmus de Grecia, como consecuencia de su interés en el problema de construir con regla y compás un cubo de volumen doble al de un cierto cubo dado; esto sucedió en el siglo IV antes de Cristo. En el mismo siglo el geómetra Euclides escribió cuatro libros sobre las secciones cónicas, de los cuales ninguno se conserva actualmente.

El primer tratado escrito que se conserva sobre las secciones cónicas es debido a Apolonio de Perga; en sus ocho libros, de los cuales se conservan solo los siete primeros, Apolonio fue el primero en estudiar las propiedades geométricas de las secciones cónicas. Varias de estas propiedades geométricas serán estudiadas en las secciones siguientes.

11.2. LA CIRCUNFERENCIA Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES

En el caso de la circunferencia la distancia del vértice del cono a un punto cualquiera de la circunferencia es constante; como $\overrightarrow{\quad}$ es fijo, donde es el punto de intersección del plano y el eje del cono (figura 11.3), se tiene que

$$\|\overrightarrow{\quad}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{\quad}\|^2 - \|\overrightarrow{\quad}\|^2}$$



i ra 11.3

es constante para todo de la circunferencia. Tenemos entonces

Proposición 11.2.1

Una *ir n eren ia* es el conjunto de puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo , llamado *entro*, es constante. Esta constante se denomina *ra io e la ir n eren ia*.

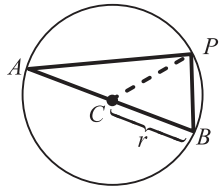
Proposición 11.2.2

Sean y dos puntos de un plano. Un punto del plano pertenece a la circunferencia en la que y son diametralmente opuestos si y solo si los vectores $\overrightarrow{\ }$ y $\overrightarrow{\ }$ son perpendiculares.

Demostración. Sea r el radio de la circunferencia y su centro. Se tiene (figura 11.4):

$$
\begin{aligned}
r^2 = \|\overrightarrow{\ }\|^2 &= (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = (\overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ }) = \\
&= (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = \\
&= -r^2 + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) - (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = \\
&= -r^2 + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ } - \overrightarrow{\ }) + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = \\
&= -r^2 + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = \\
&= -r^2 + 2r^2 + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = r^2 + (\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }).
\end{aligned}
$$

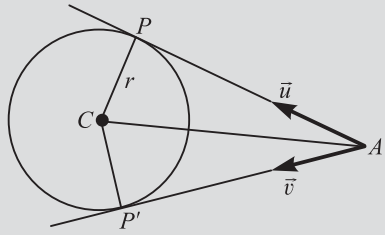
Esto es equivalente a $(\overrightarrow{\ }, \overrightarrow{\ }) = 0$, lo cual demuestra el resultado. ■



i ra 11.4

Proposición 11.2.3

Consideremos una circunferencia de centro y un punto exterior a ella. Si y ′ son los puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia que pasan por se tiene que $\|\overrightarrow{\ }\| = \|\overrightarrow{\ }'\|$. Además, $\overrightarrow{\ }$ es perpendicular a $\overrightarrow{\ }$, y $\overrightarrow{\ }'$ es perpendicular a $\overrightarrow{\ }'$.



Demostración. Sea r el radio de la circunferencia y $\vec{\ }$ un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{\ }$. Para $\lambda = \|\overrightarrow{\ }\|$ se tiene que

$$r^2 = \|\overrightarrow{\ }\|^2 = \|\overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ }\|^2 = \|\overrightarrow{\ } + \lambda\vec{\ }\|^2 =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda(\overrightarrow{\ }, \vec{\ }) + \|\overrightarrow{\ }\|^2.$$

Si consideramos la ecuación en λ, $\lambda^2 + 2\lambda(\overrightarrow{\ }, \vec{\ }) + \|\overrightarrow{\ }\|^2 - r^2 = 0$, esta ha de tener una solución únicamente, ya que $\overrightarrow{\ }$ es tangente a la circunferencia, y esta solución es $\lambda = \|\overrightarrow{\ }\|$. La ecuación de segundo grado tiene solución única si y solo si

$$(\overrightarrow{\ }, \vec{\ })^2 = \|\overrightarrow{\ }\|^2 - r^2 \tag{1.1}$$

y esta solución es

$$\|\overrightarrow{\ }\| = \lambda = -(\overrightarrow{\ }, \vec{\ }) \tag{1.2}$$

Si $\vec{v}$ es un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{\ \prime}$ el mismo razonamiento anterior produce

$$(\overrightarrow{\ }, \vec{v})^2 = \|\overrightarrow{\ }\|^2 - r^2 \tag{1.3}$$

y

$$\|\overrightarrow{\ \prime}\| = -(\overrightarrow{\ }, \vec{v}) \tag{1.4}$$

De (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) se deduce que $\|\overrightarrow{\ }\| = \|\overrightarrow{\ \prime}\|$. Además, de (1.1) y (1.2) obtenemos $\|\overrightarrow{\ }\|^2 = \|\overrightarrow{\ }\|^2 - \|\overrightarrow{\ }\|^2$ y, por tanto, el triángulo satisface el teorema de Pitágoras. Esto prueba que tiene un ángulo recto en . Un razonamiento análogo prueba que $\prime$ tiene un ángulo recto en $\prime$. Esto demuestra la proposición. ■

11.3. LA ELIPSE Y LA HIPÉRBOLA

Proposición 11.3.1

Una *eli e* es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos distintos, llamados *o o* , $_1$ y $_2$, es constante ($\|\overrightarrow{\ }_1\| + \|\overrightarrow{\ }_2\|$ = constante).

Demostración. Sea π el plano que determina la elipse. Considerar las dos esferas tangentes al cono y al plano como muestra la figura 11.5. Estas esferas tocan al plano π en los puntos $_1$ y $_2$. Sea un punto de la elipse y , los puntos de tangencia de la generatriz del cono que pasa por con cada una de las esferas. Aplicando la Proposición 11.2.3 en los planos que contienen a los puntos , $_2$, y , $_1$, se obtiene:

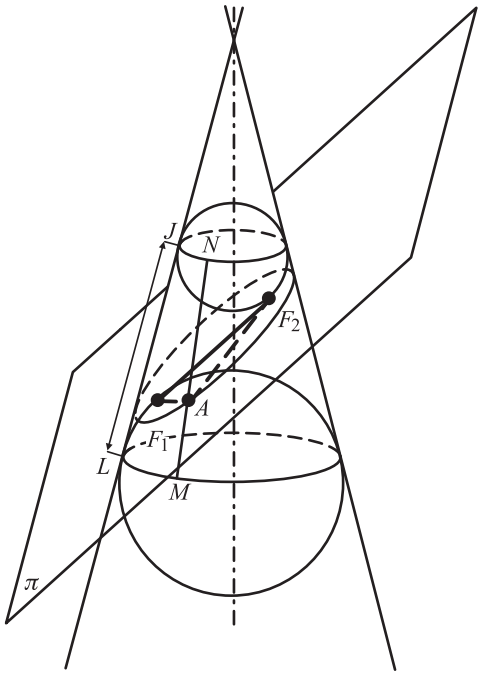
$$\|\overrightarrow{\ }_2\| = \|\overrightarrow{\ }\|$$

y

$$\|\overrightarrow{\ }_1\| = \|\overrightarrow{\ }\|.$$

Como $\|\overrightarrow{\ }\| + \|\overrightarrow{\ }\| = \|\overrightarrow{L}\|$, que es fija, se tiene que

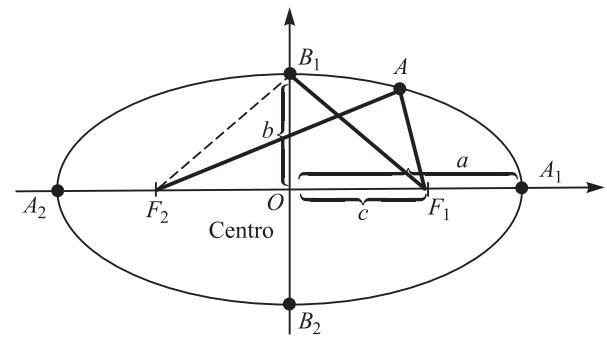
$$\|\overrightarrow{\ }_1\| + \|\overrightarrow{\ }_2\| = \|\overrightarrow{L}\| = \text{constante}.$$ ■



i ra 11.5

Si dibujamos la elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, como en la figura 11.6, el eje que contiene a los focos se denomina *e e rin i al* y el eje perpendicular al eje principal que pasa por el punto medio del segmento $\overline{}_{1\ 2}$ se denomina *e e e n ario*. Los puntos de intersección de la elipse con los ejes se denominan *v rti e* . El punto medio entre los focos se denomina *entro*.

Si *a*, *b* y son las distancias indicadas en la figura 11.6, la cantidad 2 se denomina *i tan ia o al*, *a* se denomina *emie e rin i al* y *b* se denomina *emie e e n ario*. Al cociente $\varepsilon =$ /*a*, entre y *a*, se le denomina *e entri i a* y como *a* > , se tiene que $0 < \varepsilon < 1$ en el caso de la elipse.



A_1, A_2, B_1, B_2 son vértices

i ra 11.6

Lema 11.3.2

Para todo punto de una elipse se tiene que $\|\overrightarrow{\quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_2}\| = 2a$.

Demostración. Utilizando la definición de elipse $\|\overrightarrow{\quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_2}\|$ = constante; si en lugar de ponemos $_1$ y $_2$, se obtiene

$$\|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_2}\| = \text{constante} = \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_2}\|.$$

Por tanto,

$$\|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_2}\| = \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_2}\| + \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_2}\|.$$

de aquí deducimos $2\|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| = 2\|\overrightarrow{\quad_2 \quad_2}\|$ o equivalentemente, $\|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| = \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_2}\|$. Utilizando este resultado se tiene

$$\|\overrightarrow{\quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_2}\| = \text{constante} = \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| + \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_2}\| =$$
$$= \|\overrightarrow{\quad_2 \quad_2}\| + \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_2}\| = \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_2}\| = 2a. \qquad \blacksquare$$

Del lema 11.3.2 se deduce que $\|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\| = a$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $_1 \quad _1$ tenemos $a^2 = \|\overrightarrow{\quad_1 \quad_1}\|^2 = b^2 + \quad^2$ de donde se deduce

$$b = \sqrt{a^2 - \quad^2} = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Observación. La elipse es simétrica respecto a su centro : si $'$ es el simétrico de respecto al centro , los triángulos $_1 \quad _2$ y $_2 \quad '_1$ son congruentes.

* * *

Proposición 11.3.3

Una *i rbola* es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos distintos, $_1$ y $_2$, llamados *o o* , es constante en valor absoluto ($|\|\overrightarrow{\quad_1}\| - \|\overrightarrow{\quad_2}\|| =$ constante).

Demostración. Considerar las dos esferas tangentes al cono y al plano π como muestra la figura 11.7. Sea un punto de la hipérbola y , los puntos de tangencia de la generatriz del cono que pasa por con cada una de las esferas. Aplicando la Proposición 11.2.3 en los planos que contienen a los puntos , $_1$, y , $_2$, se obtiene

$$\|\overrightarrow{\quad_1}\| = \|\overrightarrow{\quad}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{\quad_2}\| = \|\overrightarrow{\quad}\|.$$

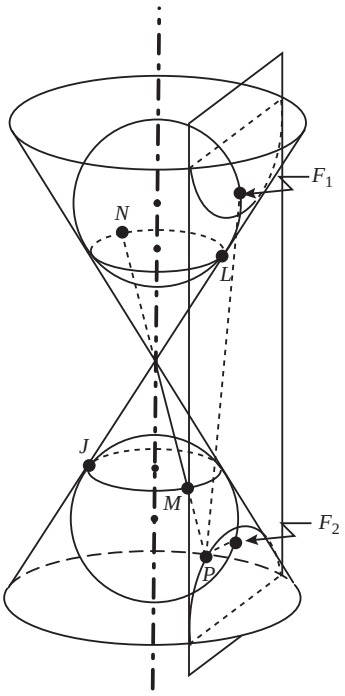
Como $\|\overrightarrow{\quad}\| - \|\overrightarrow{\quad}\| = \|\overrightarrow{L}\| = \|\overrightarrow{L}\| =$ constante, se tiene que

$$\|\overrightarrow{\quad_1}\| - \|\overrightarrow{\quad_2}\| = \text{constante}. \qquad \blacksquare$$

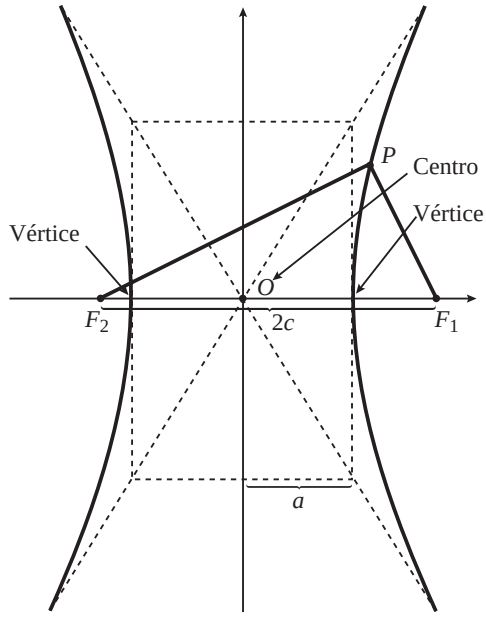
En la figura 11.8 se ha dibujado una hipérbola en un sistema de coordenadas cartesianas de manera que el *e e rin i al* contiene a los focos $_1$, $_2$ y el *e e e n ario* es perpendicular al eje principal y divide al segmento $\overline{\quad_1 \quad_2}$ en dos partes iguales. Los demás elementos de la hipérbola reciben los mismos nombres que en el caso de la elipse y están señalados en la figura 11.8.

Una demostración análoga a la del Lema 11.3.2 prueba que

$$|\|\overrightarrow{\quad_1}\| - \|\overrightarrow{\quad_2}\|| = 2a. \tag{3.1}$$



i ra 11.7



i ra 11.8

Para una hipérbola la *e entri i a* se define de nuevo como $\varepsilon = /a$ pero ahora se tiene $> a$, y, por tanto, $\varepsilon > 1$. Por analogía con el caso de la elipse definimos b como

$$b = \sqrt{\ ^2 - a^2},$$

es decir, el cateto de un triángulo rectángulo que tiene a como la hipotenusa y a a como el otro cateto. Entonces

$$b = \sqrt{a^2\varepsilon^2 - a^2} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

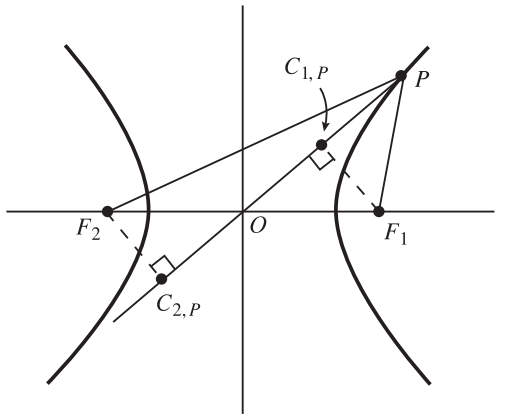
Observación. La hipérbola es simétrica respecto a su centro : si $'$ es el simétrico de (en la figura 11.8) respecto al centro , los triángulos $_1\ \ _2$ y $_2\ '\ _1$ son congruentes.

El cociente b/a tiene un significado geométrico que está relacionado con las *a íntota* de la hipérbola. Recordamos que se denominan *a íntota* de la hipérbola (en general de una curva plana) a las rectas que se acercan a la hipérbola (curva) en el infinito. Demostraremos que:

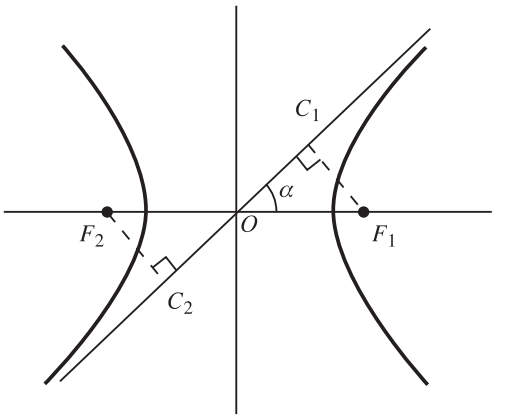
la re ta e a an or el entro e la i rbola y tienen (a, b) *o* $(a, -b)$ *omo ve tor ire tor on a íntota e la i rbola.*

Sea el centro de la hipérbola. Veamos cuál es la posición límite de las rectas $\overline{\ \ }$ de la figura 11.9.a) donde es un punto que se aleja infinitamente del centro moviéndose sobre la hipérbola. Sean $_1$, $_2$ los puntos sobre la recta límite que se muestran en la figura 11.9.b) y que son la posición límite de los puntos $_{1,}$, $_{2,}$ de la figura 11.9.a). Probaremos que

$$\| \overline{\ _1\ _2} \| = 2a.$$



i ra 11.9.a



i ra 11.9.

Se tiene que

$$\| \overline{\quad_{1,\quad 2,}} \| = \left| \| \overline{\quad_{2,\quad}} \| - \| \overline{\quad_{1,\quad}} \| \right| = \left| \sqrt{\| \overline{\quad_{2}} \|^2 - \| \overline{\quad_{2\ 2,}} \|^2} - \sqrt{\| \overline{\quad_{1}} \|^2 - \| \overline{\quad_{1\ 1,}} \|^2} \right|.$$

Observar que $\| \overline{\quad_{2\ 2,}} \| = \| \overline{\quad_{1\ 1,}} \|$ por igualdad de triángulos. Escribimos $\quad = \| \overline{\quad_{2}} \|$, $y = \| \overline{\quad_{1}} \|$ y $a = \| \overline{\quad_{2\ 2,}} \| = \| \overline{\quad_{1\ 1,}} \|$ para simplificar la notación. Observar que $\lim_{\to\infty} a = \| \overline{\quad_{2\ 2}} \| = \| \overline{\quad_{1\ 1}} \| < \infty$. Como $\quad$ es un punto de la hipérbola se tiene $| \quad - y \ | = 2a$. Supongamos que $\quad - y \ = 2a$ (el caso $\quad - y \ = -2a$ se haría de manera análoga). Entonces

$$\lim_{\to\infty} \frac{}{\quad + y} = \lim_{\to\infty} \frac{}{2 \quad - 2a} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\to\infty} \frac{y}{\quad + y} = \lim_{\to\infty} \frac{y}{2a + 2y} = \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Por tanto

$$\frac{\| \overline{\quad_{1\ 2}} \|}{2a} = \lim_{\to\infty} \frac{\| \overline{\quad_{1,\quad 2,}} \|}{\quad - y} = \lim_{\to\infty} \frac{\sqrt{\quad^2 - a^2} - \sqrt{y^2 - a^2}}{\quad - y} = \lim_{\to\infty} \frac{\quad + y}{\sqrt{\quad^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Dividiendo ambos miembros entre $\quad + y$, usando (3.2) y observando que $\lim_{\to\infty} \frac{a^2}{(\quad + y)^2} = 0$ se deduce

$$\frac{\| \overline{\quad_{1\ 2}} \|}{2a} = \frac{1}{\sqrt{1/4} + \sqrt{1/4}} = 1.$$

Por tanto, $\| \overrightarrow{\quad_{1}} \| = a$ (ver figura 11.9.b)). En el triángulo $\quad_{1\ 1}$ se tiene $\cos \alpha = \frac{a}{\quad} = \frac{1}{\varepsilon}$ y, por tanto,

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \pm \frac{b}{a}.$$

11.4. NUEVA DEFINICIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS: LA ELIPSE, LA HIPÉRBOLA Y LA PARÁBOLA

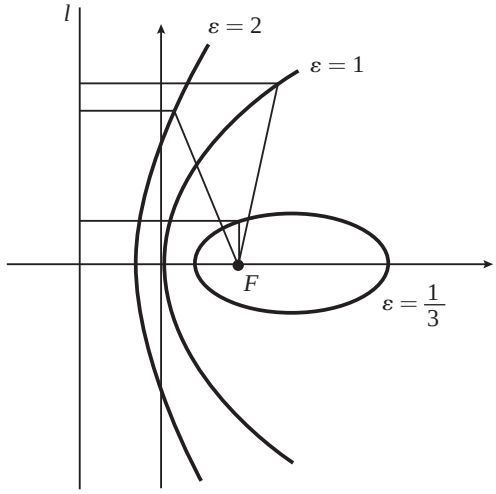
Proposición 11.4.1

Dada una cónica no degenerada existe siempre un punto , llamado *o o*, una recta *l*, llamada *ire tri* (ambos en el plano de la cónica) y un número $\varepsilon > 0$, llamado *e entri i a* , tal que todo punto de la cónica satisface

$$\| \overrightarrow{\quad} \| = \varepsilon \, (\quad , l).$$

Si $\varepsilon < 1$ se tiene una *eli e*, si $\varepsilon > 1$ se tiene una *i rbola* y si $\varepsilon = 1$ se tiene una *a r bola*.

En la figura 11.10 se representan cónicas con el mismo foco y la misma directriz *l*, pero variando la excentricidad.



i ra 11.10

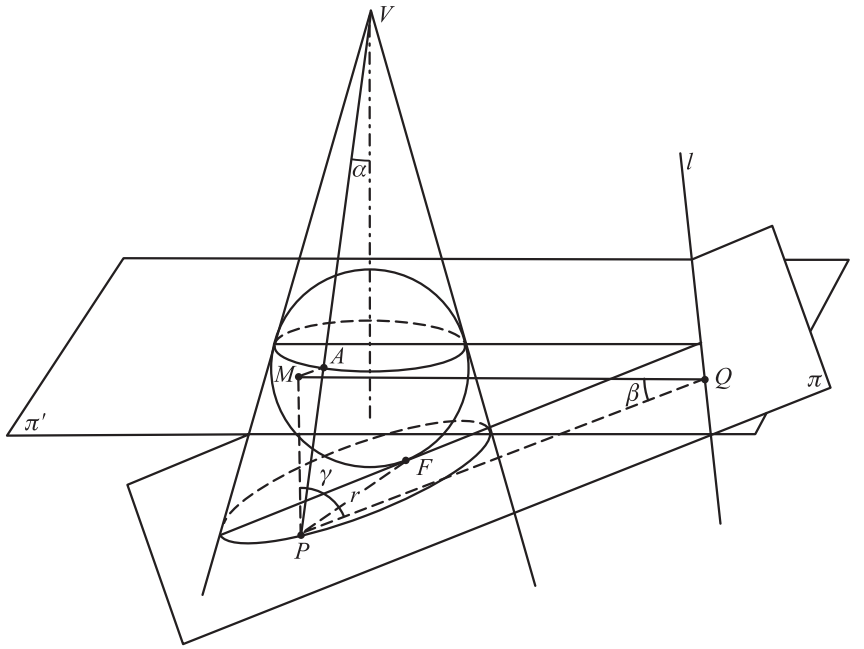
De acuerdo con la Proposición 11.4.1 podemos decir que una *ni a e o o* , *ire tri l y e entri i a* $\varepsilon > 0$ es el conjunto de todos los puntos de un plano que verifican

$$\| \overrightarrow{\quad} \| = \varepsilon \, (\quad , l).$$

Demostración. Sea π el plano que contiene a la cónica. Considerar la esfera inscrita en el cono y tangente al plano π como en la figura 11.11. Sea el punto de tangencia de la esfera y el plano π y sea π' el plano que contiene a la circunferencia de tangencia de la esfera y del cono. Sea *l* la recta intersección de los planos π y π'. Con la notación de la figura 11.11 se tiene que

$$\| \overline{\quad} \| = \| \overline{\quad} \|$$

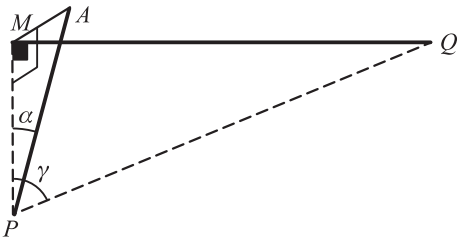
debido a la Proposición 11.2.3.



i ra 11.11

Sea ∈ l tal que (, l) = (,) = ‖ ‖. Se tiene

$$\frac{\|\overline{\quad}\|}{\|\overline{\quad}\|} = \frac{\|\overline{\quad}\|}{\|\overline{\quad}\|} = \frac{\|\overline{\quad}\|/\cos\alpha}{\|\overline{\quad}\|/\cos\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$



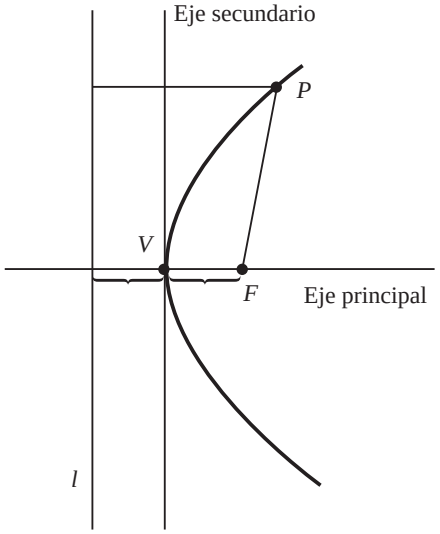
i ra 11.12

Con $\varepsilon = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ se tiene ‖ ‖ = ε ‖ ‖ = ε (, l).

En el caso de la elipse, $\gamma > \alpha$ y, por tanto, $\cos\gamma < \cos\alpha$; se tiene, pues, que $\varepsilon < 1$. Si $\gamma = \alpha$, $\varepsilon = 1$ y se tiene una parábola. Si $\gamma < \alpha$, $\varepsilon = (\cos\gamma)/(\cos\alpha) > 1$ y se tiene una hipérbola. Observar que γ y α son constantes. ■

* * *

Los elementos principales de elipses e hipérbolas se han descrito en la sección 11.3 (ver figuras 11.6 y 11.8). Para las parábolas tenemos los siguientes (ver figura 11.13): además del *o o* y la *ire tri l*, el *e e rin i al* es una recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco, *el v rti e*, , es la intersección del eje principal con la parábola y el *e e e n ario* es



V = Vértice F = Foco l = Directriz

i ra 11.13

perpendicular al eje principal pasando por el vértice . Observar que 2 (,) = (, l), ya que por ser un punto de la parábola se tiene (,) = (, l).

Observación. La parábola es simétrica respecto a su eje principal: si es un punto de la parábola, su simétrico ′, respecto al eje principal es también un punto de la parábola ya que ‖ ‖ = ‖ ′‖ y el segmento ′ es paralelo a la directriz.

* * *

La siguiente proposición nos proporciona la situación geométrica de las directrices de elipses e hipérbolas con respecto a sus ejes.

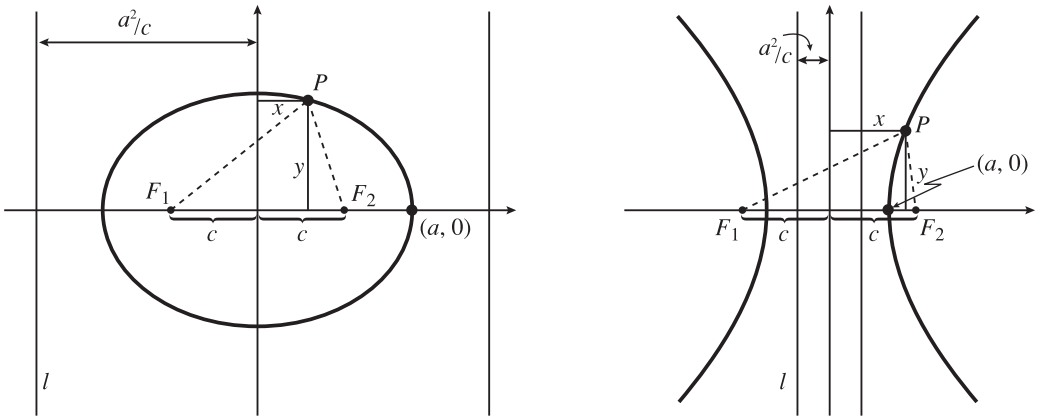
Proposición 11.4.2

Las directrices de una elipse o una hipérbola son las rectas paralelas al eje secundario a distancia $\frac{a^2}{}$ (ver figura 11.14).

Demostración. Tomamos como definición de elipse y de hipérbola la que se obtiene de las Proposiciones 11.3.1 y 11.3.3 respectivamente. Sea l una de las rectas paralelas al eje secundario a distancia $a^2/$ (ver figura 11.14). Haremos el razonamiento para la elipse con l la recta que queda a la izquierda del eje secundario (el resto de los casos tienen una demostración similar). Vamos a demostrar que para cualquier punto de la elipse se tiene $\| \overline{\ _1} \| = \frac{}{a}$ (, l).

Sea la distancia con signo de al eje secundario e y la distancia de al eje principal de la elipse. El signo de es positivo si está a la derecha del eje secundario y negativo si está a la izquierda. Con la notación de la figura 11.14.a) se tiene

$$\| \overline{\ _1} \|^2 = (\ + \ )^2 + y^2 \quad , \quad \| \overline{\ _2} \|^2 = (\ - \ )^2 + y^2.$$



a) Elipse b) Hipérbola

i ra 11.14

Por tanto

$$\| \overline{\ _1} \|^2 - \| \overline{\ _2} \|^2 = 4 \quad .$$

Como

$$\| \overline{\ _1} \|^2 - \| \overline{\ _2} \|^2 = (\| \overline{\ _1} \| + \| \overline{\ _2} \|)(\| \overline{\ _1} \| - \| \overline{\ _2} \|) = 2a(\| \overline{\ _1} \| - \| \overline{\ _2} \|),$$

tenemos que

$$\| \overline{\ _1} \| - \| \overline{\ _2} \| = 2 \frac{}{a} \quad .$$

Combinando esta igualdad con $\| \overline{\ _1} \| + \| \overline{\ _2} \| = a$. Obtenemos

$$\| \overline{\ _1} \| = a + \frac{}{a} \qquad , \qquad \| \overline{\ _2} \| = a - \frac{}{a} \quad . \tag{4.1}$$

Por tanto,

$$(\ , l) = \frac{a^2}{} + \quad = \frac{a^2}{} + \frac{a}{} (\| \overline{\ _1} \| - a) = \frac{a}{} \| \overline{\ _1} \|,$$

lo que prueba el resultado deseado. ■

Nota. En la sección 11.3 hemos llamado excentricidad de una elipse y de una hipérbola a $\varepsilon = \ /a$. La demostración anterior prueba que el cociente constante $\| \overline{\ _1} \| / (\ , l)$ que aparece en la Proposición 11.4.1 es $/a$, lo que justifica el nombre de excentricidad usado en esta Proposición.

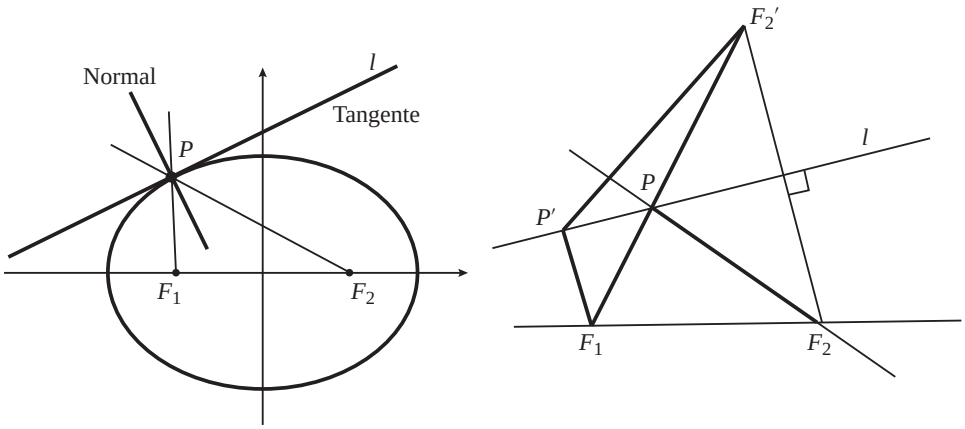
* * *

Damos a continuación algunas propiedades más de las elipses, las hipérbolas y las parábolas.

Proposición 11.4.3

La tangente y la normal a una elipse en un punto de ella misma son las bisectrices de las rectas que unen el punto con los focos.

Demostración. Dados los focos $_1$, $_2$ y un punto de una elipse, sea l una bisectriz de las rectas $_1$ y $_2$, como indica la figura 11.15. Sea $'_2$ el simétrico de $_2$ con respecto a la recta l.



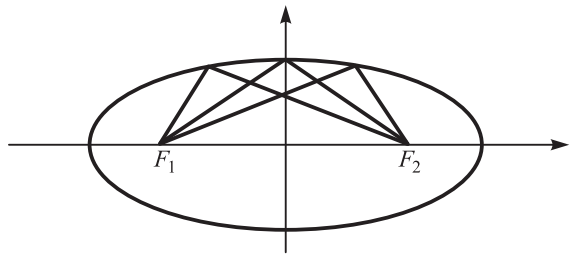
i ra 11.15

Basta demostrar que cualquier otro punto $'$ de l está en el exterior de la elipse, puesto que entonces la recta l solo toca a la elipse en el punto y es la tangente. De la figura 11.15 deducimos que

$$\| \overline{_1} \| + \| \overline{\quad _2} \| = \| \overline{_1} \| + \| \overline{\quad '_2} \| = \| \overline{_1 \ '_2} \| < \| \overline{_1 \ '} \| + \| \overline{\ ' \ '_2} \|,$$

en donde la última desigualdad es debida a la desigualdad triangular. Entonces $\| \overline{_1 \ '} \| + \| \overline{\ ' \ _2} \| > 2a$ y $'$ está siempre fuera de la elipse, que era lo que queríamos demostrar. La otra bisectriz es precisamente la normal a la elipse en el punto . ■

La Proposición 11.4.3 expresa una propiedad de las elipses que puede considerarse como «el secreto del salón ovalado» (ver *ento on enta* , M. de Guzmán, Editorial Nivola, 2008). En un salón en forma de elipse, el sonido emitido por una persona colocada en uno de sus focos $_1$ se refleja en sus paredes pasando siempre por el otro foco $_2$, de manera que un sonido en $_1$ puede ser perfectamente audible en $_2$ e irreconocible en cualquier otra parte del salón.



i ra 11.16

Para la hipérbola se tiene una proposición semejante a la 11.4.3, que se deja como ejercicio.

Proposición 11.4.4

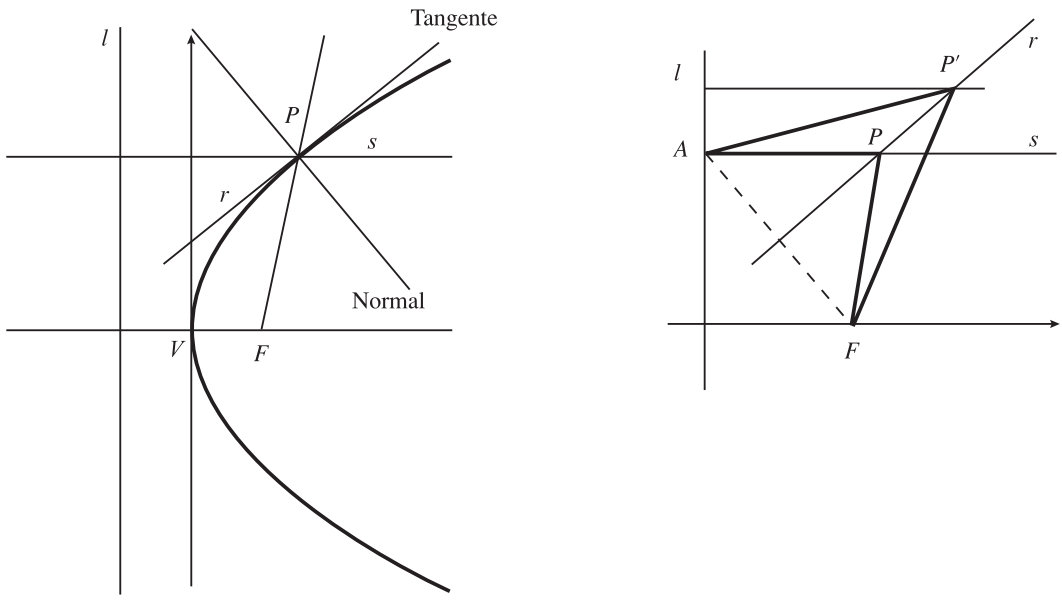
La tangente y la normal a una hipérbola en un punto de ella misma son las bisectrices de las rectas que unen con cada uno de los focos.

Para la tangente y la normal a una parábola se tiene la siguiente proposición.

Proposición 11.4.5

La tangente y la normal a una parábola en un punto son las bisectrices de la normal a la directriz por y la recta que une con el foco .

Demostración. Sea l la directriz de la parábola. Sea la recta paralela al eje de la parábola que pasa por (ver figura 11.17).



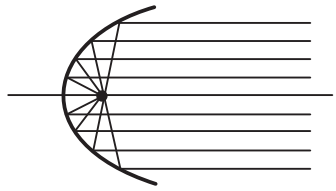
i ra 11.17

Si r es una bisectriz de las rectas y , y ′ es cualquier otro punto de r, de la figura 11.17 se deduce

$$\| \overline{\quad ' \quad} \| = \| \overline{\quad ' \quad} \| > \quad (\quad ', l),$$

donde es el simétrico de respecto de r. Por tanto, ′ está en el exterior de la parábola. ■

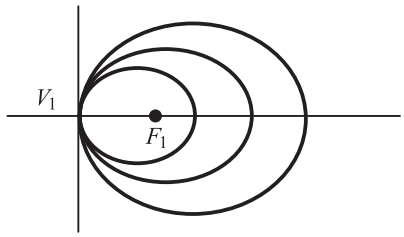
La Proposición 11.4.5 expresa la propiedad de los espejos parabólicos de que todo rayo de luz procedente del infinito se refleja en su superficie interior pasando por el foco (ver figura 11.18). Recíprocamente, cualquier punto de luz situado en el foco de un espejo parabólico (de revolución) produce un haz de rayos paralelos. Los faros de los coches tienen una forma que se aproxima a la de los espejos parabólicos.



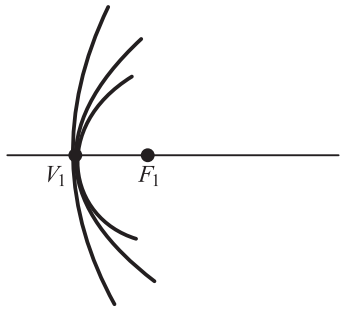
i ra 11.18

EJERCICIOS (Secciones 11.2, 11.3 y 11.4)

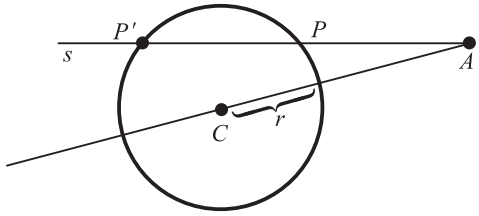
1. La figura muestra lo que ocurre si fijamos un vértice $_1$, un foco $_1$ de una elipse y variamos ε (excentricidad). Hallar, en función de $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$, la posición del centro, del otro vértice y la longitud del semieje b.



2. La misma pregunta que en el problema anterior para una familia de hipérbolas, $1 < \varepsilon < \infty$, calculando la posición de las asíntotas.



3. Dada una circunferencia de centro y radio r y un punto exterior a ella, se considera cualquier recta que pase por y corte a la circunferencia como en la figura adjunta. Demostrar que $\|\overrightarrow{\ }\|\,\|\overrightarrow{\ }'\| = \|\overrightarrow{\ }\|^2 - r^2$.



ota. $\|\overrightarrow{\ }\|\,\|\overrightarrow{\ }'\|$ se denomina *oten ia* del punto respecto de la circunferencia dada. El ejercicio 3 demuestra que $\|\overrightarrow{\ }\|\,\|\overrightarrow{\ }'\|$ no depende de la recta .

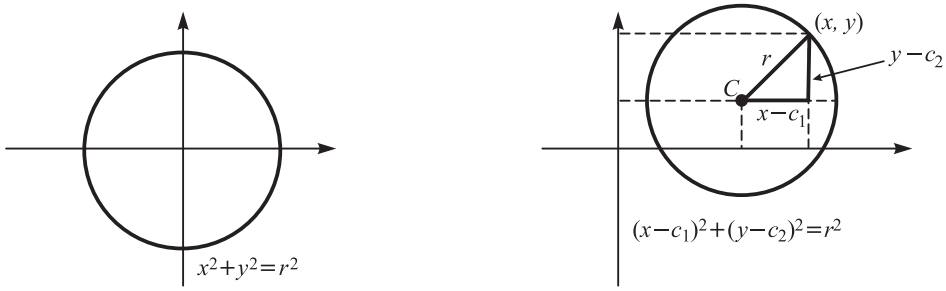
11.5. ECUACIONES DE LAS CÓNICAS

Es conocido que la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio r es

$$^2 + y^2 = r^2, \tag{5.1}$$

mientras que si su centro está en el punto $= (\ _1,\ _2)$ su ecuación es

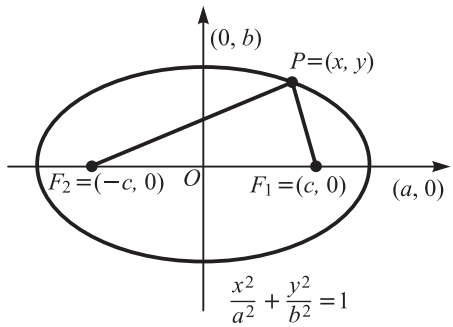
$$(\ - \ _1)^2 + (y - \ _2)^2 = r^2.$$



i ra 11.19

Tratemos de hallar ahora la ecuación de una elipse de semieje principal (o mayor) a y con focos situados en los puntos $(\ , 0)$ y $(-\ , 0)$ con $a >\ $. Utilizando el Lema 11.3.2 tenemos

$$2a = \|\overrightarrow{\ _1}\| + \|\overrightarrow{\ _2}\| = \sqrt{(\ - \ )^2 + y^2} + \sqrt{(\ + \ )^2 + y^2}.$$



i ra 11.20

Poniendo la primera de las raíces en el primer término y elevando al cuadrado se tiene

$$4a^2 + \ ^2 + 2 \quad + \ ^2 + y^2 - 4a\sqrt{(\ + \ )^2 + y^2} = \ ^2 - 2 \quad + \ ^2 + y^2,$$

que una vez simplificado nos permite obtener

$$a^2 + \quad = a\sqrt{(\ + \ )^2 + y^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado se obtiene

$$a^4 + 2 \quad a^2 + \ ^2\ ^2 = a^2\ ^2 + 2a^2 \quad + a^2\ ^2 + a^2y^2.$$

Teniendo en cuenta que $b^2 = a^2 - {}^2$ obtenemos

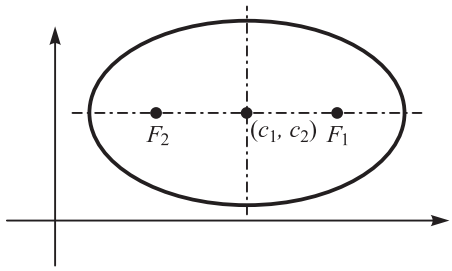
$$a^2b^2 = b^2\ {}^2 + a^2y^2,$$

que puede escribirse de la forma

$$\frac{{}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.2}$$

Si la elipse tiene su centro en el punto $({}_1, {}_2)$ y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados su ecuación es

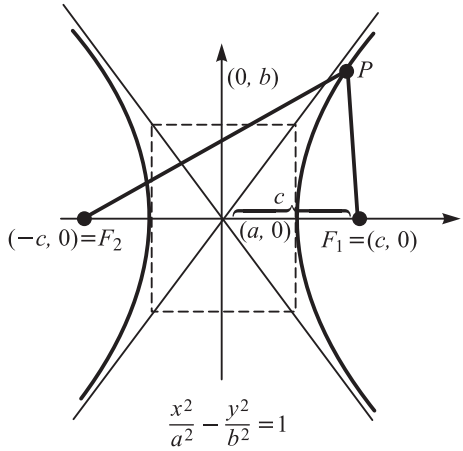
$$\frac{(- {}_1)^2}{a^2} + \frac{(y - {}_2)^2}{b^2} = 1.$$



i ra 11.21

Para hallar la ecuación de una hipérbola de semieje mayor a y focos en los puntos $(- , 0)$ y $(, 0)$ se procede como en el caso anterior, mediante la utilización de la Proposición 11.3.3 y la fórmula (3.1). Se tiene:

$$\pm 2a = \| \overline{\ \ _2} \| - \| \overline{\ \ _1} \| = \sqrt{(+)^2 + y^2} - \sqrt{(-)^2 + y^2}.$$



i ra 11.22

Por tanto,

$$4a^2 \pm 4a\sqrt{(+)^2 + y^2} + (+)^2 + y^2 = (-)^2 + y^2,$$

que simplificando nos permite obtener

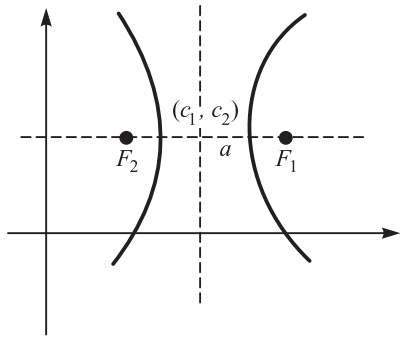
$$a^2 + \quad = \mp a\sqrt{(+)^2 + y^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado y teniendo en cuenta que $b^2 = {}^2 - a^2$ se obtiene

$$\frac{{}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.3}$$

Si la hipérbola tiene su centro en el punto $({}_1, {}_2)$ y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados su ecuación es

$$\frac{(- {}_1)^2}{a^2} - \frac{(y - {}_2)^2}{b^2} = 1.$$



i ra 11.23

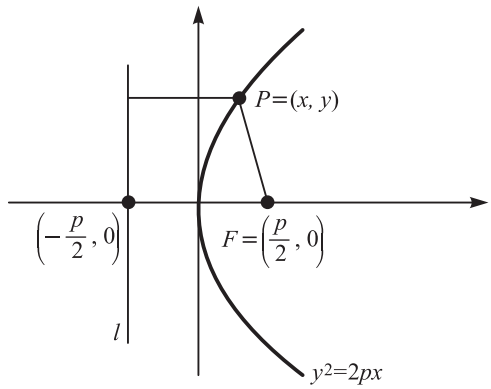
* * *

Observación. Si la elipse tiene los focos en el eje , su ecuación es $\frac{y^2}{a^2} + \frac{{}^2}{b^2} = 1$ con $a > b$, y si se trata de una hipérbola su ecuación es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{{}^2}{b^2} = 1$.

* * *

La ecuación de una parábola de directriz $= -\frac{}{2}$ y foco en el punto $\left(\frac{}{2}, 0\right)$ es, según la Proposición 11.4.1,

$$\|\overrightarrow{\quad}\| = \sqrt{\left(- \frac{}{2}\right)^2 + y^2} = (, l) = + \frac{}{2}.$$

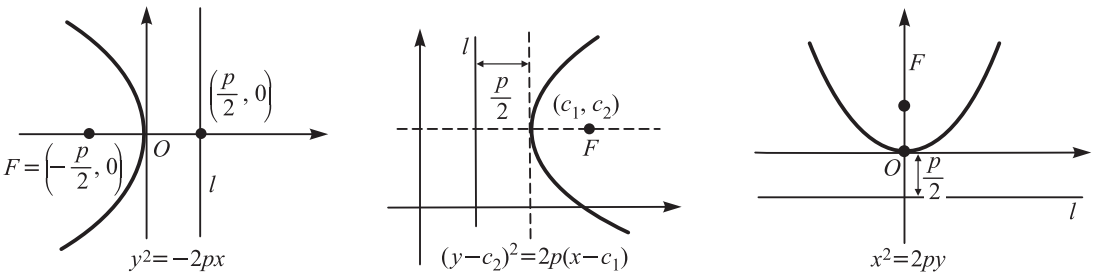


i ra 11.24

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$y^2 = 2 \quad . \tag{5.4}$$

Algunos casos más, con sus ecuaciones, se dan en las figuras siguientes.



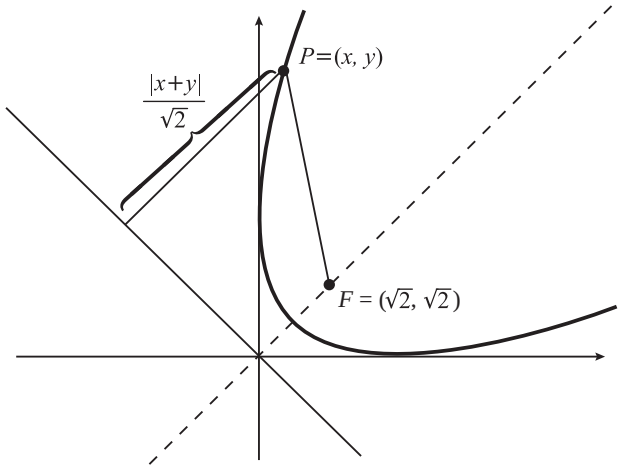
i ra 11.25

Las ecuaciones (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) reciben el nombre de *orma an ni a* de la cónica correspondiente y es conveniente observar que cuando la ecuación de una cónica está en forma canónica el eje principal coincide con el eje .

Casos más complicados se presentan cuando los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes coordenados; para familiarizar al lector con las ecuaciones de tales objetos damos algunos ejemplos, advirtiéndole que conviene intentar su realización antes de mirar la solución.

EJEMPLO A. *n ontrar la e a i n e la ar bola e o o* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *y ire tri* $y = -$. Si $= (, y)$ es un punto de la parábola se ha de tener

$$\| \overrightarrow{\quad} \| = \sqrt{(\ - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2} = \ (\ , y = - \ ) = \frac{| \ + y|}{\sqrt{2}}.$$



i ra 11.26

Elevando al cuadrado se obtiene

$$^2 - 2\sqrt{2} + 2 + y^2 - 2y\sqrt{2} + 2 = (\ ^2 + 2 \ y + y^2)/2,$$

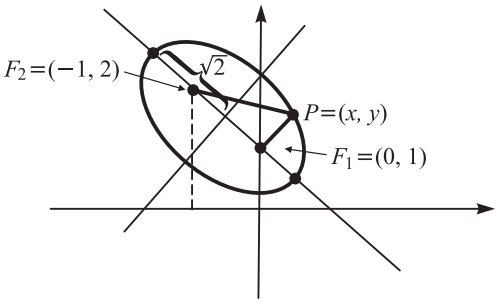
o bien

$$^2 + y^2 - 2\ y - 4\sqrt{2}\ \ - 4\sqrt{2}y + 8 = 0.$$

* * *

EJEMPLO B. *n ontrar la e a i n e la eli e e o o* $(0, 1)$ *y* $(-1, 2)$ *y emie e mayor* $a = \sqrt{2}$. Si $= (\ , y)$ es un punto de la elipse se tiene

$$2\sqrt{2} = \sqrt{(\ + 1)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(\ - 0)^2 + (y - 1)^2}.$$



i ra 11.27

Elevando al cuadrado y simplificando adecuadamente se obtiene

$$8 + 2\ \ - 4y + 1 + 4 - 4\sqrt{2}\sqrt{(\ + 1)^2 + (y - 2)^2} = -2y + 1$$

o bien

$$- y + 6 = 2\sqrt{2}\sqrt{(\ + 1)^2 + (y - 2)^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado se obtiene

$$^2 + y^2 + 36 - 2\ y + 12\ \ - 12y = 8(\ ^2 + 2\ \ + 1 + y^2 - 4y + 4),$$

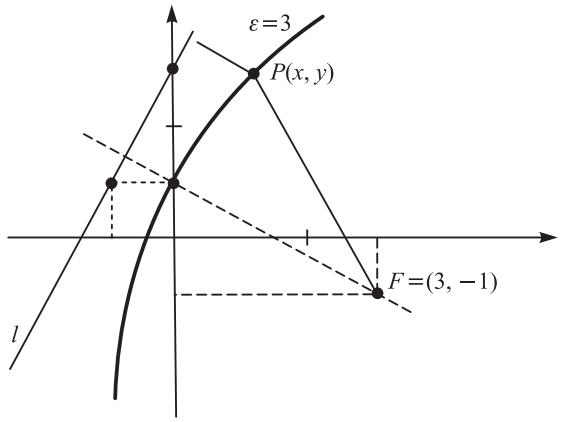
que es equivalente a

$$7\ ^2 + 7y^2 + 2\ y + 4\ \ - 20y - 4 = 0.$$

* * *

EJEMPLO C. *n ontrar la e a i n e la i rbola e ire tri* $2\ \ - y + 3 = 0$, *o o en el nto* $(3, -1)$ *y e entri i a* $\varepsilon = 3$.

$$\sqrt{(\ - 3)^2 + (y + 1)^2} = \|\overrightarrow{\ \ }\| = 3\ (\ , l) = 3\,\frac{|2\ \ - y + 3|}{\sqrt{5}}.$$



i ra 11.28

es la ecuación pedida. Elevando al cuadrado obtenemos

$$^2 - 6 \ + 9 + y^2 + 2y + 1 = \frac{9}{5}(4\ ^2 + y^2 + 9 - 4\ y + 12 \ - 6y),$$

luego

$$31\ ^2 + 4y^2 - 36\ y + 138 \ - 64y + 31 = 0.$$

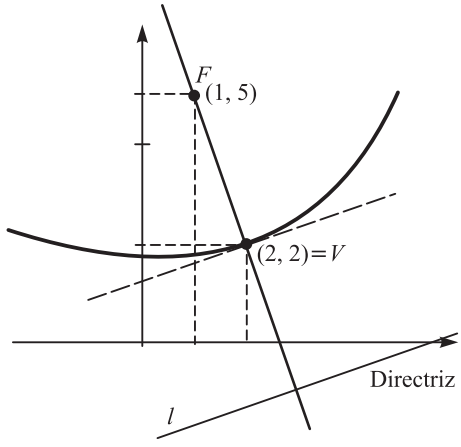
* * *

EJEMPLO D. *n ontrar la e a i n e la ar bola e o o* (1, 5) *y v rti e* (2, 2). La *ire tri* es una recta perpendicular al eje de la parábola (este eje pasa por el foco y el vértice) y cuya distancia del vértice coincide con la distancia del vértice al foco. El eje de la parábola tiene por ecuación

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{1 - 2}(\ - 2),$$

o bien

$$3 \ + y - 8 = 0.$$



i ra 11.29

Una recta perpendicular a esta tendrá por ecuación

$$l: \quad -3y = \quad ;$$

determinamos imponiendo que

$$(\ , l) = \| \overline{\quad} \| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

por tanto:

$$\sqrt{10} = \frac{|2 - 3 \cdot 2 - \ |}{\sqrt{10}} \quad ; \quad 10 = |-4 - \ | \quad ; \quad = -14, \quad = 6.$$

Las posibles directrices son $-3y = -14$, $-3y = 6$; la primera de estas rectas pasa por el punto (1, 5) y, por tanto, no puede ser la directriz; concluimos que $-3y = 6$ es la directriz de la parábola. La ecuación de la parábola es, por tanto,

$$\| \overline{\quad} \| = \sqrt{(\ - 1)^2 + (y - 5)^2} = \ (\ , l) = \frac{| \ - 3y - 6|}{\sqrt{10}}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$10(\ ^2 - 2 \ + 1 + y^2 - 10y + 25) = \ ^2 + 9y^2 + 36 - 6 \ y - 12 \ + 36y,$$

o bien

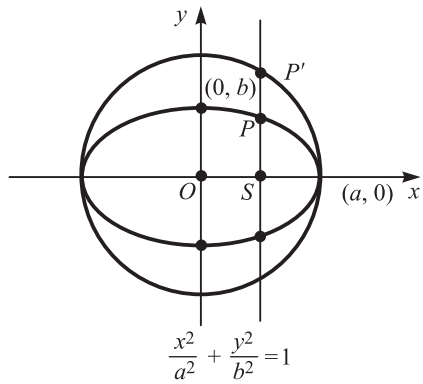
$$9 \ ^2 + y^2 + 6 \ y - 8 \ - 136y + 224 = 0.$$

* * *

Observar que cuando el eje de la sección cónica está girado con respecto a los ejes coordenados, en la ecuación de la cónica siempre aparece un término de la forma y. Este término no aparece si los ejes de la cónica son paralelos a los ejes coordenados.

EJERCICIOS 11.5

1. Considerar la elipse y la circunferencia que se indican en la figura adjunta. Si por cualquier punto del eje se traza una paralela al eje que corta a la elipse en el punto y a la circunferencia en $'$, demostrar que $\dfrac{\| \overline{\quad}' \|}{\| \overline{\quad} \|} = \dfrac{a}{b}$.



2. Escribir las ecuaciones de las parábolas de foco $(2, -1)$, que pasan por $(2, 2)$ y tienen el eje en la dirección del eje .

3. Escribir la ecuación de la hipérbola con un foco en $(2, -1)$ y asíntotas $= 0, 3 - 4y = 0$.

4. Escribir la ecuación de la elipse con vértices $(-1, 2)$ y $(-7, 2)$, y eje secundario $2b = 2$.

5. Escribir la ecuación de la hipérbola con asíntotas $y = \pm 2 - 1$ y un foco en $(3, -1)$.

6. Escribir la ecuación de la elipse con un vértice en $(-1, 1)$, centro en $(3, -1)$ y excentricidad 1/2.

11.6. DETERMINACIÓN DE LAS CÓNICAS

Hemos visto en los ejemplos de la sección precedente que las ecuaciones de las cónicas que allí se obtuvieron vienen dadas mediante polinomios de segundo grado en dos variables. Esto es cierto para cualquier cónica y para demostrarlo utilizaremos el hecho de que toda cónica no degenerada es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen $\| \overrightarrow{\quad} \| = \varepsilon (, l)$, donde es el foco y l la directriz (ver sección 11.4). Sea $= (_1, _2)$ y l: $a + by + = 0$. La igualdad $\| \overrightarrow{\quad} \| = \varepsilon (, l)$ se transforma en

$$\sqrt{(- _1)^2 + (y - _2)^2} = \varepsilon \frac{|a + by + |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

donde $= (, y)$. Elevando al cuadrado y multiplicando por $a^2 + b^2$ se obtiene

$$(a^2 + b^2)(- _1)^2 + (a^2 + b^2)(y - _2)^2 = \varepsilon^2(a + by +)^2.$$

Después de efectuar las operaciones indicadas en la fórmula anterior y de agrupar los términos adecuadamente se obtiene:

$$^2 + y^2 + y + + y + = 0, \tag{6.1}$$

donde

$$= a^2 + b^2 - \varepsilon^2 a^2, \quad = a^2 + b^2 - \varepsilon^2 b^2, \quad = -2\varepsilon^2 ab$$
$$= -2 _1(a^2 + b^2) - 2\varepsilon^2 a , \quad = -2 _2(a^2 + b^2) - 2\varepsilon^2 b$$
$$= (a^2 + b^2)(_1^2 + _2^2) - \varepsilon^2 ^2.$$

La expresión (6.1) será denominada *e a i n general e na ni a* y por tanto toda cónica tiene una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables.

Para determinar una circunferencia es necesario conocer tres puntos de ella. Para determinar una cónica es necesario conocer más de tres puntos puesto que la ecuación (6.1) posee seis incógnitas , , , , y . Dividiendo entre una de ellas (no todas pueden ser nulas) se obtiene una ecuación con cinco coeficientes. Por ejemplo, si $\neq 0$ se tiene

$$^2 + ' y^2 + ' y + ' + ' y + ' = 0.$$

En efecto, cinco es el número de puntos que se necesitan para determinar una cónica no degenerada. El primer matemático que probó este resultado fue Blaise Pascal. En 1639, a sus dieciséis años, B. Pascal (1623-1662) logró demostrar el siguiente teorema:

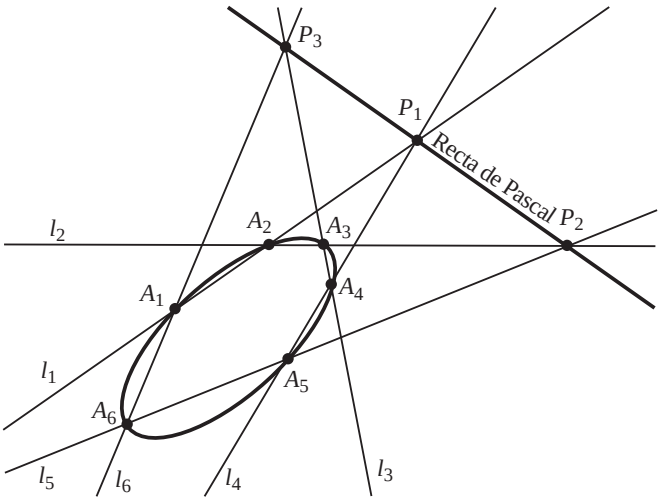
Teorema 11.6.1 (Teorema de Pascal)

Sean , $1 \leqslant \leqslant 6$, seis puntos distintos de una cónica arbitraria (una elipse en la figura 11.30 y una hipérbola en la figura 11.31). Considerar las rectas l que pasan por los puntos , $_{+1}$, $1 \leqslant \leqslant 5$ y l_6 la recta que pasa por $_6$, $_1$. Sean , $= 1, 2, 3$, los puntos de intersección de las rectas l , l_{+3}. Entonces, los puntos $_1$, $_2$ y $_3$ están situados sobre la misma recta.

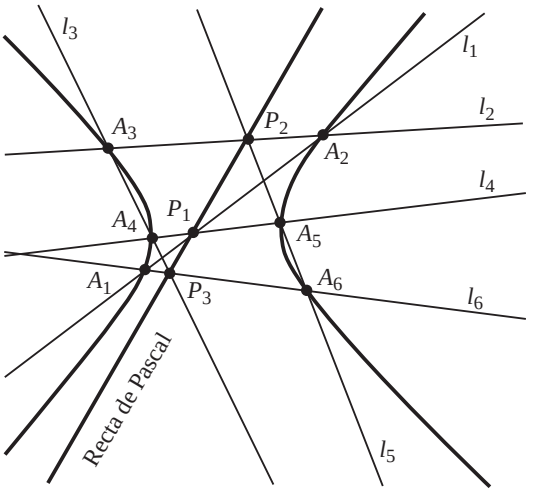
Notas. 1. La recta que contiene a los puntos $_1$, $_2$ y $_3$ del Teorema 11.6.1 se llama *re ta e a al* de los puntos dados.

2. Si alguna de las parejas de rectas l , l_{+3}, $= 1, 2, 3$, son paralelas se considera que se cortan en el infinito.

3. Dados seis puntos distintos y ordenados en el plano, diremos que forman un «hexágono». Entonces el teorema de Pascal (Teorema 11.6.1) dice que «todo hexágono inscrito en una cónica tiene una recta de Pascal asociada».



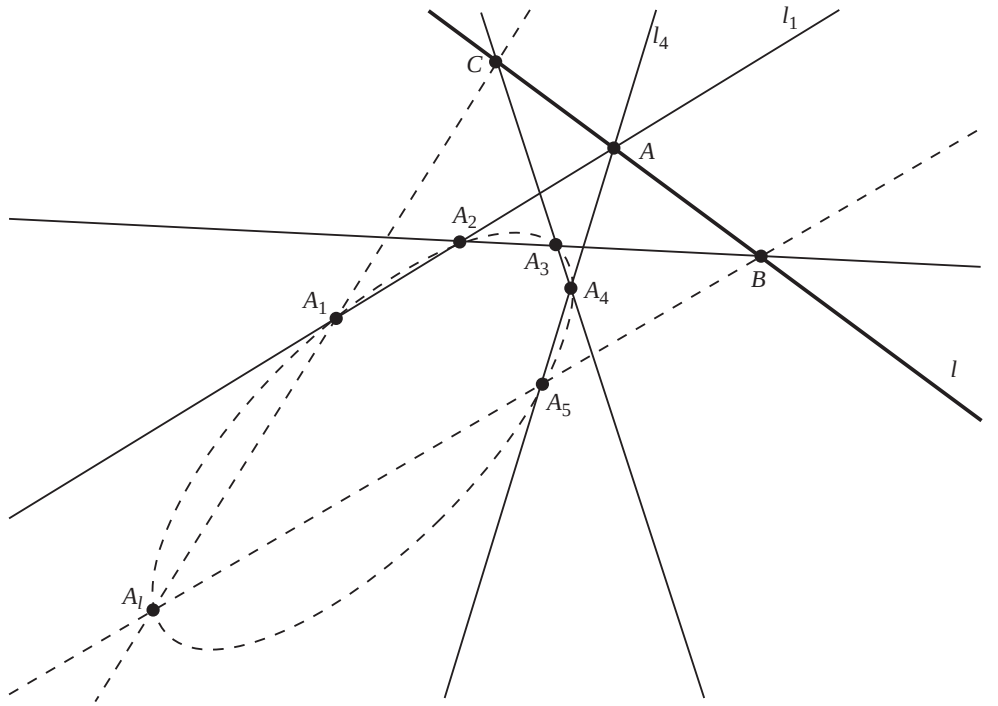
i ra 11.30



i ra 11.31

El teorema de Pascal puede utilizarse para demostrar que cinco puntos son suficientes para determinar una cónica. En efecto, supongamos que conocemos cinco puntos de una cónica $_1$, $_2$, $_3$, $_4$ *y* $_5$. Sean l_1 la recta que pasa por $_1$ $_2$ y l_4 la recta que pasa por $_4$, $_5$. Sea el punto de intersección de l_1 y l_4. Se observa que, por el Teorema 11.6.1, es un punto de todas las rectas de Pascal de los hexágonos inscritos en la cónica con $_1$, $_2$, $_4$, $_5$ cuatro de sus vértices. Para cada recta l que pasa por sean y los puntos de corte de las rectas $_2$ $_3$ y $_3$ $_4$ con la recta l, respectivamente. Sea $_l$ el punto de intersección de las rectas $_5$ y $_1$.

El hexágono $_1$, $_2$, $_3$, $_4$, $_5$, $_l$ tiene por recta de Pascal a l, luego $_l$ es un punto de la cónica. Por tanto, variando l se obtienen todos los puntos de la cónica.



i ra 11.32

No se conserva la demostración de B. Pascal del Teorema 11.6.1. Se sabe que la hizo porque se conserva un escrito de G. W. Leibniz alabando la demostración de B. Pascal del teorema del «hexágono». Una demostración del Teorema 11.6.1 para una circunferencia puede verse en el libro *Geometry revi ite* (H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, MAA, 1967) en donde se usa el teorema de Menelao y pudiera ser similar a la que diseñó B. Pascal.

La forma actual de demostrar el teorema de Pascal usa geometría proyectiva. Esto reduce el caso general del Teorema 11.6.1 a un caso tan especial que resulta trivial. También puede demostrarse el teorema de Pascal utilizando el «principio de dualidad» que puede enunciarse en este contexto diciendo que si se intercambian «puntos» por «rectas», «cortar dos rectas» por «unir dos puntos» y «puntos de la cónica» por «tangentes a la cónica» todo teorema cierto se convierte en otro teorema cierto. Con la ayuda de este principio, Ch. J. Brianchon (1785-1864) demostró en 1806 el teorema de Pascal. La demostración de Brianchon se encuentra elegantemente expuesta en el libro *irar y ver*, de M. de Guzmán (Editorial Nivola, 2004).

Otra demostración del teorema de Pascal puede verse en *nvitation to geometry* (Z. A. Melzak, John Wiley & Sons, 1983), en donde se combina la geometría y el álgebra para conseguir el resultado.

11.7. DETERMINACIÓN DEL TIPO DE UNA CÓNICA

La *e a i n general e na ni a* en una referencia ortonormal, que se obtuvo en (6.1), se escribe de la forma

$$a_{11}\ ^2 + a_{12}\ y + a_{22}y^2 + a_1\ \ + a_2y + a = 0, \tag{7.1}$$

donde los coeficientes son números reales.

Nos preguntamos ahora si toda ecuación de la forma (7.1) representa una cónica y en caso de que la represente de qué tipo de cónica se trata. La observación fundamental se hizo ya en la sección 11.5 y es que las cónicas que tienen sus ejes paralelos a los ejes coordenados no poseen el término y, y que los términos en y en y pueden fácilmente eliminarse mediante traslaciones.

Los términos $a_{11}{}^{2} + a_{12}\, y + a_{22}y^2$ se denominan *arte rin i al e* (7.1) y pueden escribirse de la forma

$$a_{11}{}^{2} + a_{12}\, y + a_{22}y^2 = (\ , y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = (\ , y)\ \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

como puede comprobarse fácilmente.

Para eliminar el término y en (7.2) procedemos de la siguiente manera: la matriz es una matriz (real) simétrica; en el Capítulo 8 se demostró que puede diagonalizarse mediante un cambio de base ortonormal y que sus autovalores son reales. Sea la matriz de cambio de base; puesto que transforma una base ortonormal (la canónica) en otra base ortonormal debe ser una matriz ortogonal; como las únicas matrices ortogonales en $\mathbb{R}^2$ son las de los giros y las simetrías, si imponemos, además, que la nueva base conserve la orientación, debe ser la matriz de un giro.

Si $(\ _1, y_1)$ son las nuevas coordenadas se tiene

$$\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1} \\ y_1 \end{pmatrix}$$

y puesto que $^{t} = {}^{-1}$ (ya que es ortogonal) (7.2) puede escribirse de la forma

$$(\ , y)\ \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = (\ _1, y_1)\ {}^{-1}\ \begin{pmatrix} {}^{1} \\ y_1 \end{pmatrix} = (\ _1, y_1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^{1} \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1\ {}^{2}_{1} + \lambda_2 y_1^2$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de . Hemos logrado, pues, eliminar el término y mediante un giro de los ejes coordenados que los sitúa en las direcciones de los ejes de la cónica, dadas por los autovectores de .

La ecuación (7.1) se transforma ahora en

$$\lambda_1\ {}^{2}_{1} + \lambda_2 y_1^2 + b_1\ {}_1 + b_2 y_1 + b = 0. \tag{7.3}$$

Antes de realizar ejemplos pasamos a estudiar los posibles casos que pueden presentarse en (7.3).

$$\delta = |\ \ | = \lambda_1\lambda_2 > 0.$$

En este caso los autovalores λ_1, λ_2 tienen el mismo signo y siempre podemos suponer que son positivos en (7.3) cambiando de signo si es necesario y $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Puesto que (7.3) puede escribirse de la forma

$$\lambda_1\left(\ _1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} + b = 0,$$

la traslación dada por

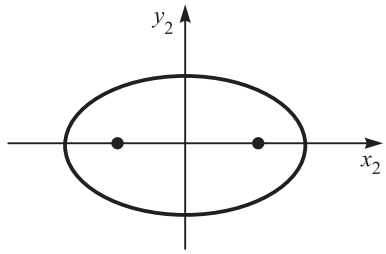
$$\begin{cases} {}_2 = {}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$$

transforma la cónica en

$$\frac{\frac{2}{2}}{1/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{1/\lambda_2} = \ ,$$

donde $= \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} + \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2} - b$. Como en (7.3) podemos suponer que $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, hemos de tener $1/\lambda_1 \geqslant 1/\lambda_2$ y, por tanto, la ecuación anterior es la de una elipse con los focos en el eje ${}_2$ si > 0.

Si $= 0$ se obtiene un punto y si < 0 la ecuación (7.3) no tiene solución en $\mathbb{R}^2$.



i ra 11.33

En este caso la cónica se dice que es de *ti o elí ti o*.

$$\delta = | \ | = \lambda_1\lambda_2 < 0.$$

En este caso λ_1 y λ_2 tienen distinto signo y, por tanto, siempre podemos tomar $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Mediante una traslación como en el caso I, la ecuación (7.3) se transforma en

$$\lambda_1 \ \frac{2}{2} + \lambda_2 y_2^2 = \ .$$

Si $\neq 0$, se tiene una hipérbola no degenerada; si $= 0$, se tiene

$$y_2 = \pm \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}} \ {}_2$$

y la hipérbola degenera en un par de rectas de pendiente $\pm\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}$, que pasan por $({}_2, y_2) = (0, 0)$.

i ra 11.34

En este caso la cónica se dice que es de *ti o i erb li o.*

$$\delta = | \ | = \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

En este caso siempre podemos tomar $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (observad que los dos autovalores no pueden ser nulos a la vez, ya que entonces $= 0$). Por tanto, mediante un giro adecuado, (7.3) se transforma en

$$\lambda_2 y_1^2 + b_1 \ _1 + b_2 y_1 + b = 0. \tag{7.4}$$

Si $b_1 \neq 0$ la ecuación (7.4) puede escribirse de la forma

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + b_1\left(\ _1 + \frac{b}{b_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1}\right) = 0$$

y, por tanto, la traslación

$$\begin{cases} \ _2 = \ _1 + \dfrac{b}{b_1} - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} \\ y_2 = y_1 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$$

nos permite escribir $y_2^2 = -\dfrac{b_1}{\lambda_2} \ _2$, que representa a una parábola no degenerada con el foco en la dirección de $_2$, que es la dada por el autovector correspondiente a $\lambda_1 = 0$.

i ra 11.35

Si $b_1 = 0$, la ecuación (7.4) puede escribirse de la forma

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + b - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} = 0$$

y, por tanto, la traslación

$$\begin{cases} {}_2 = {}_1 \\ y_2 = y_1 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$$

la transforma en $y_2^2 = -\frac{}{\lambda_2}$, donde $= b - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2}$. Si $-\frac{}{\lambda_2} > 0$, $y_2 = \pm\sqrt{-\frac{}{\lambda_2}}$ representa dos rectas paralelas, si $-\frac{}{\lambda_2} = 0$ se obtiene un punto, y si $-\frac{}{\lambda_2} < 0$ se obtiene el conjunto vacío en $\mathbb{R}^2$. Estos casos corresponden a cónicas degeneradas.

i ra 11.36

En este caso la cónica se dice de *ti o arab li o.*

* * *

A continuación realizamos varios ejemplos en los que dada una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables, tratamos de identificarla y de encontrar sus elementos geométricos: ejes, focos, vértices, asíntotas, centro y directriz. De ahora en adelante cada vez que pidamos *e t iar na e i n ni a*, nos referiremos a encontrar todos sus elementos geométricos, así como indicar su tipo y escribirla en forma canónica.

EJEMPLO A. *t iar la e i n ni a* $3\ ^2 - 2\ y + 3y^2 + 2\ - 4y + 1 = 0$. Puesto que $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $|\ \ | = 8 > 0$ y, por tanto, es una cónica de *ti o elí ti o*. Los autovalores de son las soluciones de la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2);$$

podemos elegir $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ para que tengamos $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

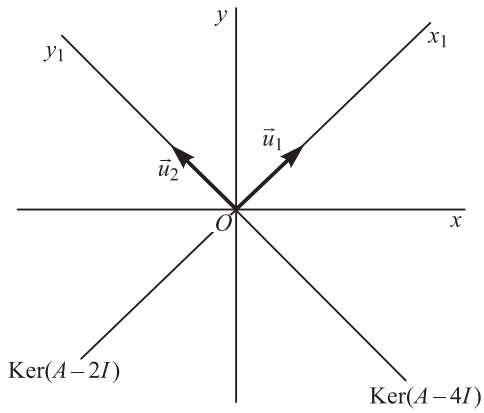
Tratamos ahora de encontrar los nuevos ejes de manera que el término $-2\ y$ desaparezca. Para ello calcularemos:

Ker(-2):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad = y,$$

Ker(-4):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad = -y.$$



i ra 11.37

Elegimos estos ejes como nuevo sistema de coordenadas, de manera que la matriz del cambio de base es

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ya que $\vec{}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Observar que es la matriz de un giro de 45º con centro el origen. Así pues, tenemos

$$\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

o bien

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}({}_1 - y_1), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}({}_1 + y_1).$$

Sustituyendo en la ecuación dada se obtiene

$$\frac{3}{2}({}_1 - y_1)^2 - ({}_1 - y_1)({}_1 + y_1) + \frac{3}{2}({}_1 + y_1)^2 +$$

$$+ 2\frac{1}{\sqrt{2}}({}_1 - y_1) - 4\frac{1}{\sqrt{2}}({}_1 + y_1) + 1 = 0,$$

que simplificando se transforma en

$$2\,{}^2_1 + 4y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\,{}_1 - \frac{6}{\sqrt{2}}y_1 + 1 = 0.$$

Puesto que esta igualdad puede escribirse de la forma

$$2\left(\ _1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y_1 - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{2}{8} - \frac{9}{8} + 1 = 0,$$

la traslación

$$\begin{cases} \ _2 = \ _1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y_2 = y_1 - \dfrac{3}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

nos permite escribir $2\ \frac{2}{2} + 4y_2^2 = \frac{3}{8}$, o bien

$$\frac{\frac{2}{2}}{3/16} + \frac{y_2^2}{3/32} = 1,$$

que es la ecuación canónica de una *eli e*; cuyos semiejes son $a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $b = \sqrt{\dfrac{3}{32}}$.

Si es el centro de la elipse, las coordenadas de en el sistema de referencia $\{\ ; \vec{}_1, \vec{}_2\}$ son

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4\sqrt{2}}\right).$$

Por tanto, las coordenadas de en el sistema de referencia $\{\ ; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 3/4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} - 3/4\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} + 3/4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}.$$

El eje principal es paralelo a Ker(-2) y, por tanto, es

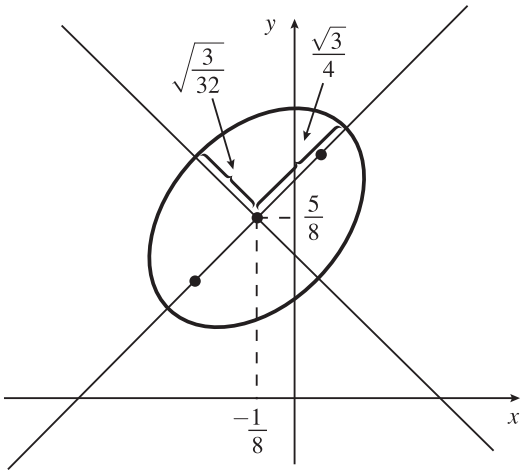
$$y - \frac{5}{8} = \ + \frac{1}{8} \ \Leftrightarrow \ y = \ + \frac{3}{4}$$

ya que pasa por . El eje secundario es paralelo a Ker(-4) y pasa por ; por tanto, su ecuación es

$$y - \frac{5}{8} = -\left(\ + \frac{1}{8}\right) \ \Leftrightarrow \ y = - \ + \frac{1}{2}.$$

Finalmente,

$$^2 = a^2 - b^2 = \frac{3}{16} - \frac{3}{32} = \frac{3}{32} \ \Leftrightarrow \ \ = \sqrt{\frac{3}{32}}.$$



i ra 11.38

* * *

EJEMPLO B. *t iar la ni a* $^2 - 2\ y + y^2 + 4\ - 6y + 1 = 0$. Puesto que $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $| \ | = 1 - 1 = 0$ y, por tanto, es una cónica de tipo *arab li o*. Como

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda,$$

los autovalores de son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Ker($- 0$) = Ker( ):

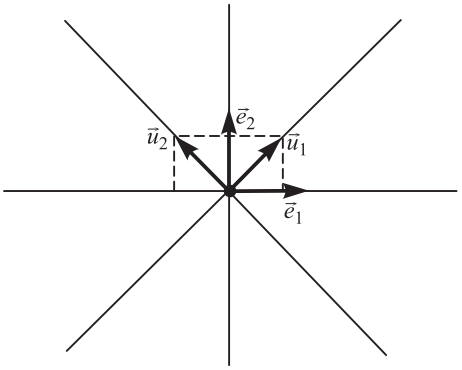
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad = y. \quad \text{Tomar } \vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Ker($- 2$):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad = -y. \quad \text{Tomar } \vec{}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

Considerando como nueva base $\{\vec{}_1, \vec{}_2\}$, que está girada 45º con respecto a la base canónica, el cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



i ra 11.39

o bien

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(_1 - y_1) \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(_1 + y_1).$$

Sustituyendo estos valores de e y en la ecuación dada obtenemos

$$0 \cdot {}^2_1 + 2y_1^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(_1 - y_1) - \frac{6}{\sqrt{2}}(_1 + y_1) + 1 = 0$$

o bien

$$2y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} _1 - \frac{10}{\sqrt{2}} y_1 + 1 = 0.$$

Completando cuadrados obtenemos

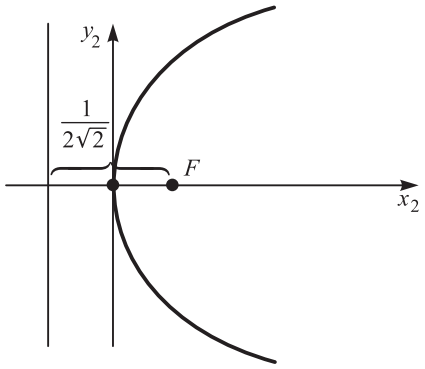
$$2\left(y_1 - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{8}\right) = 0,$$

con lo cual la traslación

$$\left.\begin{aligned} {}_2 &= {}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{8} \\ y_2 &= y_1 - \frac{5}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

la transforma en $2y_2^2 - \dfrac{2}{\sqrt{2}} {}_2 = 0$. Se trata, pues, de una parábola cuya forma canónica es

$$y_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} {}_2.$$



i ra 11.40

Tenemos que 2 $= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

El vértice de la parábola en el sistema ($_1, y_1$) es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{25\sqrt{2}}{8}, \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$; en el sistema de referencia canónico su vértice es

$$= \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - 25\sqrt{2}/8 \\ 5/2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 25/8 - 5/4 \\ 1/2 - 25/8 + 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31/8 \\ -11/8 \end{pmatrix}.$$

El eje principal pasa por el vértice y tiene $\vec{}_1$ como vector director; por tanto,

$$y + \frac{11}{8} = \quad + \frac{31}{8} \quad \Leftrightarrow \quad y = \quad + \frac{5}{2}.$$

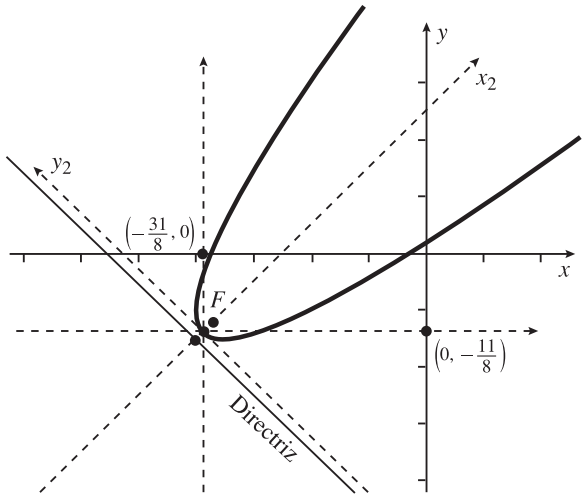
El eje secundario pasa también por el vértice y tiene $\vec{}_2$ como vector director; por tanto,

$$y + \frac{11}{8} = -\left(\quad + \frac{31}{8} \right) \quad \Leftrightarrow \quad y = - \quad - \frac{21}{4}.$$

El foco está a distancia $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ del vértice, en el eje principal; como el eje principal está inclinado 45º con respecto al eje se tiene

$$= \left(-\frac{31}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos 45^\circ, \; -\frac{11}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{sen} 45^\circ \right) =$$

$$= \left(-\frac{31}{8} + \frac{1}{8}, \; -\frac{11}{8} + \frac{1}{8} \right) = \left(-\frac{30}{8}, \; -\frac{10}{8} \right) = \left(-\frac{15}{4}, \frac{5}{4} \right).$$



i ra 11.41

Puesto que la directriz ha de ser paralela al eje secundario, su ecuación será de la forma $+ y + = 0$, donde

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} = \quad (\quad , \text{directriz}) = \frac{\left| -\frac{31}{8} - \frac{11}{8} + \right|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{4} = \left| -\frac{42}{8} + \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} = -\frac{21}{4} + \\ \\ \frac{1}{4} = \frac{21}{4} - \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \\ \\ = \frac{20}{4} = 5. \end{array}$$

La recta $+ y + \frac{11}{2} = 0$ es la directriz, ya que la recta $+ y + 5 = 0$ corta al eje principal en

$$\left. \begin{array}{l} + y + 5 = 0 \\ - y + \frac{5}{2} = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad = -\frac{15}{4} \quad , \quad y = -\frac{5}{4}$$

y, por tanto, pasa por el foco.

11.8. INVARIANTES DE LAS CÓNICAS Y REDUCCIÓN A SU FORMA CANÓNICA

Una ecuación de segundo grado en las variables e y es de la forma

$$a_{11}{}^2 + a_{12}\ y + a_{22}y^2 + a_1\ + a_2y + a = 0,$$

que también podemos escribir como

$$(\ , y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = (\ , y, 1) \ \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{8.1}$$

lo que puede comprobarse fácilmente. Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de *rva e eg n o gra o.*

Definición 11.8.1

Se denominan in ariantes de una curva de segundo grado a cualquier expresión formada por los coeficientes de su ecuación que no varía al cambiar de un sistema de coordenadas a otro mediante un giro o una traslación.

Teorema 11.8.2

Son invariantes de la curva de segundo grado dada en (8.1) los siguientes:

$$= a_{11} + a_{22} \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{vmatrix}.$$

Demostración. Con

$$_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} a_1/2 \\ a_2/2 \end{pmatrix}$$

la ecuación (8.1) se escribe de la forma

$$(x, y, 1)\left(\begin{array}{c|c} A_0 & b \\ \hline b^t & a \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8.2}$$

En la sección 10.1 se demostró que un cambio de referencia se escribe de la forma

$$\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $\in \ _{2\times 2}(\mathbb{R})$ matriz de cambio de base. Este cambio puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como la matriz de un giro es ortogonal se ha de tener $\cdot {}^t = $. Sustituyendo en (8.2) se tiene

$$0 = (x',\ y',\ 1)\left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_0 & b \\ \hline b^t & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$0 = (x',\ y',\ 1)\left(\begin{array}{c|c} C^tA_0C & C^tA_0p + C^tb \\ \hline p^tA_0C + b^tC & p^tA_0p + b^tp + p^tb + a \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poniendo

$$\begin{aligned} {}'_0 &= {}^t{}_0 \\ b' &= {}^t{}_0 + {}^tb \\ a' &= {}^t{}_0 + b^t + {}^tb + a \end{aligned}$$

podemos escribir

$$0 = (x',\ y',\ 1)\left(\begin{array}{c|c} A'_0 & b' \\ \hline (b')^t & a' \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x',\ y',\ 1)A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La demostración del teorema se termina con las siguientes observaciones:

Puesto que

$$|A'| = \left|\left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1 \end{array}\right)A\left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\right| = |C^t|\,|A|\,|C| = |A|$$

se tiene que $\Delta = |\ |$ es invariante.

Puesto que ${}'_0 = {}^t{}_0$ se tiene que ${}_{'_0}(\lambda) = |\ {}'_0 - \lambda\ | = |\ {}^t{}_0 - \lambda\ {}^t\ | = |\ {}_0 - \lambda\ | = {}_0(\lambda)$. Pero

$${}_0(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2/4) = \lambda^2 - \text{traza}(\ {}_0)\lambda + |\ {}_0|$$

y análogamente ${}_{'_0}(\lambda) = \lambda^2 - \text{traza}(\ {}'_0)\lambda + |\ {}'_0|$. Como ambos polinomios son iguales se ha de tener traza$(\ {}'_0) = $ traza$(\ {}_0) = $ y $|\ {}'_0| = |\ {}_0| = \delta$. Por tanto, y δ también son invariantes. ■

* * *

Con la ayuda de los invariantes puede darse una clasificación de las cónicas y hallar fácilmente su forma canónica. Consideremos la cónica dada por (8.1).

Si $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$ estamos en el caso de la sección 11.7 por lo que una forma canónica es

$$\lambda_1 \ ^2 + \lambda_2 \ ^2 = \ . \tag{8.3}$$

Como

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 \ = -\delta \ ,$$

se tiene $= -\dfrac{\Delta}{\delta}$. Si $\Delta \neq 0$, para que (8.3) tenga solución, Δ debe tener distinto signo que λ_1 y λ_2, es decir signo $(\Delta) \neq$ signo $(\lambda_1 + \lambda_2)$ o, equivalentemente, $\Delta \cdot \ < 0$, donde $= \lambda_1 + \lambda_2$, con lo cual (8.3) es la ecuación de una *eli e*. Cuando $\Delta \cdot \ > 0$, (8.3) no tiene soluciones reales. Si $\Delta = 0$, $= 0$ y como λ_1 y λ_2 deben tener el mismo signo por ser $\delta > 0$, se tiene un *nto*.

Si $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$ estamos en el caso de la sección 11.7 por lo que una forma canónica es de nuevo como en (8.3), con λ_1 y λ_2 de signo distinto ya que $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$. De nuevo, como $\Delta = -\delta$ se tiene $= -\dfrac{\Delta}{\delta}$. Si $\Delta \neq 0$, (8.3) siempre tiene solución, y representa una *i rbola*. Si $\Delta = 0$ (8.3) corresponde a un par de rectas secantes de ecuaciones

$$= \pm \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}} \ .$$

Si $\delta = 0$ estamos en el caso de la sección 11.7. Podemos tener

$$\lambda_2 \ ^2 + b \ = 0 \quad , \quad b \neq 0 \tag{8.4}$$

ó

$$\lambda_2 \ ^2 + \ = 0 \tag{8.5}$$

como formas canónicas de (8.1). Para (8.4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b/2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_2 \frac{b^2}{4} = - \ \frac{b^2}{4} \neq 0$$

con $= \lambda_2 \neq 0$. Por tanto $\Delta \neq 0$ y $b = \pm \sqrt{-4 \ \dfrac{\Delta}{}}$. Observar que $-4\dfrac{\Delta}{\mathrm{s}} = b^2$ es siempre positivo en este caso y (8.4) representa una *ar bola*.

Para (8.5),

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} = 0$$

y aunque no puede determinarse con los invariantes que tenemos, sabemos que la ecuación (8.5) representa dos *re ta o bien aralela , o bien oin i ente* (cuando hay solución). Cada uno de estos casos puede distinguirse factorizando (8.1) (ver ejemplos B y C).

RESUMEN

CURVAS DE SEGUNDO GRADO O CÓNICAS

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

INVARIANTES

$$s = a_{11} + a_{12},\ \delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{vmatrix}$$

AUTOVALORES

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 - s\lambda + \delta \quad , \quad s = \lambda_1 + \lambda_2,\ \delta = \lambda_1\lambda_2 .$$

CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS SEGÚN SUS INVARIANTES

<table>
<tr><td rowspan="3">$\Delta \neq 0$</td><td rowspan="2">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="2">$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$</td><td>$\delta > 0$
$\Delta \cdot s < 0$</td><td>Elipse</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$</td><td>Hipérbola</td></tr>
<tr><td>$\delta = 0$</td><td>$\lambda_2Y^2 = \pm\sqrt{\dfrac{-4\Delta}{s}}\,X$</td><td colspan="2">Parábola</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td rowspan="2">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="2">$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 = 0$</td><td>$\delta > 0$</td><td>Un punto</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$</td><td>Par de rectas secantes</td></tr>
<tr><td>$\delta = 0$</td><td>$\lambda_2Y^2 + c = 0$</td><td colspan="2">Rectas paralelas o coincidentes (si hay soluciones reales)</td></tr>
</table>

EJEMPLO A. *e ir a orma an ni a la ni a* $^2 + 2\ y - y^2 - 6\ + 4y - 3 = 0.$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 24 - 25 = -1 \neq 0.$$

Por ser $\delta = -2 < 0$ se trata de una curva de tipo hiperbólico y por ser $\Delta \neq 0$ se trata de una cónica no degenerada: una hipérbola.

Los autovalores de su parte principal son:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 1 = -1 + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2,$$

$$\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2};$$

la forma canónica de la hipérbola es $\sqrt{2}\ \frac{2}{2} - \sqrt{2}y_2^2 =\ $, donde $\Delta = -\delta \quad \Rightarrow \quad = -\dfrac{\Delta}{\delta} =$ $= -\dfrac{-1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$. Por tanto, tenemos

$$\sqrt{2}\ \frac{2}{2} - \sqrt{2}y_2^2 = -\frac{1}{2}$$

o bien

$$\frac{\frac{2}{2}}{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{y_2^2}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}} = 1.$$

Haciendo $_2 =\ $, $y_2 =\ $ se tiene

$$\frac{\frac{2}{1}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}} - \frac{\frac{2}{1}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}} = 1$$

y, por tanto, se trata de una hipérbola equilátera, es decir, $a = b = \left(\sqrt[4]{8}\right)^{-1}$.

EJEMPLO B. *e ir a orma an ni a (i e o ible) la ni a*

$$^2 + 3\ y + 2y^2 + 2\ + 5y - 3 = 0.$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 2 & 5/2 \\ 1 & 5/2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Se trata de una cónica de tipo hiperbólico degenerada: dos rectas que se cortan. Para encontrar estas dos rectas consideramos y fija y resolvemos la ecuación de la cónica para :

$$^2 + (3y + 2)\ + (2y^2 + 5y - 3) = 0,$$

$$= \frac{-3y - 2 \pm \sqrt{9y^2 + 12y + 4 - 8y^2 - 20y + 12}}{2} =$$

$$= \frac{-3y - 2 \pm \sqrt{y^2 - 8y + 16}}{2} = \frac{-3y - 2 \pm (y - 4)}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2y - 6}{2} = -y - 3 \\ \dfrac{-4y + 2}{2} = -2y + 1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$^2 + 3\ y + 2y^2 + 2\ + 5y - 3 = (\ + y + 3)(\ + 2y - 1).$$

* * *

EJEMPLO C. *eterminar el ti o e la rva* $^2 + 4\ y + 4y^2 - 2\ - 4y - 3 = 0$ *y re irla a orma an ni a i e o ible.*

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Se trata de una curva de tipo parabólico degenerada: dos rectas paralelas, coincidentes o un punto. Procediendo como en el ejemplo B, se obtiene:

$$^2 + 4\ y + 4y^2 - 2\ - 4y - 3 = (\ + 2y - 3)(\ + 2y + 1)$$

y se trata, por tanto, de dos rectas paralelas.

11.9. DETERMINACIÓN DEL CENTRO Y DE LOS EJES PRINCIPALES DE UNA CÓNICA CON CENTRO

Supongamos que

$$(\ , y) = a_{11}\ ^2 + a_{12}\ y + a_{22}y^2 + a_1\ + a_2y + a = 0 \tag{9.1}$$

representa una cónica no degenerada (es decir, $\Delta \neq 0$) y que tiene centro (es decir, es una elipse o una hipérbola y, por tanto $\delta \neq 0$). Las definiciones de Δ y δ se dieron en el Teorema 11.8.2.

En la sección 11.8 se ha descrito un método para obtener la forma canónica de una cónica sin necesidad de realizar un giro y una traslación; este método es rápido en cuanto a la obtención de la forma canónica, pero no permite calcular los ejes de la cónica. En esta sección expondremos un nuevo método para calcular los ejes de una cónica con centro.

Sabemos que los vectores directores de los ejes son los autovectores de la matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

y son, por tanto, fácilmente calculables. Conocidos los vectores directores, los ejes quedan determinados si encontramos el *entro* de la cónica, por el cual necesariamente deben pasar los ejes. Supongamos que su centro es (α, β); entonces la traslación

$$\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

debe transformar (9.1) en una cónica que no posee términos en $'$ ni en y'. La traslación (9.2) sustituida en (9.1) produce

$$a_{11}(\ ')^2 + a_{12}\ 'y' + a_{22}(y')^2 + b_1\ ' + b_2y' + b = 0$$

con

$$b_1 = 2a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 \quad , \quad b_2 = a_{12}\alpha + 2a_{22}\beta + a_2 \quad , \quad b = \ (\alpha, \beta).$$

Observar que

$$b_1 = \frac{\partial}{\partial}\ (\alpha, \beta) \quad , \quad b_2 = \frac{\partial}{\partial y}\ (\alpha, \beta).$$

Por tanto (α, β) es solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial} &= 2a_{11}\ \ + a_{12}y + a_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} &= a_{12}\ \ + 2a_{22}y + a_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Observar que este sistema tiene una solución única, puesto que

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} = 4\delta \neq 0.$$

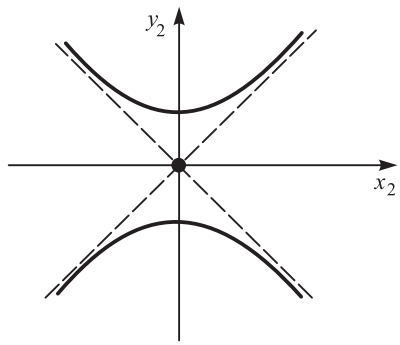
* * *

EJEMPLO C. *eterminar el entro, lo e e y la a íntota e la i rbola el e em lo e la e i n* 11.8: $^2 + 2\ y - y^2 - 6\ + 4y - 3 = 0$.

Sabemos que $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ y que la hipérbola puede escribirse de la forma

$$\frac{\frac{2}{2}}{-\frac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{y_2^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 1$$

en un sistema de coordenadas en la dirección de los nuevos ejes y que se corten en su centro. Observar que y_2 es el eje principal, mientras que $_2$ es el eje secundario.



i ra 11.42

Un autovector correspondiente a $\lambda_1 = \sqrt{2}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\sqrt{2}) + y = 0 \quad ; \quad \vec{}_1 = (1, -1+\sqrt{2}).$$

Un autovector correspondiente a $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1+\sqrt{2}) + y = 0 \quad ; \quad \vec{}_2 = (1, -1-\sqrt{2}).$$

La pendiente del eje principal es $_2 = -1-\sqrt{2}$ y la pendiente del eje secundario es $_1 = -1+\sqrt{2}$.

El centro de la hipérbola es la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial} &= 2 + 2y - 6 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} &= 2 - 2y + 4 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

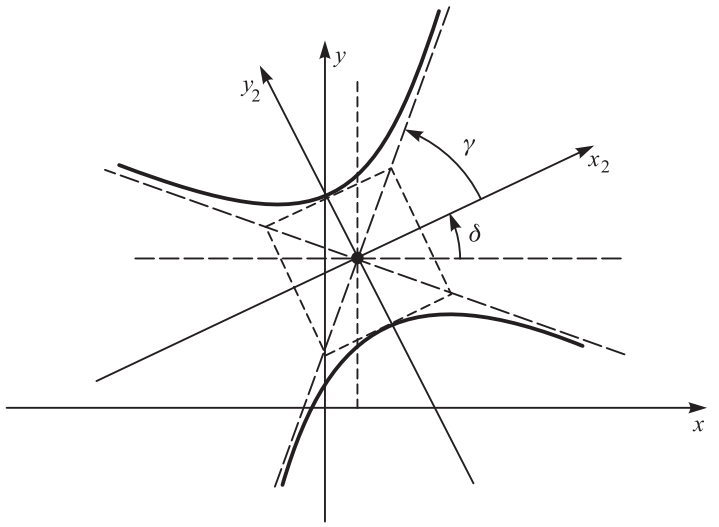
De aquí se deduce que $= \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2}$. La ecuación del eje principal es, por tanto,

$$y - \frac{5}{2} = -(1+\sqrt{2})\left(- \frac{1}{2}\right)$$

y la ecuación del eje secundario es

$$y - \frac{5}{2} = (-1+\sqrt{2})\left(- \frac{1}{2}\right).$$

La gráfica de esta hipérbola se representa en la figura 11.43.



i ra 11.43

Puesto que se trata de una hipérbola equilátera sus asíntotas son las bisectrices de sus ejes y, por tanto, forman un ángulo de 45° con ellos. Si γ y δ son los ángulos de la figura 11.43 se tiene que

$$\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

que es la pendiente de una de las asíntotas; su ecuación es

$$y - \frac{5}{2} = (1 + \sqrt{2})\left(\quad - \frac{1}{2}\right).$$

La otra asíntota es perpendicular a esta y, por tanto, su ecuación es

$$y - \frac{5}{2} = (1 - \sqrt{2})\left(\quad - \frac{1}{2}\right).$$

Observación. Las asíntotas de una hipérbola también pueden hallarse mediante procedimientos de cálculo; basta observar que las asíntotas deben ser de la forma $y - \frac{5}{2} = m\left(\quad - \frac{1}{2}\right)$ (ya que pasan por el centro de la hipérbola) y que deben satisfacer

$$1 = \lim_{\to\infty} \frac{\dfrac{2 \quad + 4 \pm \sqrt{4^{\,2} + 16 + 16 \quad + 4^{\,2} - 24 \quad - 12}}{2}}{m \quad - \dfrac{m}{2} + \dfrac{5}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{m}$$

Por tanto, $m = 1 \pm \sqrt{2}$, que es el mismo resultado que habíamos obtenido anteriormente.

* * *

11.10. DETERMINACIÓN DEL VÉRTICE Y DEL EJE DE UNA PARÁBOLA

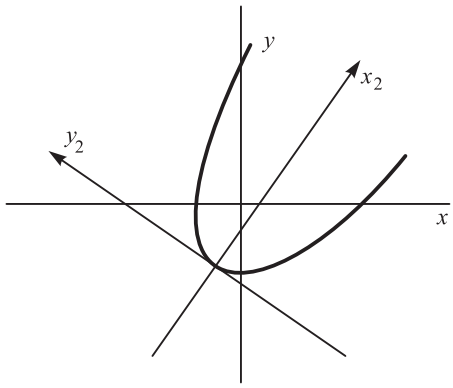
Supongamos que la ecuación

$$(\ , y) = a_{11} \ ^{2} + a_{12} \ y + a_{22}y^2 + a_1 \ \ + a_2 y + a = 0 \tag{10.1}$$

determina una parábola, es decir $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$. El eje de la parábola tiene como vector director cualquier autovector correspondiente a $\lambda_1 = 0$; si $\ _1$ es la pendiente de este eje, solo es necesario conocer el vértice de la parábola para determinar su ecuación.

Para determinar el vértice observamos que el eje secundario es tangente a la parábola en el vértice (ver figura 11.44). Derivando implícitamente en la ecuación (10.1), la pendiente de la tangente a la parábola satisface

$$\frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial}{\partial y} y' = 0.$$



i ra 11.44

Por tanto, el vértice ha de verificar

$$-\frac{1}{1} = -\frac{\partial \ /\partial}{\partial \ /\partial y}. \tag{10.2}$$

Como el vértice debe estar en la parábola ha de satisfacer

$$(\ , y) = 0. \tag{10.3}$$

Las ecuaciones (10.2) y (10.3) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite determinar el vértice.

EJEMPLO A. *eterminar el v rti e y el e e e la ar bola* $^2 - 2\ y + y^2 + 4\ - 6y + 1 = 0$ (ejemplo B de la sección 11.7).

Puede comprobarse que $\delta = 0$ y $\Delta \neq 0$ y los autovalores de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 0$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad = y \quad ; \quad \vec{}_1 = (1, 1),$$

y por tanto la pendiente del eje de la parábola es $_1 = 1$. Derivando implícitamente en la ecuación de la parábola obtenemos

$$(2\ - 2y + 4) + (-2\ + 2y - 6)y' = 0.$$

Como la pendiente de la tangente a la parábola en el vértice es $-\frac{1}{1} = -1$, se tiene

$$-\frac{2\ - 2y + 4}{-2\ + 2y - 6} = -1 \quad \Rightarrow \quad 2\ - 2y + 4 = -2\ + 2y - 6$$

$$2\ - 2y + 5 = 0. \tag{10.4}$$

El vértice es la intersección de la parábola con la recta $= y - \frac{5}{2}$; por tanto

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{5}{2}\right)y + y^2 + 4\left(y - \frac{5}{2}\right) - 6y + 1 = 0,$$

de donde se deduce que $y = -\frac{11}{8}$, $= -\frac{31}{8}$. El eje pasa por el vértice $\left(-\frac{31}{8}, -\frac{11}{8}\right)$ y tiene pendiente 1, con lo cual es la recta dada en (10.4).

EJERCICIOS (Secciones 11.7, 11.8, 11.9 y 11.10)

En los siguientes ejercicios hacer un estudio lo más detallado posible de las siguientes cónicas (es decir, indicar el tipo, forma canónica y elementos geométricos de la cónica y hacer un esquema).

1. $^2 + y^2 + 2\ y - 7\ - 5y + 7 = 0.$
2. $2\ - 2\ ^2 + y^2 + 4\ y - 1 = 0.$
3. $^2 + y^2 + 4\ - 4y - 2\ y = 5.$
4. $2\ ^2 + y^2 + 2\ y + 2\ + 1 = 0.$
5. $8\ ^2 + 17y^2 + 12\ y - 8\ - 16y = 8.$
6. $^2 + 4y^2 + 4\ y - 6\ - 12y + 9 = 0.$
7. $^2 - y^2 + 2\ + 6y = 13.$
8. $^2 - 2y^2 -\ y + 2\ + 5y - 3 = 0.$
9. $^2 - y^2 +\ - 1 = 0.$
10. $5y^2 + 5\ ^2 - 1 - 8\ y + 4\ - 2y = 0.$
11. $y^2 - 4\ y + 4\ + 4\ ^2 - 2y + 3 = 0.$
12. Reducir la cónica $3\ ^2 + 3y^2 - 2\ y + 18\ + 10y + 19 = 0$ a su forma canónica. Hallar los ejes, el centro y los focos de la cónica correspondiente y dibujarla.
13. Indicar el tipo y poner en forma canónica la cónica $^2 + y^2 + 2\ y - 7\ - 5y + 7 = 0.$
14. Demostrar que las ecuaciones siguientes representan hipérbolas y encontrar sus asíntotas:
    a) $^2 + 4\ y + y^2 = 7.$
    b) $11\ ^2 - 24\ y + 4y^2 + 6\ + 8y = -15.$

15. Demostrar que las ecuaciones siguientes representan parábolas y encontrar su eje y su vértice:

    a) $16\ ^2 - 24\ y + 9y^2 - 30\ \ - 40y = 0.$

    b) $16\ ^2 - 24\ y + 9y^2 - 30\ \ - 40y = 5.$

16. Clasificar, para distintos valores de los parámetros α, β (α, $\beta \in \mathbb{R}$), las cónicas de ecuación

$$\alpha\ ^2 + 2\beta\ y + \alpha y^2 + (\alpha + \beta)(\ \ + y) + 1 = 0.$$

11.11. HACES DE CÓNICAS

En la sección 11.6, a partir del teorema de Pascal (11.6.1) se demostró que cinco puntos de un plano son suficientes para determinar una cónica. Dados los cinco puntos, la construcción dada en la sección 11.6 basada en el teorema de Pascal va proporcionando, uno a uno, los puntos de la cónica que determinan.

En esta sección, se utilizarán los llamados *a e e ni a* como herramienta para encontrar la ecuación de la cónica que determinan cinco puntos dados o, más en general, las cónicas que satisfacen una serie de condiciones geométricas dadas.

Para ello, recordamos primero el caso de las rectas en un plano. Es claro que existen infinitas rectas que pasan por un punto fijado en un plano y, entre ellas, solo una pasa además por otro punto distinto de .

Por ejemplo, si = (3, 2), la ecuación

$$y - 2 = m(\ \ - 3), \quad m \in \mathbb{R},$$

describe el haz de rectas por y se obtiene «combinando» la ecuación de la recta horizontal por ($y - 2 = 0$) con la de la recta vertical por ($- 3 = 0$). (La recta vertical $- 3 = 0$ corresponde al caso en que la pendiente m se hace infinitamente grande).

Dado otro punto distinto de , por ejemplo = (4, 5), hay una única recta del haz de rectas por que, además, pasa por , puesto que la condición «pasar por equivale a la ecuación lineal en la incógnita m dada por

$$5 - 2 = m(4 - 3),$$

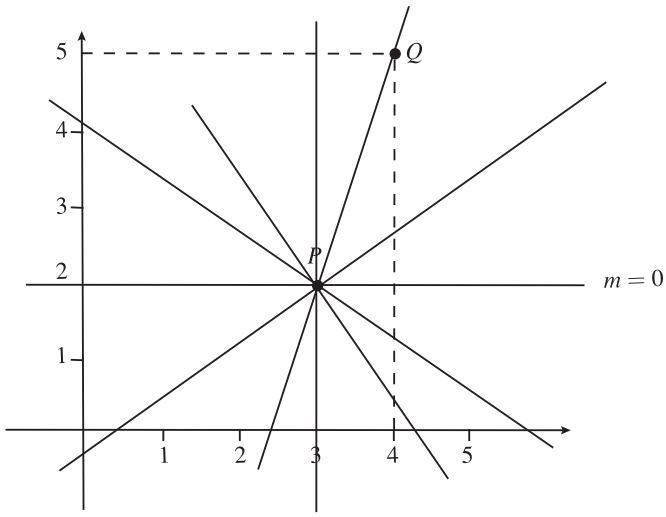
que determina un único valor de m, en este caso, $m = 3$. Así, la recta $y - 2 = 3(\ \ - 3)$, es decir, $y = 3\ \ - 7$ es la única que pasa por los puntos fijados y (ver figura 11.45).

En general, por dos puntos distintos de un plano pasa una única recta, puesto que la ecuación de una recta en un plano,

$$+\ \ y + \ \ = 0$$

tiene 3 coeficientes reales, no todos nulos, con lo cual, dividiendo por uno de ellos distinto de cero, la ecuación depende de dos parámetros reales. Pasar por dos puntos distintos de un plano impone dos condiciones lineales independientes en esos dos parámetros y, por tanto, los determina de manera única.

Análogamente, en el caso de las cónicas, la ecuación de una cónica depende de cinco parámetros reales (tiene seis coeficientes reales no todos nulos, luego dividiendo por uno de ellos distinto de cero, depende solo de cinco parámetros reales).



i ra 11.45

Sucede entonces que, dados cinco puntos, pasar por ellos impone cinco condiciones lineales en los parámetros de la cónica, que son linealmente independientes si los puntos están en posición general y, por tanto, los determina de manera única.

Para encontrar la cónica que efectivamente pasa por los cinco puntos dados, se pueden considerar primero cuatro de ellos que darán lugar a un haz de cónicas dependiente de un parámetro real y, después, imponer a las cónicas del haz que pasen por el «quinto» punto, lo cual determinará de manera única el valor del parámetro.

El haz de cónicas que cumple las cuatro primeras condiciones se construye fácilmente combinando las ecuaciones de dos cónicas del haz, $_1$ y $_2$, que cumplan las condiciones pedidas (tal como ocurría al combinar las rectas horizontal y vertical por un punto para escribir la ecuación de un haz de rectas por).

Así, si $_1 = 0$ y $_2 = 0$ denotan dos cónicas que cumplen las cuatro condiciones consideradas, se tiene que

$$_1 + \ _2 = 0 \quad , \qquad \in \mathbb{R},$$

es la ecuación del haz de cónicas buscado. (La cónica $_2 = 0$ corresponde a un valor de infinitamente grande). En la práctica, se prefieren cónicas $_1$ y $_2$ degeneradas (parejas de rectas distintas o coincidentes) por la comodidad al escribir sus ecuaciones.

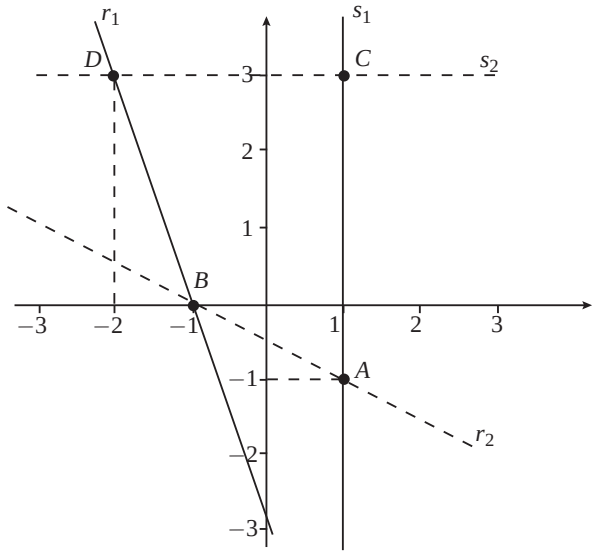
EJEMPLO A. *eterminar la ni a e a an or lo nto* $= (1, -1)$, $= (-1, 0)$, $= (1, 3)$ y $= (-2, 3)$. *n ontrar, entre ella , la ni a ni a e, a em , a a or* $= (0, 0)$.

Se construye primero el haz de cónicas que pasan por los cuatro primeros puntos dados, cuya ecuación es:

$$_1 + \ _2 = 0 \quad , \qquad \in \mathbb{R},$$

con $_1$ y $_2$ cónicas pasando por los cuatro puntos.

Se puede tomar como $_1$ la pareja de rectas r_1, $_1$, con r_1: $3 \ + y + 3 = 0$, la recta por $= (-1, 0)$ y $= (-2, 3)$, y $_1$: $ - 1 = 0$, la recta por $= (1, -1)$ y $= (1, 3)$. Es decir, $_1 : (3 \ + y + 3)(\ - 1) = 0$.



i ra 11.46

Se puede tomar como $_2$ la pareja de rectas r_2, $_2$, con r_2: $+2y+1=0$, la recta por $=(1,-1)$ y $=(-1,0)$, y $_2: y-3=0$, la recta por $=(1,3)$ y $=(-2,3)$. Esto es $_2:(\ +2y+1)(y-3)=0$.

De esta forma, la ecuación del haz de cónicas por los puntos $=(1,-1)$, $=(-1,0)$, $=(1,3)$ y $=(-2,3)$ (ver figura 11.46) es

$$(3\ +y+3)(\ -1)+\ (\ +2y+1)(y-3)=0\quad,\qquad \in\mathbb{R}$$

o también

$$3\ ^2+2\ y^2+(\ +1)\ y-3\ \ -(5\ +1)y-(3+3\ )=0\quad,\qquad \in\mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Observar que existe otra posibilidad para las cónicas $_1$ y $_2$, a saber, la pareja de rectas r, con r la recta por $=(-1,0)$ y $=(1,3)$, de ecuación $2y-3\ -3=0$ y la recta por $=(1,-1)$ y $=(-2,3)$, cuya ecuación es $3y+4\ -1=0$.

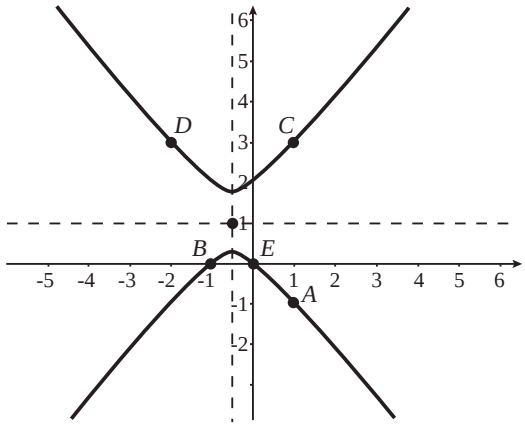
Entre todas las cónicas de (11.1), la que pasa por $=(0,0)$ corresponde al valor de que se obtiene sustituyendo $=y=0$ en la ecuación anterior, es decir, $=-1$. Por tanto su ecuación es

$$3\ ^2-2y^2+3\ +4y=0.$$

Completando cuadrados en esta ecuación, se obtiene

$$\frac{(y-1)^2}{5/8}-\frac{(\ +1/2)^2}{5/12}=1,$$

que corresponde a una hipérbola con centro en el punto $(-1/2,1)$, con ejes paralelos a los ejes coordenados (en esta hipérbola, el eje principal, que contiene a los focos, es la recta vertical $=-1/2$) y los semiejes son $\sqrt{\frac{5}{8}}, \sqrt{\frac{5}{12}}$.



i ra 11.47 C nica ue pasa por los puntos = (1 −1) = (−1) = (1 3) = (−2 3) = ( ).

* * *

En los siguientes ejemplos, una de las condiciones impuestas a las cónicas consiste en fijar la recta tangente en un punto.

En estos casos, geométricamente, el punto de tangencia se considera como la posición límite de una pareja de puntos de la cónica que se aproximan hasta coincidir en el punto de tangencia. Por ello, una cónica que cumple la condición impuesta puede ser una pareja de rectas formada por la recta tangente y otra recta apropiada, según el resto de las condiciones.

EJEMPLO B. *eterminar la ni a e a an or* = (1, −1), = (−1, 0), = (1, 3), *tangente en* = (1, 3) *e la re ta y* = 3, *y a em a an or* = (0, 0).

En este caso, para construir el haz de cónicas que cumplen las cuatro primeras condiciones, se puede tomar como $_1$ la pareja de rectas r_1, $_1$ con r_1 la recta que pasa por = (−1, 0) y = (1, 3), cuya ecuación es $2y - 3 - 3 = 0$, y $_1$ la recta por = (1, −1) y = (1, 3), de ecuación $- 1 = 0$ (ver figura 11.48). Así

$$_1 : (2y - 3 - 3)(- 1) = 0$$

es una pareja de rectas que se cortan en = (1, 3).

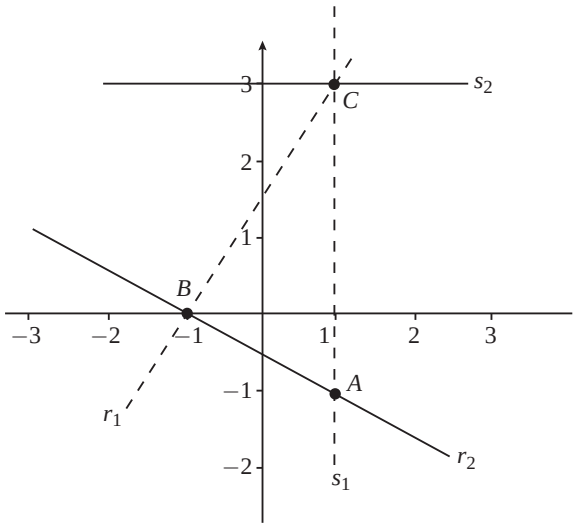
La cónica $_2$ se toma como la pareja de rectas r_2, $_2$ con r_2: $+ 2y + 1 = 0$ la recta por = (1, −1) y = (−1, 0), y $_2 : y - 3 = 0$, es decir la tangente que se ha fijado en el punto = (1, 3) (ver figura 11.48). Así

$$_2 : (+ 2y + 1)(y - 3) = 0.$$

El haz de cónicas que cumplen las cuatro primeras condiciones tiene por ecuación

$$(2y - 3 - 3)(- 1) + (+ 2y + 1)(y - 3) = 0 \quad , \quad \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Ahora, se impone la condición de pasar por = (0, 0) a las cónicas del haz (11.2), lo que implica = 1.



i ra 11.48

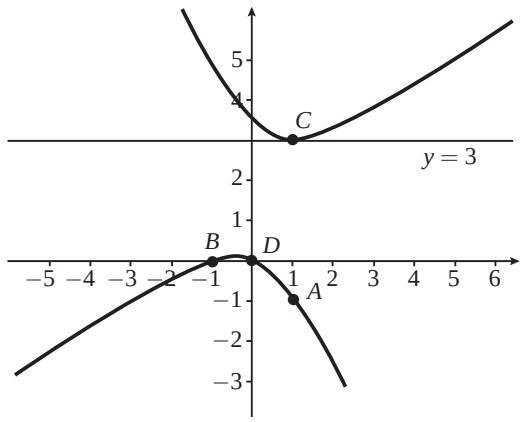
Entonces, la única cónica que cumple las cinco condiciones dadas es la que se obtiene para $= 1$, es decir, la de ecuación

$$-3\ ^2 + 2y^2 + 3\ y - 3\ - 7y = 0. \tag{11.3}$$

Podemos determinar qué tipo de cónica representa (11.3) usando sus invariantes. Tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 2 & -7/2 \\ -3/2 & -7/2 & 0 \end{vmatrix} = 48 \neq 0 \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} -3 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -9 < 0,$$

por lo que se trata de una hipérbola según el cuadro de la sección 11.9.

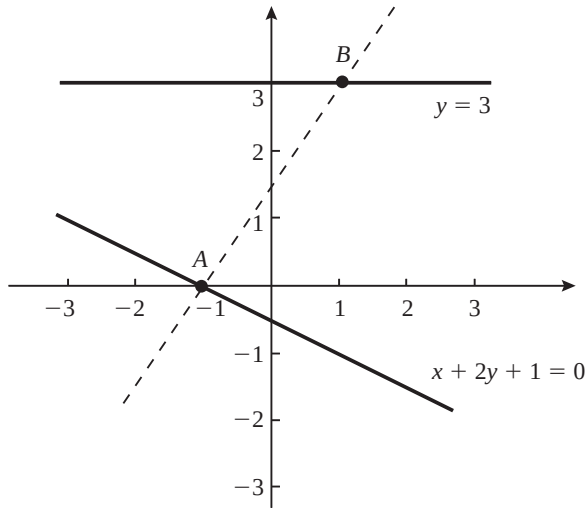


i ra 11.49 C nica ue pasa por los puntos = (1 1) = (−1) = (1 3)
su tangente en es la recta = 3 también pasa por = ( ).

EJEMPLO D. *eterminar la ni a ya tangente en el nto* $= (-1, 0)$ *e la re ta* $+ 2y + 1 = 0$, *la tangente en el nto* $= (1, 3)$ *e la re ta* $y = 3$, *y a em a an or* $= (0, 0)$.

En este ejemplo, para escribir la ecuación del haz de cónicas que satisfacen las condiciones de tangencia dadas, se puede tomar como $_1$ la pareja de tangentes fijada (ver figura 11.50). Así,

$$_1 : (\ + 2y + 1)(y - 3) = 0.$$



i ra 11.50

Como cónica $_2$ se considera la recta que une los puntos de tangencia contada dos veces (como caso límite de la pareja de rectas r y , con r una recta por dos puntos, uno en cada tangente fijada, y otra de dichas rectas). De esta forma

$$_2 : (2y - 3\ - 3)^2 = 0.$$

El haz de cónicas tiene por ecuación

$$(\ + 2y + 1)(y - 3) + \ (2y - 3\ - 3)^2 = 0 \quad , \quad \in \mathbb{R}. \tag{11.4}$$

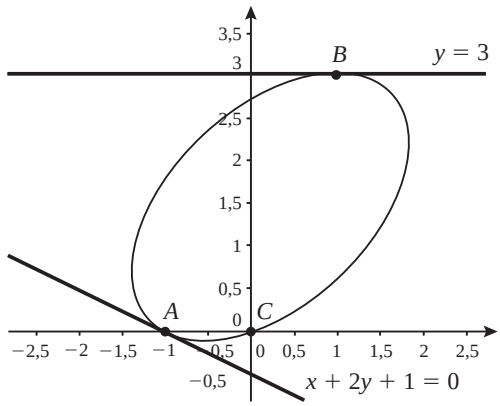
Imponiendo que el punto $= (0, 0)$ pertenezca a las cónicas del haz, se obtiene $= 1/3$, y por consiguiente la única cónica que satisface las condiciones del enunciado es

$$3\ ^2 + \frac{10}{3} y^2 - 3\ y + 3\ - 9y = 0. \tag{11.5}$$

Podemos determinar qué tipo de cónica representa (11.5) usando sus invariantes. Tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 10/3 & -9/2 \\ 3/2 & -9/2 & 0 \end{vmatrix} = -48 < 0 \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 10/3 \end{vmatrix} = \frac{31}{4} > 0.$$

Como $= 3 + \dfrac{10}{3} = \dfrac{19}{3}$ se tiene $\Delta \cdot \ < 0$, por lo que (11.5) es la ecuación de una elipse (ver figura 11.51).



i ra 11.51 C nica cu a tangente en $A = (-1\ )$ es $x + 2y + 1 =$ cu a tangente en $B = (1\ 3)$ es $y = 3$ pasa por $C = (\ )$.

EJERCICIOS (SECCIÓN 11.11)

1. a) Determinar las cónicas que pasan por los puntos $= (5, 0)$, $= (5, 4)$, $= (2, 2)$, $= (8, 2)$.
   b) Entre ellas, encontrar la que además pasa por el origen.

2. a) Determinar las cónicas cuya tangente en $= (1, 1)$ es la recta $y =$ y que pasan por $= (3, 1)$, $= (3, 0)$.
   b) Entre ellas, encontrar la que además pasa por $= (1, 0)$.

3. Hallar la cónica cuyas tangentes en $= (0, 0)$ y $= (2, 1)$ son respectivamente las rectas $y + \ = 0$, $- 2 = 0$, que además pasa por $= (1, 0)$.

4. Hallar las cónicas que son de tipo parabólicao y tienen en $= (0, 0)$ tangente $y + \ = 0$, y en $= (2, 1)$ tangente $= 2$.

5. Determinar las cónicas cuya tangente en $= (0, 1)$ es una recta horizontal, su tangente en $= (-1, 0)$ es vertical y son de tipo elíptico.

6. Determinar las cónicas no degeneradas del haz de cónicas por $= (-1, 0)$ y $= (1, 0)$, cuya tangente en $= (0, 1)$ es horizontal.

Biografía

polonio de erga nació en Perga (actualmente en Turquía) en el año 262 a. de C. y murió en Alejandría (Egipto) alrededor del año 190 a. de C. Entre sus contemporáneos era conocido como «El Gran Geómetra». Su tratado *ni a* (sobre las secciones cónicas) es uno de los más impresionantes trabajos científicos de las civilizaciones antiguas. Muchos de sus escritos se han

perdido, aunque algunos de sus títulos y un breve resumen de su contenido se conservan debido a otros escritores, especialmente Pappus de Alejandría.

En su juventud, Apolonio estudió en Alejandría, el centro del saber científico en su época, bajo discípulos de Euclides y más tarde enseñó en la universidad de la misma ciudad. Visitó Pérgamo, capital del reino heleno en la provincia de Anatolia, con motivo de la apertura de una universidad y una biblioteca similares a las de Alejandría. Fue en Pérgamo donde escribió la primera edición de las *ni a* .

Los cuatro primeros libros de las *ni a* han llegado hasta nosotros en su lengua original (griego) y los tres siguientes traducidos al árabe. El libro octavo se ha perdido. El grado de originalidad de las *ni a* puede juzgarse por el prefacio del tratado. De acuerdo con Apolonio los libros del 1 al 4 contienen un desarrollo sistemático de las principales propiedades de las cónicas, muchas de las cuales eran conocidas por Euclides y Maneachmus. El resto de los libros conocidos son originales y se refieren a investigaciones sobre un problema particular.

Uno de los trabajos de Apolonio, *obre e e o* , cuya existencia es conocida a través de otros escritores de la antigüedad, demuestra que los rayos paralelos que se reflejan en un espejo esférico no pasan por el centro de la esfera, como se creía antes, y estudia las propiedades de los espejos parabólicos. En otro de sus trabajos, *l m to o r i o*, se asegura que Apolonio calculó valores más cercanos a π que $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$, que eran los calculados por Arquímedes.

laise ascal nació el 19 de junio de 1623 en Clermont-Ferrand (Francia) donde su padre era magistrado. Su madre murió en 1626 y desde entonces su padre, que era también bastante conocido como matemático, se dedicó a la educación de sus hijos, Blaise y Jaqueline. Jaqueline mostró un talento precoz en el terreno literario y Blaise en el de las matemáticas. En 1640 publicó un trabajo sobre las secciones cónicas, *ai o r le oni e* que despertó la envidia de personajes tan famosos como René Descartes (1596-1650), quien nunca pudo creer que aquel trabajo fuera obra de un joven.

Su genio brilló a gran altura en otros campos; asentó los fundamentos de la moderna teoría del cálculo de probabilidades, tal como se conoce actualmente; alrededor de 1646 comenzó a interesarse por los principios de la hidrostática, la presión atmosférica y el vacío, realizando experimentos que confirmaron las teorías de Galileo y Torricelli en estos campos.

En 1639 su padre fue nombrado administrador en Roven. Entre 1642 y 1644 B. Pascal pensó y construyó una máquina para ayudar a su padre en el cálculo de los impuestos. Esta máquina fue considerada por los contemporáneos de Pascal como su mayor legado para la posteridad; de hecho, esta máquina puede ser considerada como el primer calculador digital.

Sin embargo, Pascal se hizo también famoso como filósofo de la religión y como escritor, ocupando así un lugar único en la historia del pensamiento. En 1646 Pascal comenzó a interesarse por la religión, como consecuencia de una larga enfermedad de su padre. En 1654, después de una honda experiencia religiosa, que él llamó su «noche de fuego», decidió dedicarse enteramente a una vida de oración. Sus obras más importantes en este aspecto son *La orte rovin iale* , de gran influencia en su tiempo, y sobre todo los fragmentos hallados a su muerte de la gran obra que planeaba en forma de una «Apología de la Religión Cristiana».

Capítulo 12

Formas bilineales y cuadráticas.

12.1. Formas bilineales y cuadráticas.

12.2. Formas bilineales y cuadráticas en un espacio euclídeo.

12.3. Ley de inercia de las formas cuadráticas.

12.4. Formas cuadráticas definidas. Puntos críticos de funciones de varias variables.

12.5. Diagonalización simultánea de formas cuadráticas.

12.1. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

En el capítulo anterior hemos estudiado las curvas de segundo grado; la parte principal de estas curvas puede escribirse de la forma

$$(, y) = (, y) \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$$

donde es una matriz simétrica de orden 2; utilizando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$, la expresión anterior puede escribirse de la forma

$$(, y) = \left(\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} \right) \tag{1.1}$$

con $\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La generalización de la expresión (1.1) a $\mathbb{R}^n$ puede escribirse de la forma

$$( ) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \right) \tag{1.2}$$

donde $\vec{\ } = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ y es una matriz simétrica de orden n.

Las expresiones (1.1) y (1.2) son ejemplos de *orma a r ti a* ; estas, a su vez, serán casos particulares de las formas bilineales.

Definición 12.1.1 (orma bilineal)

Sea un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$); una aplicación : × $\to \mathbb{K}$ tal que ($\vec{\ }$, $\vec{y}$) es lineal en la variable $\vec{\ }$, dejando $\vec{y}$ fija, y ($\vec{\ }$, $\vec{y}$) es lineal en la segunda variable $\vec{y}$, dejando $\vec{\ }$ fija, recibe el nombre de forma bilineal.

De la Definición 12.1.1 se deduce que es una forma bilineal si y solo si se satisfacen las siguientes propiedades:

a) ($\vec{\ }_1 + \vec{\ }_2, \vec{y}$) = ($\vec{\ }_1, \vec{y}$) + ($\vec{\ }_2, \vec{y}$) , $\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{y} \in$.

b) ($\alpha\vec{\ }, \vec{y}$) = α ($\vec{\ }, \vec{y}$) , $\alpha \in \mathbb{K}, \vec{\ }, \vec{y} \in$.

c) ($\vec{\ }, \vec{y}_1 + \vec{y}_2$) = ($\vec{\ }, \vec{y}_1$) + ($\vec{\ }, \vec{y}_2$) , $\vec{\ }, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in$.

d) ($\vec{\ }$, $\beta\vec{y}$) = β ($\vec{\ }, \vec{y}$) , $\beta \in \mathbb{K}, \vec{\ }, \vec{y} \in$.

EJEMPLO A. Si es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base de , la aplicación : × $\to \mathbb{K}$ dada por

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n} a_i \ _i y \ ,$$

donde $a_i \in \mathbb{K}$, $i, \ = 1, ..., n$, $\vec{} = \sum_{=1}^{n} \ \vec{e} \ \in$ e $\vec{y} = \sum_{=1}^{n} y \, \vec{e} \ \in$, es una forma bilineal, como puede comprobarse fácilmente.

EJEMPLO B. En un espacio euclídeo con producto escalar (,) la aplicación : × → $\mathbb{K}$ dada por

$$(\vec{}, \vec{y}) = (\vec{}, \vec{y}),$$

es una forma bilineal, ya que el producto escalar es lineal en las variables $\vec{}$ e $\vec{y}$. De forma más general, si $\mathcal{A}$ es una aplicación lineal de en , la aplicación

$$(\vec{}, \vec{y}) = (\vec{}, \mathcal{A}\vec{y})$$

es una forma bilineal.

* * *

Sea una forma bilineal en un espacio vectorial y sea $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ una base de ; si $\vec{} = \sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{e}_i \in$ e $\vec{y} = \sum_{=1}^{n} y \, \vec{e} \ \in$, de la definición de forma bilineal se deduce que

$$(\vec{}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{e}_i, \sum_{=1}^{n} y \, \vec{e} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n} \ _i y \quad (\vec{e}_i, \vec{e} \,).$$

Los escalares $a_i = \ (\vec{e}_i, \vec{e} \,)$ forman una matriz cuadrada

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

que recibe el nombre de *matri e la orma bilineal en la ba e* $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

Nos preguntamos ahora cómo varía la matriz de una forma bilineal al cambiar de base. Sea $= (a_i)_{i, \ = 1, ..., n}$ la matriz de una forma bilineal con respecto a la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ y $= (b_i)_{i, \ = 1, ..., n}$ la matriz de respecto de la base $\{\vec{}_1, ..., \vec{}_n\}$; si $= (\ _i)_{i, \ = 1, ..., n}$ es la matriz del cambio de base de la antigua a la nueva, es decir:

$$\vec{}_i = \ _{1i}\vec{e}_1 + \cdots + \ _{ni}\vec{e}_n,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} b_i \ = \ (\vec{}_i, \vec{}) &= (\ _{1i}\vec{e}_1 + \cdots + \ _{ni}\vec{e}_n, \ _1\vec{e}_1 + \cdots + \ _n\vec{e}_n) \\ &= \sum_{,l=1}^{n} \ _i \ _l \ (\vec{e} \ , \vec{e}_l) = \sum_{,l=1}^{n} \ _i a \ _l \ _l = \sum_{=1}^{n} \ _i \left(\sum_{l=1}^{n} a \ _l \ _l \right). \end{aligned}$$

La expresión $\sum_{l=1}^{n} a \ _l \ _l$ es el término que ocupa el lugar (,) de la matriz y, por tanto, la última expresión de la derecha es el término que ocupa el lugar (i,) de la matriz $^t(\ \ )$. Por tanto,

$$= \ ^t \ ,$$

que es la expresión del *ambio e ba e* buscada.

Puesto que es una matriz no singular, es decir, $| \ | \neq 0$, el rango de la matriz coincide con el rango de la matriz ; a este rango se le denomina el *rango e la orma bilineal* y queda probado, por tanto, que el rango de una forma bilineal no depende de la base elegida para representar su matriz.

* * *

Definición 12.1.2 (orma bilineal simétrica)

Una forma bilineal en un espacio vectorial se dice *im tri a* si $(\vec{}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{})$ para todo $\vec{}, \vec{y} \in$.

Si es una forma bilineal simétrica, $(\vec{e}_i, \vec{e}\,) = (\vec{e}\,, \vec{e}_i)$ y, por tanto, la matriz de en cualquier base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una matriz simétrica. Recíprocamente, si la matriz de una forma bilineal es simétrica en alguna base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, la forma bilineal es simétrica ya que

$$(\vec{y}, \vec{}) = \sum_{i,\ =1}^{n} a_i y_i \ = \sum_{i,\ =1}^{n} a_{\ i} \ y_i = \ (\vec{}, \vec{y}).$$

Definición 12.1.3 (orma bilineal antisimétrica)

Una forma bilineal en un espacio vectorial se dice *anti im tri a* si $(\vec{}, \vec{y}) = - \ (\vec{y}, \vec{})$ para todo $\vec{}, \vec{y} \in$.

Si es una forma bilineal antisimétrica, $(\vec{e}_i, \vec{e}\,) = - \ (\vec{e}\,, \vec{e}_i)$ y, por tanto, la matriz de en cualquier base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ satisface $a_i \ = -a_{\ i}$; en particular $a_{ii} = -a_{ii}$, $i = 1, ..., n$ y, por tanto, los elementos de la diagonal de la matriz de una forma bilineal antisimétrica deben ser nulos. Por tanto, la matriz de se escribe de la forma

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Las formas bilineales simétricas junto con las antisimétricas originan todas las formas bilineales posibles; el resultado se describe en la siguiente proposición:

Proposición 12.1.4

Toda forma bilineal puede ser representada como la suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

Demostración. Sea $(\vec{}, \vec{y})$ la forma bilineal; tomar $(\vec{}, \vec{y}) = (\vec{}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{})$ y $(\vec{}, \vec{y}) = (\vec{}, \vec{y}) - (\vec{y}, \vec{})$. Sumando ambas expresiones se tiene que

$$(\vec{}, \vec{y}) + \ (\vec{}, \vec{y}) = 2 \ (\vec{}, \vec{y})$$

y, por tanto,

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \frac{1}{2} \quad (\vec{\ }, \vec{y}) + \frac{1}{2} \quad (\vec{\ }, \vec{y}).$$

La demostración se concluye observando que es una forma bilineal simétrica y es una forma bilineal antisimétrica. ■

* * *

Una *orma a r ti a* en un espacio vectorial es toda aplicación $(\vec{\ }, \vec{\ })$ de en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) que se obtiene sustituyendo $\vec{y}$ por $\vec{\ }$ en una forma bilineal $(\vec{\ }, \vec{y})$ sobre .

EJEMPLO C. La expresión $a_{11}\ {}^{2}_{1} + a_{12}\ {}_{1}\ {}_{2} + a_{22}\ {}^{2}_{2}$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ ($a_i \in \mathbb{R}$) ya que si tomamos la forma bilineal

$$\left(\begin{pmatrix} {}_{1} \\ {}_{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = a_{11}\ {}_{1}y_1 + \frac{1}{2} a_{12}\ {}_{1}y_2 + \frac{1}{2} a_{12}\ {}_{2}y_1 + a_{22}\ {}_{2}y_2 \tag{1.4}$$

se tiene que

$$\left(\begin{pmatrix} {}_{1} \\ {}_{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}_{1} \\ {}_{2} \end{pmatrix}\right) = a_{11}\ {}^{2}_{1} + a_{12}\ {}_{1}\ {}_{2} + a_{22}\ {}^{2}_{2}.$$

EJEMPLO D. La expresión $a_{11}\ {}^{2}_{1} + a_{22}\ {}^{2}_{2} + a_{33}\ {}^{2}_{3} + a_{12}\ {}_{1}\ {}_{2} + a_{13}\ {}_{1}\ {}_{3} + a_{23}\ {}_{2}\ {}_{3}$ es una forma cuadrática en $\mathbb{C}^3$ ($a_i \in \mathbb{C}$) ya que basta tomar

$$\left(\begin{pmatrix} {}_{1} \\ {}_{2} \\ {}_{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = a_{11}\ {}_{1}y_1 + a_{22}\ {}_{2}y_2 + a_{33}\ {}_{3}y_3 + \frac{1}{2} a_{12}\ {}_{1}y_2 + \frac{1}{2} a_{12}\ {}_{2}y_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} a_{13}\ {}_{1}y_3 + \frac{1}{2} a_{13}\ {}_{3}y_1 + \frac{1}{2} a_{23}\ {}_{2}y_3 + \frac{1}{2} a_{23}\ {}_{3}y_2,$$

para obtener $\left(\begin{pmatrix} {}_{1} \\ {}_{2} \\ {}_{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}_{1} \\ {}_{2} \\ {}_{3} \end{pmatrix}\right) = a_{11}\ {}^{2}_{1} + a_{22}\ {}^{2}_{2} + a_{33}\ {}^{2}_{3} + a_{12}\ {}_{1}\ {}_{2} + a_{13}\ {}_{1}\ {}_{3} + a_{23}\ {}_{2}\ {}_{3}.$

* * *

En general *to a e re i n e la orma* $\sum_{=1}^{n} \sum_{i\leqslant} a_{i\ \ i}$ *en n e a io ve torial e ine na orma a r ti a* ya que basta tomar la forma bilineal

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ {}_{i}y_i + \sum_{=1}^{n} \sum_{i<} \frac{a_i}{2}\ {}_{i}y + \sum_{=1}^{n} \sum_{i<} \frac{a_i}{2} \quad y_i, \tag{1.5}$$

donde $\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n} {}_{i}\vec{e}_i, \vec{y} = \sum_{=1}^{n} y\ \vec{e}$, para obtener que

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \sum_{=1}^{n} \sum_{i\leqslant} a_{i\ \ i} \quad .$$

Recíprocamente, *to a orma a r ti a tiene na e re i n e la orma* $\sum_{=1}^{n}\sum_{i\leqslant} b_{i\ i}$ *en na ierta ba e*. En efecto, si $(\vec{\ },\vec{\ })$ proviene de la forma bilineal $(\vec{\ },\vec{y})$ de matriz $=(a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ en la base $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ se tiene que

$$(\vec{\ },\vec{\ })=\sum_{i=1}^{n}\sum_{=1}^{n} a_{i\ \ i}\quad ,\quad \vec{\ }=\sum_{i=1}^{n}{}_i\vec{e}_i\,.$$

Agrupando los términos $_i$ y $_i$ se tiene que

$$(\vec{\ },\vec{\ })=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\leqslant}(a_i+a_{\ i})\ _i\ =\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\leqslant} b_{i\ \ i}\quad ,$$

que era lo que queríamos demostrar.

Toda forma bilineal determina una forma cuadrática (lo cual se deduce de la misma definición), pero una forma cuadrática puede ser determinada por varias formas bilineales. En efecto, la forma bilineal

$${}_1\left(\begin{pmatrix}{}_1\\{}_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=a_{11}\ {}_1y_1+\frac{1}{3}a_{12}\ {}_1y_2+\frac{2}{3}a_{12}\ {}_2y_1+a_{22}\ {}_2y_2$$

determina la forma cuadrática del ejemplo C, pero es diferente, en general, de la forma bilineal dada en (1.4).

Sin embargo, *i e one e la orma bilineal e genera la orma a r ti a e im tri a, la orma bilineal e a nívo amente etermina a*. Para probar este resultado observar que

$$(\vec{\ }+\vec{y},\vec{\ }+\vec{y})=\ (\vec{\ },\vec{\ })+\ (\vec{\ },\vec{y})+\ (\vec{y},\vec{\ })+\ (\vec{y},\vec{y})$$

por la definición de forma bilineal; si es simétrica tenemos

$$(\vec{\ },\vec{y})=\frac{1}{2}[\ (\vec{\ },\vec{y})+\ (\vec{y},\vec{\ })]=\frac{1}{2}[\ (\vec{\ }+\vec{y},\vec{\ }+\vec{y})-\ (\vec{\ },\vec{\ })-\ (\vec{y},\vec{y})],\qquad(1.6)$$

que prueba el resultado deseado.

Se denomina *matri e na orma a r ti a* en una base $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ a la matriz de la forma bilineal simétrica que la determina en la misma base $\{e_1,\ldots,\vec{e}_n\}$. Como la forma bilineal dada en (1.5) es simétrica y determina la forma cuadrática

$$(\vec{\ },\vec{\ })=\sum_{=1}^{n}\sum_{i\leqslant} a_{i\ \ i}\quad ,$$

deducimos del resultado sobre unicidad anteriormente demostrado que la matriz de la forma cuadrática $(\vec{\ },\vec{\ })$ en la base $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ es

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & \cdots & a_{1n}/2\\ a_{12}/2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}/2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n}/2 & a_{2n}/2 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

12.2. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS EN UN ESPACIO EUCLÍDEO

Hemos visto en el ejemplo B de la sección anterior que si $\mathcal{A}:\ \ \rightarrow\ \ $ es una aplicación lineal en un espacio euclídeo, la aplicación $:\ \ \times\ \ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{\ }, \mathcal{A}\vec{y})$$

es una forma bilineal. De hecho, todas las formas bilineales en un espacio euclídeo se obtienen así, como se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 12.2.1

Sea $:\ \ \times\ \ \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal en un espacio euclídeo con producto escalar $(\ ,\ )$. Existe una aplicación lineal $\mathcal{A}:\ \ \rightarrow\ \ $ tal que $(\vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{\ }, \mathcal{A}\vec{y})$. Además, las matrices de y $\mathcal{A}$ en una misma base ortonormal coinciden.

Demostración. Si $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ es la matriz de la forma bilineal en una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, podemos escribir

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n} a_i\ \ {}_i y \quad , \quad \vec{\ } = \sum_{i=1}^{n}\ \ {}_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{y} = \sum_{=1}^{n} y\ \vec{e}\ .$$

Sea $\mathcal{A}$ la aplicación lineal de en que tiene como matriz en la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, es decir, $\mathcal{A}(\vec{e}\ ) = a_1\ \vec{e}_1 + \cdots + a_n\ \vec{e}_n$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(\vec{\ }, \mathcal{A}(\vec{y})) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\ \ {}_i \vec{e}_i \quad , \quad \mathcal{A}\left(\sum_{=1}^{n} y\ \vec{e}\ \right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n}\ \ {}_i y\ (\vec{e}_i, \mathcal{A}(\vec{e}\ )) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n}\ \ {}_i y\ (\vec{e}_i, a_1\ \vec{e}_1 + \cdots + a_i\ \vec{e}_i + \cdots + a_n\ \vec{e}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n}\ \ {}_i y\ a_i\ ,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base ortonormal. Por tanto, $(\vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{\ }, \mathcal{A}(\vec{y}))$, que era lo que queríamos probar. ■

Teorema 12.2.2 (Reducci n de una forma cuadrática en un espacio eucl deo a su forma can nica)

Dada una forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$ en un espacio euclídeo existen números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y una base ortonormal $\{\vec{\ }_1, \ldots, \vec{\ }_n\}$ de tal que para todo

$$\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n}\ \ {}_i\ \vec{\ }_i \in$$

se tiene que

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \lambda_1\ {}^2_1 + \lambda_2\ {}^2_2 + \cdots + \lambda_n\ {}^2_n .$$

Demostración. Según sabemos de la sección 12.1 $(\vec{\ }, \vec{\ })$ determina unívocamente una forma bilineal simétrica $(\vec{\ }, \vec{y})$; por la Proposición 12.2.1, $(\vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{\ }, \mathcal{A}(\vec{y}))$, donde $\mathcal{A}$ es una aplicación lineal que tiene la misma matriz que $(\vec{\ }, \vec{y})$ en una base ortonormal; por tanto, la matriz de $\mathcal{A}$ es simétrica en esta base. Por el Teorema 8.4.8, sabemos que toda matriz simétrica es diagonalizable en una base ortonormal y, por tanto, existe una base ortonormal $\{\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }_n\}$ tal que

$$\mathcal{A}(\vec{\ }) = \mathcal{A}\left(\sum_{=1}^{n} \vec{\ } \right) = \sum_{=1}^{n} \mathcal{A}(\vec{\ }) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \vec{\ }$$

donde λ , $= 1, ..., n$, son los autovalores de $\mathcal{A}$. Por tanto,

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = (\vec{\ }, \mathcal{A}(\vec{\ })) = \left(\sum_{i=1}^{n} {}_i \vec{\ }_i , \sum_{=1}^{n} \lambda \vec{\ } \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{=1}^{n} {}_i \lambda (\vec{\ }_i, \vec{\ }) = \sum_{i=1}^{n} {}_i^2 \lambda_i = \lambda_1 {}_1^2 + \cdots + \lambda_n {}_n^2 . \qquad \blacksquare$$

Observación. Los números λ son los autovalores de la matriz de $(\vec{\ }, \vec{\ })$ y los $\vec{\ }$ son autovectores correspondientes a λ .

Supongamos que una forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$ puede escribirse de la forma

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \sum_{=1}^{n} a \ {}^2 = a_1 {}_1^2 + \cdots + a_n {}_n^2 \tag{2.1}$$

en una cierta base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial en que está definida, donde $a \in \mathbb{K}$, $= 1, 2, ..., n$. La expresión (2.1) recibe el nombre de *forma canónica* de la forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$.

En el Teorema 12.2.2 que acabamos de demostrar se prueba que si una forma cuadrática está definida en un espacio euclídeo, puede reducirse a su forma canónica en una base ortonormal. Realizamos a continuación algunos ejemplos.

EJEMPLO A. *Escribir la forma cuadrática* $(\vec{\ }, \vec{\ }) = {}_1^2 + {}_2^2 + {}_3^2 - 4 {}_1 {}_3$ *a una forma canónica (en* $\mathbb{R}^3$*) mediante una base ortonormal.*

La matriz de $(\vec{\ }, \vec{\ })$ es

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

sus autovalores son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Por tanto

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = {}_1^2 - {}_2^2 + 3 {}_3^2$$

en una base $\{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3\}$ ortonormal formada por autovectores, donde $\vec{\ } = \vec{\ }_1 \vec{\ }_1 + {}_2 \vec{\ }_2 + {}_3 \vec{\ }_3$.

* * *

La forma de reducir una forma cuadrática a una expresión del tipo $a_1 {}_1^2 + \cdots + a_n {}_n^2$ no es única si se permite realizar cambios de base que no sean ortonormales. Como ilustración tomar el ejemplo A; completando cuadrados con los términos ${}_1^2 - 4 {}_1 {}_3$ se tiene

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = ({}_1 - 2 {}_3)^2 + {}_2^2 - 3 {}_3^2$$

y, por tanto, el cambio de base $y_1 = {}_1 - 2\ {}_3$, $y_2 = {}_2$, $y_3 = {}_3$ reduce la forma cuadrática del ejemplo A a

$$y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2.$$

Observar que este cambio de base no transforma una base ortonormal en otra base ortonormal.

EJEMPLO B. *e ir la orma a r ti a a a or* $2\ y - 2$ *on re e to a na ba e ortonormal e* $\mathbb{R}^3$ *a na orma an ni a.*

Escribiendo $= {}_1 + y_1, y = {}_1 - y_1, = {}_1$, lo cual es un cambio de base ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

tenemos

$$2\ y - 2 \quad = 2({}_1 + y_1)({}_1 - y_1) - 2({}_1 + y_1)\ {}_1 = 2\ {}_1^2 - 2y_1^2 - 2\ {}_1\ {}_1 - 2y_1\ {}_1.$$

Completando cuadrados se tiene

$$2\ y - 2 \quad = 2\left({}_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{1}{2}\right)^2,$$

con lo cual el cambio de coordenadas ${}_2 = {}_1 - \frac{1}{2}, y_2 = y_1 + \frac{1}{2}, {}_2 = {}_1$ nos permite escribir

$$= 2\ {}_2^2 - 2y_2^2.$$

Si deseamos obtener de una suma de cuadrados mediante un cambio de base ortogonal no tenemos más que calcular los autovalores de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$; por tanto

$$= \sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}\ {}^2$$

en la base ortonormal $\{{}^{\rightarrow}_1, {}^{\rightarrow}_2, {}^{\rightarrow}_3\}$ formada por autovectores de . Estos autovectores pueden ser

$${}^{\rightarrow}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), {}^{\rightarrow}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, -1), {}^{\rightarrow}_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1).$$

Observación. En los ejemplos anteriores se han utilizado dos métodos para reducir una forma cuadrática a una forma canónica; uno de ellos está basado en el cálculo de autovalores de la matriz de ; sobre el otro observamos que se basa en los siguientes hechos:

a) Completar cuadrados si es posible (ver ejemplo A).
b) Si no existen cuadrados que se puedan completar (ver ejemplo B) es necesario hacer un cambio de la forma $y = \quad + \quad , y = \quad - \quad$ para introducirlos, y a continuación completar cuadrados.

12.3. LEY DE INERCIA DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

En la sección 12.2 hemos visto que toda forma cuadrática en un espacio euclídeo de dimensión finita puede escribirse de la forma

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = a_1 \ ^2_1 + \cdots + a_n \ ^2_n \tag{3.1}$$

en una cierta base, donde $a \in \mathbb{R}, \quad = 1, 2, ..., n$; la expresión (3.1) recibe el nombre de *orma an ni a e la orma a r ti a* dada.

La forma canónica de una forma cuadrática no es única, puesto que depende de la forma de obtenerla, según se ha observado en la sección 12.2. Sin embargo, el número de términos positivos a que aparece en (3.1) y el número de términos negativos de la misma expresión permanecen invariantes para una misma forma cuadrática. Este hecho puede observarse en los ejemplos de la sección anterior. El enunciado preciso y la demostración de este resultado se exponen a continuación.

Teorema 12.3.1 (e de inercia de las formas cuadráticas)

Sea $(\vec{\ }, \vec{\ })$ una forma cuadrática en un espacio euclídeo de dimensión n. Si $(\vec{\ }, \vec{\ })$ se escribe de la forma

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = a_1 \ ^2_1 + a_2 \ ^2_2 + \cdots + a_m \ ^2_m \tag{3.2}$$

en la base $= \{\vec{\ }_1, ..., \vec{\ }_n\}$, con $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad = 1, 2, ..., m$, y también se escribe de la forma

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_r y_r^2 \tag{3.3}$$

en la base $G = \{\vec{g}_1, ..., \vec{g}_n\}$, con $b \neq 0, b \in \mathbb{R}, \quad = 1, 2, ..., r$, se tiene que $m = r =$ rango( ) y el número de coeficientes positivos y negativos de (3.2) y (3.3) coinciden.

Demostración. Escribamos, más explícitamente,

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \alpha_1 \ ^2_1 + \cdots + \alpha \ ^2 - \alpha \ _{+1} \ ^2_{+1} - \cdots - \alpha_m \ ^2_m \tag{3.4}$$

en la base , con $\alpha > 0, \quad = 1, 2, ..., m$, y

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \beta_1 y_1^2 + \cdots + \beta \ y^2 - \beta \ _{+1} y^2_{+1} - \cdots - \beta_r y_r^2 \tag{3.5}$$

en la base G, con $\beta > 0, \quad = 1, 2, ..., r$. Hemos de demostrar que $\quad =$ y $m = r$.

Sea $_1$ el subespacio vectorial de generado por los vectores $\vec{}_1, \vec{}_2, ..., \vec{}$ y $_2$ el subespacio vectorial de generado por los vectores $\vec{g}_{+1}, ..., \vec{g}_n$. Si suponemos que > se tiene que

$$\dim(\ _1) + \dim(\ _2) = \ + (n - \ ) > n = \dim(\ ).$$

Puesto que $\dim(\ _1) + \dim(\ _2) = \dim(\ _1 + \ _2) + \dim(\ _1 \cap \ _2)$ (Proposición 4.4.2) hemos de tener $_1 \cap \ _2 \neq \{\vec{0}\}$.

Sea $\vec{} \in \ _1 \cap \ _2$ y $\vec{} \neq \vec{0}$; puesto que $\vec{} \in \ _1 \cap \ _2$ podemos escribir

$$\vec{} = a_1\vec{}_1 + \cdots + a\vec{} \quad , \quad a \in \mathbb{R}, \quad = 1, ..., \ ,$$

y también

$$\vec{} = b_{+1}\vec{g}_{+1} + \cdots + b_n\vec{g}_n \quad , \quad b \in \mathbb{R}, \quad = \ + 1, ..., n.$$

Para el vector $\vec{}$ las expresiones (3.4) y (3.5) producen

$$(\vec{}, \vec{}) = \alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha\ a^2 > 0$$

ya que alguno de los a debe ser no nulo, y

$$(\vec{}, \vec{}) = -\beta_{+1}b^2_{+1} - \cdots - \beta_r b_r^2 \leqslant 0$$

(observar que la última expresión puede ser cero ya que r puede ser menor que n).

En cualquier caso se llega a una contradición, que se ha producido por el hecho de suponer que > ; por tanto, ⩽ .

Puesto que el papel que juegan las expresiones (3.4) y (3.5) en el razonamiento anterior es simétrico, se deduce, de manera similar, la desigualdad ⩽ , con lo cual se tiene = .

La igualdad $m = r =$ rango( ) se debe a que el rango de una forma cuadrática es invariante mediante cambios de base. ■

El número de términos positivos que aparecen en una forma canónica de una forma cuadrática $(\vec{}, \vec{})$ se llama *índice de inercia positivo* de la forma cuadrática y el número de términos negativos, , recibe el nombre de *índice de inercia negativo*. La *signatura* de es el número $|\ - \ |$. Observar que + = rango( ).

EJEMPLO A. Tratemos de encontrar los índices de inercia de la forma cuadrática dada por

$$(\vec{}, \vec{}) = \ _1\ _2 + \ _1\ _3 + \ _1\ _4 + \ _2\ _3 + \ _2\ _4 + \ _3\ _4.$$

El cambio de variable $_1 = y_1 + y_2$, $_2 = y_1 - y_2$, $_3 = y_3 + y_4$, $_4 = y_3 - y_4$ (¡comprobar que es un cambio de base!) transforma la expresión anterior en

$$y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) + (y_1 + y_2)(y_3 - y_4) + (y_1 - y_2)(y_3 + y_4) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) +$$
$$+ y_3^2 - y_4^2 = y_1^2 - y_2^2 + 4y_1y_3 + y_3^2 - y_4^2 = (y_1 + 2y_3)^2 - y_2^2 - 3y_3^2 - y_4^2.$$

Escribiendo $_1 = y_1 + 2y_3$, $_2 = y_2$, $_3 = y_3$, $_4 = y_4$, que es de nuevo un cambio de base, se tiene:

$$= \ ^2_1 - \ ^2_2 - 3\ ^2_3 - \ ^2_4.$$

Por tanto, el índice de inercia positivo de es 1 y su índice de inercia negativo es 3. Su signatura es 2.

* * *

Si una forma canónica de la forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$ es

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = a_1 \ {}^2_1 + \cdots + a \ {}^2 - a \ {}_{+1} \ {}^2_{+1} - \cdots - a_r \ {}^2_r$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $= 1, 2, ..., r$, el cambio de base dado por

$$y_1 = \sqrt{a_1} \ {}_1, ..., y \ = \sqrt{a} \ \ , y \ {}_{+1} = \sqrt{a \ {}_{+1}} \ \ {}_{+1}, ..., y_r = \sqrt{a_r} \ {}_r, y_{r+1} = \ {}_{r+1}, ..., y_n = \ {}_n$$

nos permite escribir

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = y_1^2 + \cdots + y^2 - y^2_{+1} - \cdots - y_r^2,$$

que recibe el nombre de *orma normal* de la forma cuadrática dada. Observar que la forma normal de una forma cuadrática es una suma de cuadrados con coeficientes 1 ó -1.

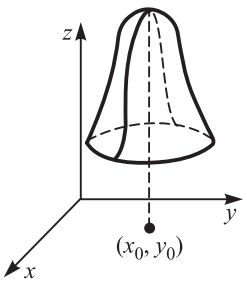
12.4. FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS. PUNTOS CRÍTICOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

La teoría de las formas cuadráticas será de gran ayuda para el estudio de las superficies de segundo grado; sin embargo, también posee otras aplicaciones, entre las que se cuentan la determinación de puntos críticos de funciones de varias variables, que resulta útil para resolver problemas de optimización.

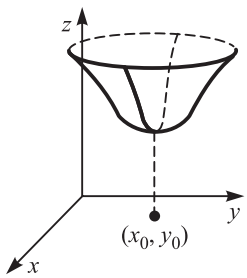
Para facilitar el razonamiento utilizaremos una función de dos variables $= (, y)$, que representa una superficie en $\mathbb{R}^3$. Recordamos al lector que una función suficientemente regular, posee un *nto ríti o* en $(_0, y_0)$ si y solo si

$$\frac{\partial}{\partial} (_0, y_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} (_0, y_0) = 0. \tag{4.1}$$

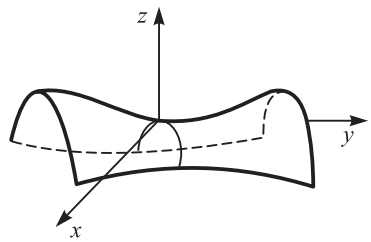
Ejemplos conocidos de puntos críticos son los *m imo relativo* , *lo mínimo relativo* y *lo nto e illa*, que se muestran geométricamente en los dibujos siguientes:



Máximo relativo



Mínimo relativo



Punto de silla

Deseamos encontrar una condición que nos permita decidir entre todos los casos posibles de puntos críticos. Para ello escribimos la fórmula de Taylor de alrededor del punto $(_0, y_0)$ hasta el término de orden 2 —estamos suponiendo que es lo suficientemente regular para que esto sea posible—:

$$(, y) = \ (_0, y_0) + \left[\frac{\partial}{\partial}(_0, y_0)(\ - \ _0) + \frac{\partial}{\partial y}(_0, y_0)(y - y_0)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial^{\ 2}}(_0, y_0)(\ - \ _0)^2 + 2\,\frac{\partial^2}{\partial\ \partial y}(_0, y_0)(\ - \ _0)(y - y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(_0, y_0)(y - y_0)^2\right] +$$

$$+ \ _3(, y)$$

donde $_3(, y)$ es el término de error. Si $(_0, y_0)$ es un punto crítico de la fórmula anterior puede escribirse de la forma

$$(, y) - \ (_0, y_0) = \frac{1}{2!} \ (, \ ) + \ _3(, y), \tag{4.2}$$

donde

$$(, \ ) = \ \left(\begin{pmatrix} - \ _0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \ _0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial^2}{\partial^{\ 2}}(_0, y_0)(\ - \ _0)^2 +$$

$$+ 2\,\frac{\partial^2}{\partial\ \partial y}(_0, y_0)(\ - \ _0)(y - y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(_0, y_0)(y - y_0)^2$$

es una forma cuadrática que posee como matriz

$$= \ (_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial^{\ 2}}(_0, \ y_0) & \dfrac{\partial^2}{\partial\ \partial y}(_0, \ y_0) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\ \partial y}(_0, \ y_0) & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(_0, \ y_0) \end{pmatrix},$$

que se denomina *la matri e iana* de en el punto $(_0, y_0)$.

La función posee un *m imo relativo* en $(_0, y_0)$ si y solo si $(, y) - \ (_0, y_0) \leqslant 0$ para todo $(, y)$ en un entorno de $(_0, y_0)$; de la igualdad (4.2) puede deducirse que si $(, \ ) < 0$, para todo no nulo, $(_0, y_0)$ es un máximo, ya que $_3(, y)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera reduciendo el entorno alrededor de $(_0, y_0)$. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 12.4.1

Una forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$ se llama *e ini a negativa* si $(\vec{\ }, \vec{\ }) < 0$ para todo $\vec{\ } \neq \vec{0}$. Si $(\vec{\ }, \vec{\ }) \leqslant 0$ para todo $\vec{\ }$, se dice *emi e ini a negativa*.

Si posee un *mínimo relativo* en $(_0, y_0)$ se ha de tener $(, y) - \ (_0, y_0) \geqslant 0$ para todo $(, y)$ en un entorno de $(_0, y_0)$; esto puede conseguirse en la igualdad (4.2) si se tiene $(, \ ) > 0$ para todo no nulo. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 12.4.2

Una forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$ se llama *e ini a o itiva* si $(\vec{\ }, \vec{\ }) > 0$ para todo $\vec{\ } \neq \vec{0}$. Si $(\vec{\ }, \vec{\ }) \geqslant 0$ para todo $\vec{\ }$, se dice *emi e ini a o itiva*.

Estos resultados quedan resumidos en el siguiente teorema:

Teorema 12.4.3 (Condici n suficiente para la e istencia de má imos m nimos)

Sea $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función suficientemente regular que posee un punto crítico en $(_0, y_0)$ y sea la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ que tiene a

$$= \begin{pmatrix} \partial^2 /\partial ^2 & \partial^2 /\partial \partial y \\ \partial^2 /\partial \partial y & \partial^2 /\partial y^2 \end{pmatrix}(_0, y_0)$$

como matriz. Entonces,

a) Si es *e ini a negativa*, posee un *m imo* relativo en $(_0, y_0)$.
b) Si es *e ini a o itiva*, posee un *mínimo* relativo en $(_0, y_0)$.

Notas

1) En libros de cálculo se demuestra que si no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa $(_0, y_0)$ es un *nto e illa* de .

2) Un criterio análogo al contenido en el Teorema 12.4.3 se tiene para funciones de n variables.

Observaciones

1) Si $(\bar{}, \bar{}) = (\bar{}, \bar{})$, donde $(,)$ representa el producto escalar en un espacio euclídeo , es una forma cuadrática definida positiva, ya que $(\bar{}, \bar{}) > 0$ para todo $\bar{} \neq \bar{0}$.

2) Si una forma cuadrática $(\bar{}, \bar{})$ se escribe de la forma $(\bar{}, \bar{}) = a_1 \, {}^2_1 + \cdots + a_n \, {}^2_n$ en una cierta base, es definida positiva si y solo si todos los a son positivos y es definida negativa si y solo si todos los a son negativos.

Para poder aplicar el Teorema 12.4.3 es necesario poseer un criterio fácilmente aplicable que permita determinar si es definida positiva o es definida negativa; una posibilidad es hallar una forma canónica de y aplicar la observación 2); otra la proporcionan los criterios de Sylvester que exponemos a continuación.

Proposición 12.4.4 (Criterio de l ester para formas definidas positi as)

Sea $(\bar{}, \bar{})$ una forma cuadrática en un espacio euclídeo de dimensión n con matriz $= (a_i)_{i, \ = 1, \ldots, n}$ en una cierta base. Si los menores principales de la matriz son positivos, es decir:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \Delta_n = | \ | > 0,$$

la forma cuadrática $(\bar{}, \bar{})$ es definida positiva.

Demostración. Realizamos la demostración por inducción en la dimensión del espacio euclídeo . Si tiene dimensión uno, la forma cuadrática puede escribirse de la forma $(\bar{}, \bar{}) = a_{11} \, {}^2$ con $a_{11} > 0$ y, por tanto, la proposición queda demostrada. Supongamos ahora que el resultado es cierto para cualquier forma cuadrática con todos sus menores principales

positivos en todo espacio euclídeo de dimensión inferior a m y sea $(\vec{\ },\vec{\ })$ una forma cuadrática en un espacio euclídeo de dimensión m con todos sus menores principales positivos. Por ser los $m-1$ primeros menores principales positivos, la hipótesis de inducción nos permite deducir que la forma cuadrática

$$(\vec{\ }',\vec{\ }') = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{=1}^{m-1} a_{i\ \ i}$$

en el espacio euclídeo $'$ generado por los $m-1$ primeros vectores de una base de , es definida positiva. Con un cambio de base adecuado en $'$, $(\vec{\ }',\vec{\ }')$ puede escribirse en forma canónica (Teorema 12.2.2) con coeficientes positivos:

$$(\vec{\ }',\vec{\ }') = \lambda_1\ {}'^2_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\ {}'^2_{m-1}, \quad (\lambda\ > 0).$$

Realizando este cambio de base en $'$ y $'_m = \ _m$ la forma cuadrática $(\vec{\ },\vec{\ })$ se transforma en

$$(\vec{\ },\vec{\ }) = \lambda_1\ {}'^2_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\ {}'^2_{m-1} + (b_{1m}\ {}'_1\ {}'_m + \cdots + b_{m-1,m}\ {}'_{m-1}\ {}'_m) + a_{mm}\ {}'^2_m\,.$$

Completando cuadrados se obtiene:

$$(\vec{\ },\vec{\ }) = \lambda_1\left(\ {}'_1 + \frac{b_{1m}}{2\lambda_1}\ {}'_m\right)^2 + \cdots + \lambda_{m-1}\left(\ {}'_{m-1} + \frac{b_{m-1,m}}{2\lambda_{m-1}}\ {}'_m\right)^2 + b\ {}'^2_m\,,$$

donde

$$b = a_{mm} - \frac{b_{1m}^2}{4\lambda_1^2} - \cdots - \frac{b_{m-1,m}^2}{4\lambda_{m-1}^2}.$$

Realizando el cambio de base:

$$y_1 = \ {}'_1 + \frac{b_{1m}}{2\lambda_1}\ {}'_m,\ ...,\ y_{m-1} = \ {}'_{m-1} + \frac{b_{m-1,m}}{2\lambda_{m-1}}\ {}'_m, \quad y_m = \ {}'_m$$

(observar que el determinante de esta transformación es 1) tenemos

$$(\vec{\ },\vec{\ }) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{m-1} y_{m-1}^2 + b y_m^2\,.$$

Puesto que todos los λ son positivos solo falta demostrar que $b > 0$; para esto observar que si es la matriz del cambio de base de las coordenadas a las y se tiene:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{m-1} & \\ 0 & & & b \end{pmatrix} = \ {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

como se vio en la sección 12.1, y, por tanto, $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{m-1} \cdot b = |\ \ {}^t|\Delta_m|\ \ | = |\ \ |^2\ \Delta_m > 0$, de donde se deduce que $b > 0$. ■

* * *

EJEMPLO A. *emo trar e la orma a r ti a en* $\mathbb{R}^3$

$$= 2\ ^2 - 2\ y + y^2 + 4\quad - 6y\ + 11\ ^2$$

e e ini a o itiva.

La matriz de es

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$\Delta_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = |\ \ | = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

la forma cuadrática dada es definida positiva.

* * *

El recíproco de la proposición anterior también es cierto.

Proposición 12.4.5

En las mismas condiciones que en la Proposición 12.4.4, si $(\bar{\ }, \bar{\ })$ es una forma cuadrática definida positiva, todos los menores principales de la matriz $= (a_i)$ son positivos.

Demostración. Sea $(\bar{\ }, \bar{\ }) = \sum_{i,\ =1}^{m} a_{i\ \ i}$ la expresión de la forma cuadrática , definida positiva, en una base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ de . Para todo $1 \leqslant \ \leqslant n$ la forma cuadrática

$$(\bar{\ }, \bar{\ }) = \sum_{i,\ =1} a_{i\ \ i}$$

definida en el subespacio vectorial $= L\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}\ \}$ de , es definida positiva. Un cambio de base adecuado, de matriz , reduce a

$$(\vec{y}, \vec{y}) = a_1 y_1^2 + \cdots + a\ y^2 \quad , \quad (a\ > 0)$$

y se tiene

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} = \ ^t\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \cdots & a \end{pmatrix} \ ;$$

por tanto,

$$0 < a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = |\ \ ^t|\Delta\ |\ \ | = |\ \ |^2 \Delta\ ,$$

de donde se deduce que $\Delta\ > 0$, que era lo que queríamos demostrar. ■

Para formas cuadráticas definidas negativas el criterio de Sylvester puede deducirse de las proposiciones que acabamos de demostrar. Si $(\vec{\ },\vec{\ })$ es definida negativa, $\tilde{}(\vec{\ },\vec{\ }) = -\ (\vec{\ },\vec{\ })$ es definida positiva; si $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ es la matriz de $(\vec{\ },\vec{\ })$, $\tilde{} = (-a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ es la matriz de $\tilde{}(\vec{\ },\vec{\ })$ (en la misma base) y, por tanto,

$$\tilde{\Delta}_1 = -a_{11} > 0 \quad ; \quad \tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad \tilde{\Delta}_n = |\ \tilde{}\ | > 0.$$

Puesto que

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_1 \\ -a_{12} & -a_{22} & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a \end{vmatrix} = (-1)\,\Delta$$

se tiene el siguiente resultado:

Proposición 12.4.6 (Criterio de l ester para formas cuadráticas definidas negati as)

Sea $(\vec{\ },\vec{\ })$ una forma cuadrática en un espacio euclídeo de dimensión n con matriz $= (a_i)_{i,\ =1,\ldots,n}$ en una cierta base. $(\vec{\ },\vec{\ })$ es definida negativa si y solo si los menores principales de la matriz se alternan en signo y $a_{11} < 0$.

Nota. La demostración que se ha dado de los criterios de Sylvester es válida para espacios euclídeos puesto que se ha utilizado el teorema de reducción a su forma canónica (Teorema 12.2.2). Sin embargo, puede demostrarse que los criterios siguen siendo válidos para formas cuadráticas definidas en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, sin necesidad de un producto escalar, puesto que hemos comentado que podemos encontrar una forma canónica completando cuadrados.

EJEMPLO B. *t iar lo nto ríti o e la n i n* $= (\ , y) = 2\ ^2 + y^2 + \ y - 6\ - 5y.$

Puesto que la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial} &= 4\ + y - 6 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} &= 2y + \ - 5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

es $= 1, y = 2$, el punto (1, 2) es un punto crítico de ; en este punto la matriz hessiana de es

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de una forma cuadrática definida positiva ya que $4 > 0$ y $|\ | = 7 > 0$. Luego posee un mínimo relativo en (1, 2).

* * *

En la sección 8.1 se dio la definición de producto escalar en un espacio vectorial y se demostró que su matriz en cualquier base es simétrica con todos los elementos de la diagonal principal positivos. No toda matriz que satisface estas condiciones define un producto escalar, como ya se observó en la citada sección.

Una condición necesaria y suficiente para determinar un producto escalar es que la forma cuadrática asociada a la matriz sea definida positiva. Este resultado resulta evidente a la luz de las definiciones de producto escalar y de forma cuadrática definida positiva.

EJEMPLO C. Queremos encontrar los valores de a para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = (\ _1,\ _2,\ _3)\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \ _3 \end{pmatrix}$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Puesto que ha de ser definida positiva hemos de tener

$$a > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} > 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

De estas tres condiciones deducimos

$$a > 0 \quad , \quad a^2 - 1 > 0 \quad \text{y} \quad a^2 - a - 1 > 0.$$

Puesto que $a^2 - a - 1 = 0$ tiene como soluciones $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ hemos de tener

$$a > 0 \quad , \quad a > 1 \quad \text{o bien} \quad a < -1 \quad , \quad a > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o bien} \quad a < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

De todas estas condiciones deducimos $a > \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

12.5. DIAGONALIZACIÓN SIMULTÁNEA DE FORMAS CUADRÁTICAS

En algunos problemas físicos como, por ejemplo, los que aparecen al describir la dinámica de sistemas de masas unidas mediante muelles, se presenta de manera natural el siguiente problema: dadas dos formas cuadráticas $(\vec{\ }, \vec{\ })$ y $(\vec{\ }, \vec{\ })$ en $\mathbb{R}^n$ encontrar una base en la cual ambas formas pueden reducirse a una suma de cuadrados. Dadas dos formas cuadráticas cualesquiera es posible que el problema no tenga solución; sin embargo, si una de ellas es definida positiva siempre puede encontrarse una base que diagonaliza a ambas formas cuadráticas. La elegante solución de este problema se expone a continuación.

Supongamos que $= (a_i)_{i,\ =1,\ ...,\ n}$ y $= (b_i)_{i,\ =1,\ ...,\ n}$ son las matrices de las formas cuadráticas $(\vec{\ }, \vec{\ })$ y $(\vec{\ }, \vec{\ })$, respectivamente, con respecto a la base $= \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y que $(\vec{\ }, \vec{\ })$ es definida positiva. En la sección 12.4 se ha observado que la aplicación $(\ ,\ )$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$(\vec{\ }, \vec{y}) \ = \ (\vec{\ }, \vec{y}), \qquad \vec{\ }, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar $(\ ,\ )$. Utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (ver sección 8.2) puede encontrarse una base ortonormal

$$U = \{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, ..., \vec{\ }_n\}$$

en $\mathbb{R}^n$ a partir de la base . Puesto que $(\vec{\ }_i, \vec{\ }) = (\vec{\ }_i, \vec{\ }) \ = \delta_i$, $i, \ = 1, 2, ..., n$, la matriz de en la base U es la identidad y si es la matriz del cambio de base de a U se tiene que

$$= \ ^t \ . \tag{5.1}$$

En esta nueva base U la matriz de es

$$\bar{\ } = \ ^t \ . \tag{5.2}$$

Puesto que $(\vec{\ }, \vec{\ })$ es una forma cuadrática en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, el Teorema 12.2.2 nos asegura la existencia de una base ortonormal

$$= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$$

en $\mathbb{R}^n$ tal que si $\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{v}_i$ se tiene que

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \lambda_1 \ ^2_1 + \lambda_2 \ ^2_2 + \cdots + \lambda_n \ ^2_n \tag{5.3}$$

con $\lambda \ \in \mathbb{R}, \ = 1, 2, ..., n$. Puesto que es una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = \ ^2_1 + \ ^2_2 + \cdots + \ ^2_n \tag{5.4}$$

donde $\vec{\ } = \sum_{i=1}^{n} \ _i\vec{v}_i$. Las igualdades (5.3) y (5.4) resuelven el problema de la diagonalización simultánea de $(\vec{\ }, \vec{\ })$ y $(\vec{\ }, \vec{\ })$.

A continuación mostramos con un ejemplo como se realiza este proceso en un caso particular.

EJEMPLO A. Deseamos diagonalizar simultáneamente las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ dadas por

$$(\vec{\ }, \vec{\ }) = -4 \ _1 \ _2 \qquad \text{y} \qquad (\vec{\ }, \vec{\ }) = \ ^2_1 - 2 \ _1 \ _2 + 4 \ ^2_2,$$

donde $\vec{\ } = \ _1\vec{e}_1 + \ _2\vec{e}_2$.

La matriz de $(\vec{\ }, \vec{\ })$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

y una sencilla aplicación del criterio de Sylvester (sección 12.4) nos permite deducir que $(\vec{\ }, \vec{\ })$ es definida positiva. Comenzamos encontrando una base $U = \{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal con respecto al producto escalar $(\vec{\ }, \vec{y}) = (\vec{\ }, \vec{y})$ determinado por . Conviene observar que $(\vec{\ }, \vec{y}) = {}_1y_1 - {}_1y_2 - {}_2y_1 + 4\ {}_2y_2$, donde

$$\vec{\ } = {}_1\vec{e}_1 + {}_2\vec{e}_2 \quad , \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2.$$

Puesto que

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1,$$

podemos tomar $\vec{\ }_1 = \vec{e}_1$; además, $\vec{\omega}_2 = \vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_1$, donde $(\vec{\omega}_2, \vec{\ }_1) = 0$; por tanto,

$$0 = (\vec{\omega}_2, \vec{\ }_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -1 + \alpha;$$

de aquí deducimos que $\vec{\omega}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_1$. Puesto que

$$(\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_2) = (\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_2) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1 - 2 + 4 = 3,$$

tomamos

$$\vec{\ }_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

La matriz $\vec{\ }$ de $(\vec{\ }, \vec{\ })$ en la base $U = \{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2\}$ es

$$\vec{\ } = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/3 \end{pmatrix}$$

ya que

$$(\vec{\ }_1, \vec{\ }_1) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$(\vec{\ }_1, \vec{\ }_2) = (1, 0)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = (0, -2)\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

y

$$(\vec{\ }_2, \vec{\ }_2) = \left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right) = -\frac{4}{3}.$$

La forma cuadrática $(\vec{\ }, \vec{\ })$ puede diagonalizarse por el procedimiento utilizado en la sección 12.2. Puesto que

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(3\lambda^2 + 4\lambda - 4),$$

y la ecuación $3\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$ tiene como soluciones

$$\lambda_1 = -2 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{2}{3},$$

se tiene que

$$(\vec{y}, \vec{y}) = -2y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2,$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = y_1^2 + y_2^2,$$

donde $\vec{y} = y_1\,\vec{v}_1 + y_2\,\vec{v}_2$ y $\quad = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortonormal con respecto a $(\,,\,)$.

Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ se encuentran calculando los subespacios invariantes correspondientes a λ_1 y λ_2. Para $\lambda_1 = -2$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/3 + 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2y_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}y_2 = 0.$$

Tomando $y_1 = 1, y_2 = \sqrt{3}$, y

$$\vec{g}_1 = 1 \cdot \vec{}_1 + \sqrt{3}\,\vec{}_2 = \vec{e}_1 + (\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

se tiene que

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_1) \;=\; \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4 - 4 + 4 = 4.$$

Tomamos

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Para $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/3 - 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}y_2 = 0.$$

Tomando $y_1 = \sqrt{3}, y_2 = -1$, y

$$\vec{g}_2 = \sqrt{3}\,\vec{}_1 - \vec{}_2 = \sqrt{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

se tiene que

$$(\vec{g}_2, \vec{g}_2) \;=\; \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

Tomamos

$$\vec{v}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{e}_2 .$$

Observar que la matriz del cambio de base que permite diagonalizar $(\vec{\ }, \vec{\ })$ y $(\vec{\ }, \vec{\ })$ simultáneamente es

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/3 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/6 \end{pmatrix}.$$

* * *

El lector habrá observado que el proceso de diagonalización simultánea seguido en el ejemplo anterior resulta bastante complicado. Los comentarios que siguen están encaminados a simplificar este proceso.

Es claro que si $(\vec{\ }, \vec{\ })$ es la forma cuadrática definida positiva, tenemos

$$(\vec{y}, \vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

en la base que diagonaliza a ambas formas cuadráticas a la vez. En esta misma base

$$(\vec{y}, \vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los autovalores de $\bar{\ }$. Utilizando las igualdades (5.1) y (5.2) tenemos

$$|\bar{\ } - \lambda\ | = |\ ^t\quad - \lambda\ ^t\quad | = |\ ^t(\quad - \lambda\ )\ | = |\ ^t\|\|\quad - \lambda\ \|\ |,$$

de donde se deduce que las soluciones de $|\bar{\ } - \lambda\ | = 0$ coinciden con las soluciones de $|\quad - \lambda\ | = 0$, ya que $|\ | \neq 0$.

Así pues, la resolución de la ecuación $|\quad - \lambda\ | = 0$ nos da la diagonalización simultánea.

Si queremos encontrar la base en la cual ambas formas cuadráticas se diagonalizan, observamos que de $\bar{\ } - \lambda\ =\ ^t(\quad - \lambda\ )$ se obtiene que las soluciones de

$$(\bar{\ } - \lambda\ )^{-1}\left(\sum_{=1}^{n} y\ \vec{e}\ \right) = \vec{0} \qquad = 1, 2, ..., n,$$

coinciden con las soluciones de

$$(\quad - \lambda\ )\left(\sum_{=1}^{n} y\ \vec{e}\ \right) = \vec{0} \qquad = 1, 2, ..., n, \tag{5.5}$$

ya que $|\ ^t|, |\ \ | \neq 0$. Por tanto basta con ortonormalizar los vectores que se encuentran al resolver (5.5).

En el ejemplo A tenemos

$$0 = |\quad - \lambda\ | = \left|\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2+\lambda \\ -2+\lambda & -4\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - (\lambda - 2)^2$$
$$= 3\lambda^2 + 4\lambda - 4,$$

que produce las soluciones $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$.

Para $\lambda_1 = -2$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2y_1 - 4y_2 = 0; \quad y_1 = 2, y_2 = 1.$$

Puesto que

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4 - 4 + 4 = 4,$$

tomamos

$$\vec{v}_1 = (1, 1/2).$$

Para $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$,

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 \\ -4/3 & -8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -2y_1 - 4y_2 = 0; \quad y_1 = 2, y_2 = -1.$$

Puesto que

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 4 + 4 + 4 = 12,$$

tomamos

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Observar que estos son los mismos resultados que los obtenidos en el ejemplo A.

EJEMPLO B. *iagonali ar im lt neamente la orma a r ti a en* $\mathbb{R}^4$ *a a or*

$$(\bar{\ }, \bar{\ }) = 2\ {}^{2}_{4} + {}_{1\ 2} + {}_{1\ 3} - 2\ {}_{2\ 3} + 2\ {}_{2\ 4}$$

y

$$(\vec{\ }, \bar{\ }) = \frac{1}{4}\ {}^{2}_{1} + {}^{2}_{2} + {}^{2}_{3} + 2\ {}^{2}_{4} + 2\ {}_{2\ 4}$$

on e

$$= {}_{1}\vec{e}_1 + {}_{2}\vec{e}_2 + {}_{3}\vec{e}_3 + {}_{4}\vec{e}_4 .$$

Puesto que $(\vec{\ }, \bar{\ })$ es definida positiva tenemos

$$(\vec{y}, \vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

Además

$$|\quad -\lambda\ | = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{4}(\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Por tanto,

$$(\vec{y}, \vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Se deja como ejercicio encontrar el cambio de base que diagonaliza simultáneamente ambas formas cuadráticas. El resultado es

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \\ {}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

* * *

Observación. Todos los resultados de esta sección se extienden fácilmente a espacios vectoriales de dimensión finita y formas cuadráticas definidas sobre ellos.

EJERCICIOS CAPÍTULO 12

1. Encontrar la matriz de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ dadas con respecto a la base canónica:

   a) $(\vec{\ }, \vec{\ }) = 2\ {}^2_1 - 3\ {}_1\ {}_2 + 4\ {}^2_2 + 6\ {}_1\ {}_3 \quad , \quad n = 3.$

   b) $(\vec{\ }, \vec{\ }) = \sum_{i=1}^{3} (\ {}_i - \ )^2 \quad , \quad = \frac{1}{3}(\ {}_1 + \ {}_2 + \ {}_3) \quad , \quad n = 3.$

   c) $(\vec{\ }, \vec{\ }) = \sum_{i<}^{n} (i - \ )^2\ {}_i \quad .$

2. Sea $(\vec{\ }, \vec{y})$ una forma bilineal que tiene como expresión

$$(\vec{\ }, \vec{y}) = 2\ {}_1 y_1 + 3\ {}_1 y_2 - \ {}_2 y_1 + \ {}_3 y_3$$

   con respecto a la base $\{\vec{\ }_1 = (1, 0, 1), \vec{\ }_2 = (0, 1, 0), \vec{\ }_3 = (0, 1, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{\ } = \ {}_1\vec{\ }_1 + \ {}_2\vec{\ }_2 + \ {}_3\vec{\ }_3$, $\vec{y} = y_1\vec{\ }_1 + y_2\vec{\ }_2 + y_3\vec{\ }_3$.

   a) Encontrar la expresión de $(\vec{\ }, \vec{y})$ con respecto a la base canónica.

   b) Encontrar una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica tales que $=\ +\ $, dando las expresiones de y con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea una forma bilineal cuyo rango coincide con la dimensión del espacio vectorial en el cual está definida. Demostrar que para todo $\vec{\ }_0 \in \ , \vec{\ }_0 \neq \vec{0}$ existe $\vec{y}_0 \in$ tal que $(\vec{\ }_0, \vec{y}_0) \neq 0$.

4. Encontrar una forma canónica de las siguientes formas cuadráticas:

   a) $3\ ^2 + 2y^2 +\ ^2 - 6\ y + 4\ \ .$

   b) $\ \ y + 2\ \ .$

   c) $9\ ^2 - 3y^2 + 6\ y + 18\ \ \ + 12y\ .$

5. Dar una forma canónica en una base ortonormal de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$:

   a) $-2\ ^2 + y^2 + 4\ y\ \ ,\ \ n = 2.$

   b) $2\ ^2 - 6y^2 - 2\ ^2 - 2\ \ \ ,\ \ n = 3.$

   c) $\ ^2 - 2\ y - 2\ \ - 2y\ \ ,\ \ n = 3.$

   d) $\ _1\ _2 +\ _3\ _4\ \ ,\ \ n = 4.$

6. Para cada una de las formas cuadráticas siguientes encontrar una base ortonormal que la reduzca a su forma canónica y escribir esta forma canónica:

   a) $6\ ^2 + 5y^2 + 7\ ^2 - 4\ y + 4\ \ .$

   b) $3y^2 + 3\ ^2 + 4\ y + 4\ \ \ + 2y\ .$

   c) $\ ^2 + y^2 - 2\ \ \ + 2y\ .$

7. Encontrar la forma normal, los índices de inercia y la signatura de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$:

   a) $\ ^2 + y^2 +\ ^2 + 4\ y + 2\ \ \ + 2y\ .$

   b) $\ ^2 + 5y^2 - 2\ y + 2\ \ .$

   c) $4\ ^2 + y^2 +\ ^2 - 4\ y + 4\ \ \ - 3y\ .$

   En el caso c) indicar también la transformación que lleva la forma cuadrática dada en la forma normal encontrada.

8. Determinar los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$^2 + 4y^2 + 2\alpha\ y + 2\alpha y$$

   es definida positiva.

9. Determinar los valores de β para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$ dada por $\beta\ ^2 + 2\ y + \beta y^2 + \beta\ ^2 + 2\ t + \beta t^2$ es definida negativa.

10. Determinar la región tridimensional en la cual la matriz de las derivadas parciales segundas de la función $(\ ,y,\ ) =\ ^2 + 3y^2 + y^2\ ^2$ determina una forma cuadrática definida positiva.

11. Encontrar los puntos de las superficies dadas en los cuales se alcanzan máximos o mínimos relativos:

   a) $(\ ,y) =\ ^2 + y^2 + 2\ \ + 4.$

   b) $g(\ ,y) = -\ ^4 + 8\ ^2 - y^2 - 4y.$

   c) $(\ ,y) =\ ^3 - y^3 + 3\ y.$

12. Sea $= a_{11}\ ^2 + a_{12}\ y + a_{22}y^2$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

Demostrar que no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa.

13. Determinar los valores de los parámetros reales a y b para los cuales la forma cuadrática cuya matriz se da a continuación define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 2b & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Diagonalizar simultáneamente las formas cuadráticas

$$(\bar{\ }, \bar{\ }) = \ ^2_1 + 26\ ^2_2 + 10\ _1\ _2$$

y

$$(\bar{\ }, \bar{\ }) = \ ^2_1 + 56\ ^2_2 + 16\ _1\ _2.$$

Biografía

ames osep l ester (1814-1897) fue un matemático inglés que junto con Arthur Cayley fundó la teoría de los invariantes algebraicos, es decir, combinaciones de los coeficientes de una expresión algebraica que quedan invariantes mediante rotaciones y traslaciones de los ejes coordenados.

En 1838 Sylvester consiguió un puesto como profesor de filosofía en University College (Londres). En 1841 aceptó un cargo de profesor de matemáticas en la Universidad de Virginia, Charlottesville (EE.UU.), en el que solo estuvo tres meses. Cuatro años más tarde volvió a Londres como contable de una compañía aseguradora, manteniendo su interés en matemáticas a través de las clases privadas que impartía. Más tarde trabajó como abogado, comenzando en este período su relación matemática con Cayley.

Desde 1855 hasta 1870 Sylvester fue profesor de matemáticas en la Academia Real Militar en Woolwich (Inglaterra). Volvió a los Estados Unidos en 1876 para ser profesor de matemáticas en la Universidad John Hopkins en Baltimore (Maryland). Trabajando en esta Universidad fundó la revista matemática *meri an o rnal o at emati* , introdujo los estudios de doctorado en las universidades de los Estados Unidos y contribuyó enormemente al desarrollo de las matemáticas en este país. En 1883 volvió a Inglaterra como profesor de geometría en la Universidad de Oxford.

Sylvester fue principalmente un algebrista. Realizó trabajos brillantes en teoría de números, principalmente en particiones (formas en que un número puede expresarse como suma de enteros positivos) y análisis diofántico (métodos para encontrar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros).

Sylvester trabajaba por inspiración y es difícil encontrar en sus trabajos una prueba correcta para los moldes actuales. A pesar de que publicó cientos de artículos, solamente escribió un libro de matemáticas titulado *reati e on lli ti n tion* (1876). Sylvester publicó en 1870 un libro de versos.

Capítulo 13

Superficies de segundo grado.

13.1. Clasificación de las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$.

13.2. Invariantes de las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$.

13.3. Determinación de los elementos geométricos de algunas cuádricas.

13.4. Clasificación de las cuádricas según sus invariantes.

13.5. Notas adicionales.

Introducción

La expresión analítica de las cónicas es una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables. La generalización a tres variables produce una expresión de la forma

$$a_{11}\ ^2 + a_{22}y^2 + a_{33}\ ^2 + a_{12}\ y + a_{13}\ \ + a_{23}y\ \ + a_1\ \ + a_2y + a_3\ \ + a = 0$$

que recibe el nombre de *er i ie e eg n o gra o* en $\mathbb{R}^3$ o *ri a*.

A la luz de los resultados obtenidos en el capítulo anterior sobre formas cuadráticas clasificaremos las superficies de segundo grado, de manera análoga a como se hizo con las cónicas.

En este capítulo trabajaremos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y toda expresión estará referida a una base ortonormal dada si no se menciona explícitamente otra base.

13.1. CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO EN $\mathbb{R}^3$

Una *er i ie e eg n o gra o* en $\mathbb{R}^3$ es una expresión de la forma

$$\begin{aligned}(\ , y,\ ) = a_{11}\ ^2 + a_{22}y^2 + a_{33}\ ^2 + a_{12}\ y + a_{13}\ \ + \\ + a_{23}y\ \ + a_1\ \ + a_2y + a_3\ \ + a = 0.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Los términos de orden dos determinan una forma cuadrática , en $\mathbb{R}^3$, cuya matriz es

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Si escribimos $= (\ , y,\ )$ y llamamos $L(\ ) = a_1\ \ + a_2y + a_3\ $ a la parte lineal, (1.1) puede escribirse de la forma

$$(\ ,\ ) + L(\ ) + a = 0. \tag{1.2}$$

Nuestro objetivo inmediato es reconocer todos los tipos de superficies que puedan aparecer en (1.1) al variar sus coeficientes. Puesto que $(\ ,\ )$ es una forma cuadrática en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, puede reducirse, en una base ortonormal $\{\bar{}_1, \bar{}_2, \bar{}_3\}$ a una suma de cuadrados

$$\lambda_1\ _1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3\ _1^2$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los autovalores de la matriz $(\lambda \in \mathbb{R})$ (ver Teorema 12.2.2). Observar que la matriz del cambio de base es *ortogonal* ya que transforma una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en otra base ortonormal. En esta nueva base (1.1) se reduce a

$$\lambda_1\ _1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3\ _1^2 + b_1\ _1 + b_2 y_1 + b_3\ _1 + b = 0. \tag{1.3}$$

Pueden presentarse los siguientes *a o* :

I) Todos los λ_i son diferentes de cero.

II) Uno de los λ_i es igual a cero.

III) Dos de los λ_i son iguales a cero.

Como todos los λ_i son distintos de cero, completando cuadrados en (1.3) obtenemos

$$\lambda_1\left(\ _1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(\ _1 + \frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2 = \quad ,$$

con lo cual la traslación

$$_2 = \ _1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}$$

$$_2 = \ _1 + \frac{b_3}{2\lambda_3}$$

permite escribir (1.3) de la forma

$$\lambda_1 \ _2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 \ _2^2 = \quad , \tag{1.4}$$

que recibe el nombre de *orma an ni a e na er i ie on entro*. La razón de esta terminología es la siguiente: se denomina *entro e na er i ie* al punto $_0 = (\ _0, y_0, \ _0)$ tal que si $(\ _0 + a_0, y_0 + b_0, \ _0 + \ _0)$ es un punto de la superficie, su simétrico respecto a $_0$, esto es,

$$(\ _0 - a_0, y_0 - b_0, \ _0 - \ _0)$$

está también en la superficie. Claramente, la superficie (1.4) tiene $_0 = (\ _2, y_2, \ _2) = (0, 0, 0)$ como centro.

* * *

Si $\neq 0$, dividiendo por , (1.4) se transforma en

$$\pm \frac{\frac{2}{2}}{a^2} \pm \frac{y_2^2}{b^2} \pm \frac{\frac{2}{2}}{\ ^2} = 1, \tag{1.5}$$

donde

$$a = \sqrt{\frac{}{|\lambda_1|}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{}{|\lambda_2|}} \quad \text{y} \quad = \sqrt{\frac{}{|\lambda_3|}}$$

se denominan *emie e* de la superficie.

Excluyendo el caso en que todos los términos son negativos en (1.5), en el que la ecuación (1.5) no tiene ninguna solución real y reordenando, si es necesario, se tienen las siguientes posibilidades

$$\text{I.a)} \quad \frac{\frac{2}{2}}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} = 1.$$

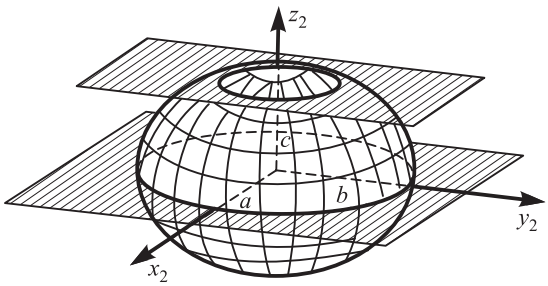
$$\text{I.b)} \quad \frac{\frac{2}{2}}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} = 1.$$

$$\text{I.c)} \quad \frac{\frac{2}{2}}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} = 1.$$

I.a) Al cortar por planos paralelos al plano $_2\ y_2$, es decir $_2 =$ se obtienen elipses $\frac{\frac{2}{2}}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 - \frac{^2}{\frac{2}{2}}$ siempre que $^2 - \ ^2 > 0$ (i.e. $| \ | < | \ |$).

De manera similar al cortar por planos de la forma $y_2 =$ (ó $_2 =$) se obtienen elipses siempre que $| \ | < |b|$ ($| \ | < |a|$).

La superficie recibe el nombre de *eli oi e* y su gráfica se muestra en la figura 13.1.



$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1$$

i ra 13.1 lipsoide.

I.b) Al cortar por planos de la forma $_2 =$ se obtienen elipses de ecuaciones

$$\frac{\frac{2}{2}}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 + \frac{^2}{\frac{2}{2}},$$

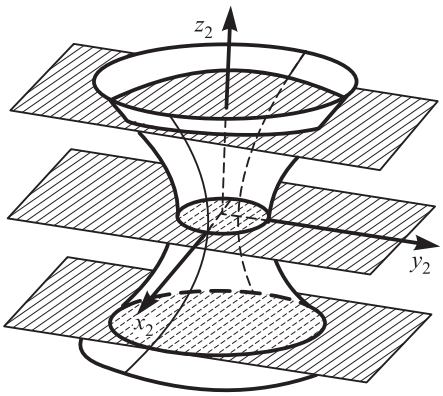
ecuación que posee soluciones para todo $\in \mathbb{R}$. Si $y_2 = 0$ se obtiene la hipérbola

$$\frac{\frac{2}{2}}{a^2} - \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} = 1$$

de semiejes a y . Si $_2 = 0$ se obtiene la hipérbola

$$\frac{y_2^2}{b^2} - \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} = 1$$

de semiejes b y . Esta superficie recibe el nombre de *i erboloi e e na o a*.



$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}=1$$

i ra 13.2 iperboloide de una o a.

I.c) Al cortar por planos de la forma $_2 =$ se obtienen las hipérbolas de ecuación

$$\frac{^2_2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1+\frac{^2}{}.$$

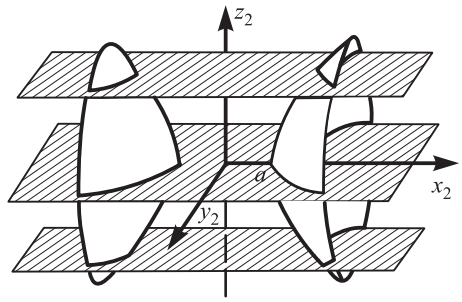
Cuando $y_2 = 0$ se obtiene la hipérbola

$$\frac{^2_2}{a^2}-\frac{^2_2}{}=1,$$

de semiejes a y . Finalmente, si $_2 =$ se obtiene

$$\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{^2_2}{}=-1+\frac{^2}{a^2},$$

que representa una elipse siempre que $-a^2 + {}^2 > 0$, es decir, $| \ | > |a|$. Esta superficie recibe el nombre de *i erboloi e e o o a* .



$$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}=1$$

i ra 13.3 iperboloide de dos o as.

Si $= 0$, (1.4) se escribe de la forma $\lambda_1 \, {}^2_2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 \, {}^2_2 = 0$; si todos los λ son positivos o todos son negativos, esta ecuación solamente tiene como solución el punto $_2 = 0$, $y_2 = 0$,

$_2 = 0$. En el resto de los casos siempre podemos suponer que dos de ellos son positivos y uno es negativo (si uno es positivo y el resto son negativos se cambia de signo a la ecuación). Suponiendo que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$ y dividiendo por $|\lambda_3|$ se obtiene

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} \ {}^2_2 + \frac{\lambda_2}{|\lambda_3|} y_2^2 = \ {}^2_2.$$

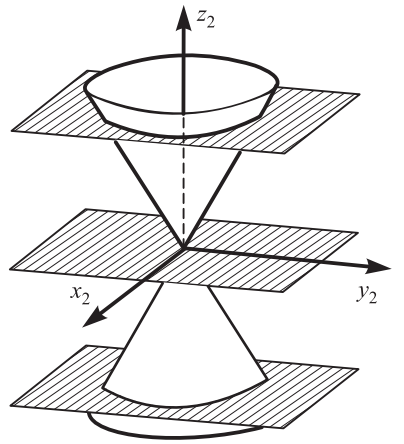
En los planos de ecuación $_2 =$ esta expresión produce elipses, salvo si $= 0$, en cuyo caso se obtiene el punto $_2 = 0, y_2 = 0, \ _2 =$. Si $y_2 = 0$ la ecuación se transforma en

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} \ {}^2_2 = \ {}^2_2 \quad \Rightarrow \quad {}_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}} \ {}_2$$

que representa dos rectas de pendiente $\pm\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{|\lambda_3|}}$. De manera similar, si $_2 = 0$ se obtienen dos rectas de pendiente

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda_2}{|\lambda_3|}}.$$

La superficie que se obtiene en este caso se denomina *ono* (figura 13.4).



$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = z_2^2$$

i ra 13.4 Cono.

* * *

Podemos suponer, por ejemplo, que $\lambda_3 = 0$; entonces, completando cuadrados en $_1$ e y_1 en la expresión (1.3) se obtiene

$$\lambda_1 \left(\ {}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b_3 \ {}_1 = \quad .$$

La traslación

$$\begin{cases} {}_2 = {}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \\ {}_2 = {}_1 \end{cases}$$

transforma la superficie anterior en

$$\lambda_1 \, {}^2_2 + \lambda_2 y_2^2 + b_3 \, {}_2 = \quad . \tag{1.6}$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

$$\text{II.a)} \quad b_3 \neq 0.$$
$$\text{II.b)} \quad b_3 = 0.$$

II.a) Como $b_3 \neq 0$, la traslación ${}_3 = {}_2, y_3 = y_2 = y_2, \; {}_3 = - \, {}_2 + \dfrac{}{b_3}$ transforma (1.6) en

$$\lambda_1 \, {}^2_3 + \lambda_2 y_3^2 = b_3 \, {}_3,$$

o bien

$$\pm \frac{{}^2_3}{a^2} \pm \frac{y_3^2}{b^2} = \; {}_3,$$

una vez que se ha dividido por b_3, donde $a = \sqrt{\dfrac{|b_3|}{|\lambda_1|}}$, y $b = \sqrt{\dfrac{|b_3|}{|\lambda_2|}}$. Esencialmente la ecuación anterior tiene solo los siguientes casos:

$$\text{a)} \quad \frac{{}^2_3}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = \; {}_3 \quad ; \quad \text{b)} \quad \frac{{}^2_3}{a^2} - \frac{y_3^2}{b^2} = \; {}_3$$

(el caso en que ambos signos sean negativos es «equivalente» al caso a) si hacemos la simetría ${}_3 = - \, {}_3$ y el caso en que el primero sea negativo y el segundo positivo es «equivalente» al caso b) realizando la misma simetría).

En el caso a) los planos ${}_3 =$ producen una elipse siempre que > 0 y un punto si $= 0$; si < 0 no hay puntos en $\mathbb{R}^3$ que satisfagan la ecuación. Las elipses tienen por ecuación

$$\frac{{}^2_3}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = \quad .$$

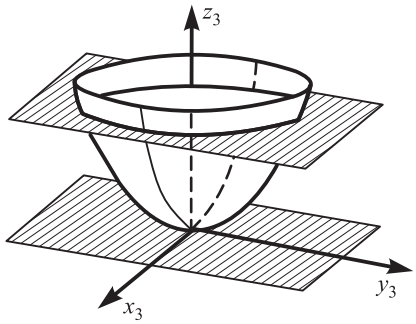
Si $y_3 = 0$ se obtiene la parábola

$${}^2_3 = a^2 \, {}_3$$

(con su eje en el eje ${}_3$) y si ${}_3 = 0$ se obtiene otra parábola con eje en ${}_3$, de ecuación

$$y_3^2 = b^2 \, {}_3.$$

La superficie que se obtiene se denomina *araboloi e elí ti o* y puede apreciarse en la figura 13.5.



$$\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}=z_3$$

i ra 13.5 Paraboloide el ptico.

En el caso b), el plano $_3 = 0$ produce las rectas $_3 = \pm\dfrac{a}{b}y_3$, de pendiente $\pm\dfrac{b}{a}$; si $_3 =$, con > 0, se obtienen las hipérbolas

$$\frac{\frac{2}{3}}{a^2}-\frac{y_3^2}{b^2}= \quad ,$$

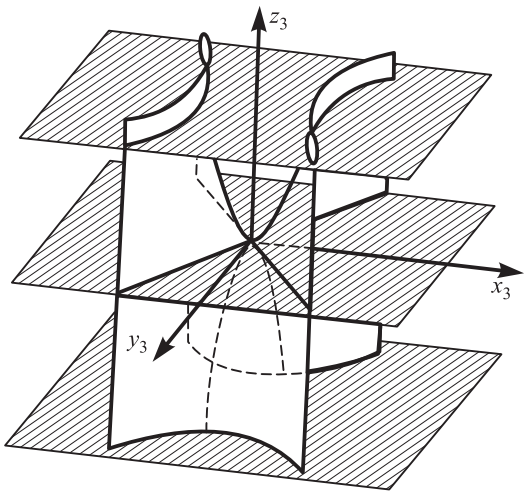
con eje principal en la dirección de $_3$; finalmente, si $_3 =$ con < 0, se obtienen las hipérbolas

$$-\frac{\frac{2}{3}}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}=- \qquad (- > 0)$$

cuyo eje principal está en la dirección de y_3.

El plano $y_3 = 0$ produce la parábola $\frac{2}{3} = a^2\ _3$ que está dirigida en el sentido positivo de $_3$ mientras que el plano $_3 = 0$ produce la parábola $y_3^2 = -b^2\ _3$ que está dirigida en el sentido negativo de $_3$.

La superficie que se obtiene se denomina *araboloi e i erb li o* y se representa en la figura 13.6.



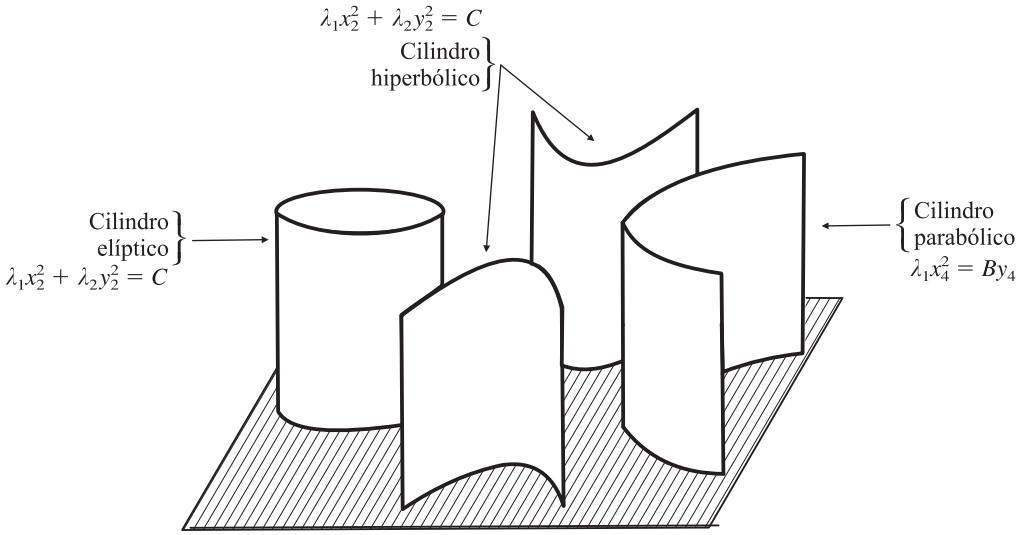
$$\frac{x_3^2}{a^2}-\frac{y_3^2}{b^2}=z_3$$

i ra 13.6 Paraboloide iperb lico.

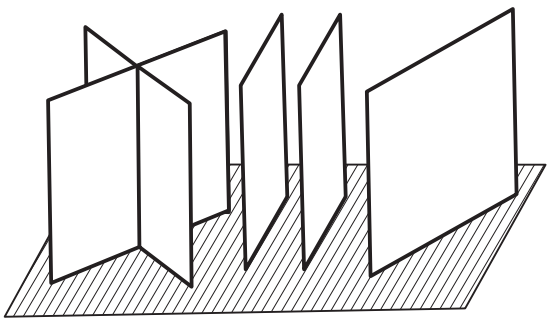
II.b) Si $b_3 = 0$, la ecuación (1.6) se escribe de la forma

$$\lambda_1 \, {}^{2}_{2} + \lambda_2 y_2^2 = \quad .$$

Puesto que le falta una de las variables, ${}_3$, *e imo e la e a i n re re enta na er i ie egenera a*; de hecho con cualquier plano ${}_3 =$ posee como intersección la cónica $\lambda_1 \, {}^{2}_{2} + \lambda_2 y_2^2 =$ y, por tanto, la superficie es una superficie *ilín ri a* que tiene a esta cónica como base: se tiene entonces un *ilin ro elí ti o*, *n ilin ro i erb li o*, *o lano e e ortan o na re ta* (que corresponden a las siguientes cónicas: elipse, hipérbola, dos rectas que se cortan y un punto). Ver figuras 13.7 y 13.8.


$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = C$
Cilindro hiperbólico
Cilindro elíptico
$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = C$
Cilindro parabólico
$\lambda_1 x_4^2 = B y_4$

i ra 13.7



i ra 13.8

* * *

Supongamos, por ejemplo, que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, con lo cual (1.3) se transforma en

$$\lambda_1 \, {}^{2}_{1} + b_1 \, {}_1 + b_2 y_1 + b_3 \, {}_1 + b = 0.$$

La traslación $_2 = _1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1}, y_2 = y_1, \ _2 = _1$ la reduce a

$$\lambda_1 \ ^2_2 + b_2 y_2 + b_3 \ _2 + b' = 0. \tag{1.7}$$

Si $b_2 = b_3 = 0$ se obtienen *o lano aralelo i tinto* o *n olo lano*, o el conjunto vacío dependiendo de los valores y los signos de λ_1 y b'.

Si al menos uno de los coeficientes b_2 ó b_3 es no nulo realizamos la transformación

$$_2 = \ _3$$

$$y_2 = \frac{b_2 y_3 + b_3 \ _3}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}$$

$$_2 = \frac{b_3 y_3 - b_2 \ _3}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}},$$

que es una transformación ortogonal (¿por qué?) de manera que (1.7) se escribe de la forma:

$$\lambda_1 \ ^2_3 + \sqrt{b_2^2 + b_3^2}\, y_3 + b' = 0.$$

Con la traslación

$$_4 = \ _3 \quad , \quad y_4 = y_3 + \frac{b'}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \quad , \quad _4 = \ _3$$

tenemos

$$\lambda_1 \ ^2_4 = \ y_4 \quad , \qquad = -\sqrt{b_2^2 + b_3^2},$$

que representa una parábola con su eje en la dirección de y_4; como estamos en $\mathbb{R}^3$ la superficie es un *ilin ro arab li o*. (Ver figura 13.7).

Notas 1. Las ecuaciones que aparecen al lado de las figuras reciben el nombre de *orma an ni a* de la superficie que representan.

2. Los paraboloides (figuras 13.5 y 13.6) no poseen *entro*, pero poseen un *v rti e* en el origen cuando su ecuación está dada en la forma canónica.

3. Aparte de los elementos geométricos que se citan en 2, las superficies no degeneradas poseen *e e* que se han dibujado convenientemente en las figuras.

* * *

EJEMPLO A. *n ontrar la orma an ni a e la er i ie e eg n o gra o en* $\mathbb{R}^3$ *a a or*

$$3 \ ^2 + 2y^2 + 3 \ ^2 - 2 \ \ - 2 \ - 4y - 2 \ - 5 = 0$$

in i an o la orre on iente tran orma i n geom tri a y e bo ar re re enta i n gr i a.

La forma cuadrática $3\ ^2 + 2y^2 + 3\ ^2 - 2$ tiene como matriz

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de son las soluciones de

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda) - 1]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (2-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

y, por tanto, tenemos $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$.

Para $\lambda_1 = 4$ un autovector satisface las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} + \quad = 0 \\ -2y = 0 \end{array} \right\} \quad ; \quad \vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

Para $\lambda = 2$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad = \quad ; \quad \begin{array}{l} \vec{}_2 = (0,\ 1,\ 0), \\ \vec{}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (1,\ 0,\ 1). \end{array}$$

Con la transformación

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}_1 \\ y_1 \\ {}_1 \end{pmatrix}$$

la superficie se reduce a

$$4\ {}^2_1 + 2y_1^2 + 2\ {}^2_1 - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4y_1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 5 = 0,$$

o bien

$$4\ {}^2_1 + 2y_1^2 + 2\ {}^2_1 - 4y_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}\ {}_1 - 5 = 0.$$

Completando cuadrados se obtiene

$$4\ {}^2_1 + 2(y_1 - 1)^2 + 2\left({}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0.$$

Haciendo la traslación

$$\begin{cases} {}_2 = {}_1 \\ y_2 = y_1 - 1 \\ {}_2 = {}_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

se obtiene

$$4\,{}_2^2 + 2y_2^2 + 2\,{}_2^2 = 8,$$

o bien

$$\frac{{}_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{4} + \frac{{}_2^2}{4} = 1,$$

que es la forma canónica de la superficie dada. Deducimos de esta expresión que la superficie dada es un elipsoide con semiejes $\sqrt{2}$, 2 y 2. Sus ejes se encuentran en las direcciones de $\vec{}_1$, $\vec{}_2$ y $\vec{}_3$, respectivamente.

La transformación que transforma la superficie dada en su forma canónica es

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_2 \\ y_2 + 1 \\ {}_2 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En el sistema de coordenadas $({}_2, y_2, {}_2)$ el centro es el punto (0, 0, 0); por tanto, el centro del elipsoide es $\quad = (1/2\,,\, 1,\, 1/2)$, ya que

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

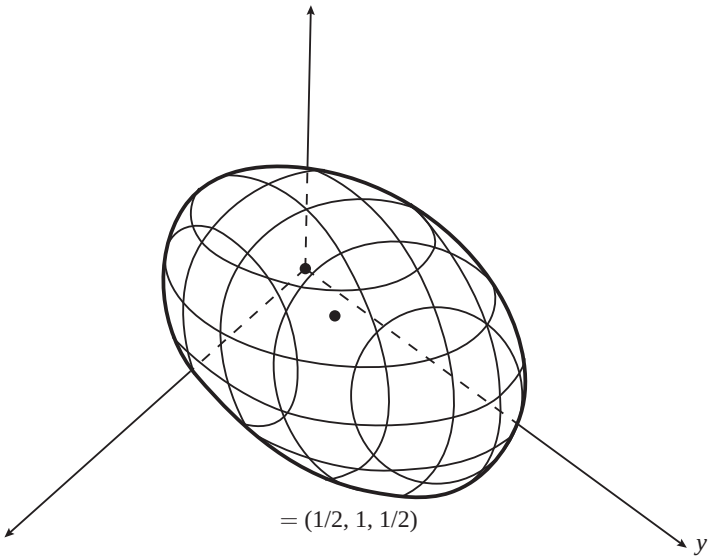
Para hacer un esbozo de su representación gráfica podemos hallar su intersección con algunos planos paralelos a los planos coordenados. Para el plano $\quad = 1/2$, que pasa por el centro del elipsoide, se obtiene

$$3\left(\quad - \frac{1}{2} \right)^2 + 2(y-1)^2 = 8,$$

que es una elipse. Para el plano $\quad = 1/2$, que también pasa por el centro del elipsoide, se obtiene

$$2(y-1)^2 + 3\left(\quad - \frac{1}{2} \right) = 7,$$

que también es una elipse. Ver su representación gráfica en la figura 13.9.



i ra 13.9

13.2. INVARIANTES DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO EN $\mathbb{R}^3$

El método descrito en la sección anterior para determinar las superficies de segundo grado puede resultar engorroso si los autovalores y autovectores no son sencillos de calcular. Al igual que en las cónicas, otra forma de estudiar las superficies de segundo grado es mediante la obtención de sus invariantes, permitiéndonos obtener su forma canónica sin necesidad de conocer la transformación que nos permite llegar a ella.

Para tratar de averiguar los invariantes de las superficies de segundo grado recordamos que los invariantes de la cónica $a_{11} + a_{12}\, y + a_{22}y^2 + a_1 + a_2y + a = 0$ son

$$= a_{11} + a_{22} \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{vmatrix}$$

y que los números y δ son, salvo el signo, coeficientes del polinomio característico de la matriz

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{pmatrix};$$

en efecto, $0 = | \quad - \lambda \, | = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - \dfrac{a_{12}^2}{4} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + | \quad |$.

* * *

Una superficie de segundo grado en las variables $\ , y, \ $ es de la forma

$$(\ , y, \ ) = a_{11} \ ^2 + a_{22}y^2 + a_{33} \ ^2 + a_{12} \ y + a_{13} \ \ + a_{23}y \ + a_1 \ + a_2y + a_3 \ + a = 0 \quad (2.1)$$

que también podemos escribir como

$$(\ , y, \ , 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \\ 1 \end{pmatrix} = (\ , y, \ , 1) \ -\begin{pmatrix} y \\ \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (2.2)$$

lo que puede comprobarse fácilmente. Sea

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} a_1/2 \\ a_2/2 \\ a_3/2 \end{pmatrix} \quad , \qquad = \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Con esta notación, (2.2) se escribe de la forma

$$(X^t, \ 1)\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & a \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (X^t, \ 1)\bar{A}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.4)$$

El polinomio característico de la matriz $\ $ es

$$| \ \ - \lambda \ | = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} - \lambda & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Un cálculo largo, pero sencillo, permite obtener

$$| \ \ - \lambda \ | = -\lambda^3 + \ _1\lambda^2 - \ _2\lambda + \delta$$

con

$$\begin{cases} \ _1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \ _2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 \\ a_{13}/2 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix}. \\ \delta = | \ \ | \end{cases} \qquad (2.5)$$

Diremos que una expresión de los coeficientes de (2.1) es *invariante* si permanece fija mediante traslaciones y transformaciones ortogonales. (Observar que si $\ $ está dada con respecto a un sistema de referencia ortonormal, solamente se han utilizado transformaciones ortogonales y traslaciones en la sección 13.1 para reducirla a su forma canónica.)

Teorema 13.2.1

Son invariantes de la superficie de segundo grado dada en (2.1) las cantidades $\ _1, \ _2, \delta$ dadas en (2.5) así como la cantidad $\Delta = | \ \bar{} \ |$.

Demostración. En la sección 10.1 se demostró que un cambio de referencia se escribe de la forma

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

con $\in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matriz de cambio de base. En nuestro caso corresponde a una transformación ortogonal y, por tanto, $^t = {}^t = $. Con la misma notación que en (2.4) podemos escribir

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (2.4) se tiene

$$0 = (X'^t,\ 1)\left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$0 = (X'^t,\ 1)\left(\begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline b'^t & a' \end{array}\right)\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = (X'^t,\ 1)\bar{A}'\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} ' &= {}^t \\ b' &= {}^t \quad + {}^t b \\ a' &= {}^t \quad + b^t \ + {}^t b + a \end{aligned}$$

(ver la demostración del Teorema 11.8.2).

Puesto que

$$|\bar{A}'| = \left|\left(\begin{array}{c|c} C^t & 0 \\ \hline p^t & 1 \end{array}\right)\bar{A}\left(\begin{array}{c|c} C & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\right| = |C^t||\bar{A}||C| = |\bar{A}|,$$

se tiene que $\Delta = |\bar{\ }|$ es invariante.

De la igualdad $' = {}^t$ se deduce

$$(\lambda) = |\ ' - \lambda\ | = |\ {}^t \quad - \lambda\ {}^t\ | = |\ - \lambda\ | = \quad (\lambda).$$

Por tanto, los coeficientes de (λ) y (λ) deben coincidir. Como algunos de estos coeficientes son, salvo el signo, las cantidades $_1$, $_2$ y δ dadas en (2.5) para el polinomio característico de , deducimos que estas cantidades son invariantes para la superficie (2.1). ■

* * *

A continuación hacemos una clasificación de las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$, también llamadas *ri a* , atendiendo a sus invariantes. Estudiamos por separado cada uno de los casos que aparecieron en la sección 13.1.

En el aso la forma canónica es

$$\lambda_1 \,{}_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 \,{}_2^2 = \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0).$$

Puesto que en esta ecuación

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ ,$$

se tiene que $= -\Delta/\lambda_1\lambda_2\lambda_3$; además

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

y, por tanto, la forma canónica de las cuádricas del Caso I es

$$\lambda_1 \,{}_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 \,{}_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{2.6}$$

Si $\Delta \neq 0$ se obtienen *eli oi e* , *i erboloi e e na o a* o *i erboloi e e o o a* dependiendo de los signos de λ_1, λ_2, λ_3, Δ y δ.

Si $\Delta = 0$ se obtiene *na er i ie ni a* o *n nto.*

* * *

En el aso la forma canónica es de la forma

$$\lambda_1 \,{}_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_3 \,{}_2 = \ , \qquad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0). \tag{2.7}$$

Si $b_3 \neq 0$ esta puede escribirse de la forma

$$\lambda_1 \,{}_3^2 + \lambda_2 y_3^2 + b_3 \,{}_3 = 0.$$

Puesto que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3/2 \\ 0 & 0 & b_3/2 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 \frac{b_3^2}{4}$$

y

$${}_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 ,$$

su forma canónica es

$$\lambda_1 \,{}^{2}_{3} + \lambda_2 y_3^2 \pm \sqrt{-4\,\frac{\Delta}{{}_2}}\;{}_3 = 0. \tag{2.8}$$

Puesto que $b_3 \neq 0$, $\Delta \neq 0$; como $\dfrac{\Delta}{{}_2} = -\dfrac{b_3^2}{4} < 0$ se obtienen *araboloi e elí ti o o i erb li o* dependiendo de los signos de λ_1 y λ_2.

Si $b_3 = 0$ la forma canónica es

$$\lambda_1 \,{}^{2}_{2} + \lambda_2 y_2^2 = \quad ; \tag{2.9}$$

por tanto, los invariantes son

$${}_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad , \quad {}_2 = \lambda_1\lambda_2 \neq 0 \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{vmatrix} = 0.$$

A partir de ellos no podemos determinar la constante .

En este caso se obtienen *ilin ro elí ti o , i erb li o , o lano e e ortan o na re ta.*

* * *

En el aso la forma canónica es

$$\lambda_1 \,{}^{2}_{2} + b_2 y_2 + b_3\;{}_2 + b' = 0. \tag{2.10}$$

Si $b_2 = b_3 = 0$ se deduce fácilmente que ${}_2 = 0$, $\delta = 0$ y $\Delta = 0$ (en este caso se tienen *o lano aralelo i tinto o n olo lano*).

Si al menos uno de b_2 ó b_3 es no nulo, la forma canónica es

$$\lambda_1 \,{}^{2}_{4} - \quad y_4 = 0 \tag{2.11}$$

y también se tiene ${}_2 = 0$, $\delta = 0$ y $\Delta = 0$ (en este caso se tiene un *ilin ro arab li o*).

* * *

La clasificación realizada no es completa, ya que no permite distinguir entre varias superficies que tienen iguales los invariantes que hemos estudiado. La sección 13.4 contiene una clasificación más completa, incluyendo un cuadro con un resumen de los resultados.

EJEMPLO A. *e ir la er i ie e eg n o gra o* $^2 + y^2 + \;^2 - 4\quad - 4y + 2 = 0$ a *orma an ni a y e ir ti o e er i ie re re enta.*

Tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 4(2 - 4) = 6 \neq 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0.$$

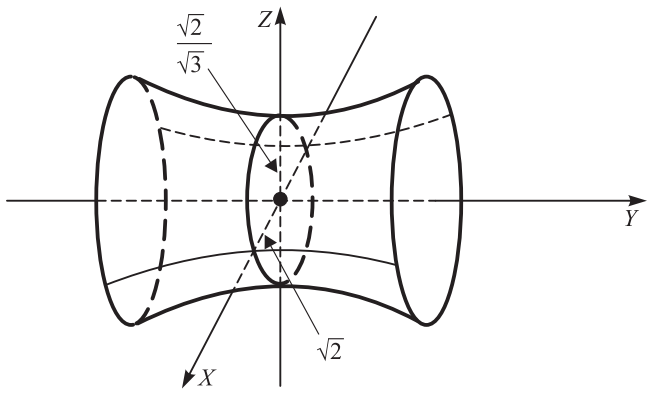
Puesto que los autovalores de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ la forma canónica es

$$^2 - \ ^2 + 3 \ ^2 - 2 = 0,$$

o bien $\dfrac{^2}{2} - \dfrac{^2}{2} + \dfrac{^2}{2/3} = 1$ y, por tanto, se trata de un hiperboloide de una hoja.



i ra 13.10

EJEMPLO B. *e ir la ri a* $y^2 + 4 \ + 1 = 0$ *a orma an ni a y e ir ti o e er i ie re re enta.*

Tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

y los autovalores de

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

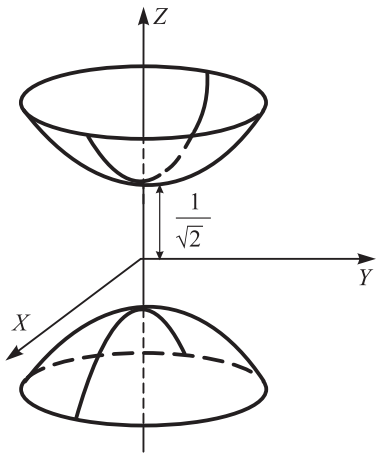
son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. La forma canónica de esta superficie es

$$^2 + 2 \ ^2 - 2 \ ^2 + \frac{-4}{-4} = 0,$$

o bien

$$- \quad ^2 - \frac{^2}{1/2} + \frac{^2}{1/2} = 1,$$

y se trata, por tanto, de un hiperboloide de dos hojas.



i ra 13.11

13.3. DETERMINACIÓN DE LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE ALGUNAS CUÁDRICAS

Para las superficies de segundo grado en las que al menos uno de los números Δ ó δ es no nulo se ha dado un procedimiento para obtener su forma canónica en la sección anterior. A continuación describimos procedimientos para encontrar algunos elementos geométricos de estas superficies. Si $\delta \neq 0$ se trata de una *ri a on entro* y se dará un procedimiento para calcular éste; si $\delta = 0$ se tienen los *araboloi e* (o cuádricas sin centro) y entonces se dará un procedimiento para calcular su *v rti e*.

Sea

$$(, y,) = (,) + L( ) + a = 0 \tag{3.1}$$

una superficie de segundo grado con $\Delta \neq 0$ y $\delta \neq 0$. La cuádrica anterior puede ser un elipsoide, un hiperboloide de una hoja o de dos hojas. En estos casos hemos visto en la sección 13.1 que la dirección de sus ejes está dada por los autovectores correspondientes a los autovalores de la matriz . Estas cuádricas tienen centro: si $\lambda_1 \ ^2 + \lambda_2 \ ^2 + \lambda_3 \ ^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$ es su forma canónica el centro es el (0, 0, 0) en estas coordenadas. En general, para hallar las coordenadas del centro procederemos como se indica a continuación.

Sea (α, β, γ) el centro de una superficie de segundo grado. La traslación

$$(_1, y_1, \ _1) = (, y,) = (, y,) - (\alpha, \beta, \gamma)$$

transforma en (0, 0, 0) y la superficie (3.1) en

$$0 = (_1 + \alpha, y_1 + \beta, \ _1 + \gamma) = (_1, \ _1) + \nabla ( ) \cdot \ _1 + ( ) \tag{3.2}$$

con $_1 = (\ _1, y_1, \ _1)^t$ y

$$\nabla(\ ) = \left(\frac{\partial}{\partial}(\ ), \frac{\partial}{\partial y}(\ ), \frac{\partial}{\partial}(\ )\right).$$

La expresión (3.2) puede obtenerse o bien mediante sustitución en (3.1) o bien observando que es el desarrollo de Taylor de la función $(\ , y, \ )$ en el punto $\ $. Luego $\ $ es el centro de (3.1) si $\nabla(\ ) = (0, 0, 0)$. Así pues, $\ $ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial} = 2a_{11}\ \ + a_{12}y + a_{13}\ \ + a_1 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = a_{12}\ \ + 2a_{22}y + a_{23}\ \ + a_2 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial} = a_{13}\ \ + a_{23}y + 2a_{33}\ \ + a_3 = 0. \end{cases}$$

Observar que este sistema de ecuaciones lineales tiene por matriz de coeficientes $2\ \ $ cuyo determinante es $|2\ \ | = 8|\ \ | = 8\delta \neq 0$.

EJEMPLO A. *eterminar el entro y lo e e el i erboloi e e na o a el e em lo e la e i n* 13.2: $^2 + y^2 + \ ^2 - 4\ \ - 4y + 2 = 0$. *bo ar re re enta i n gr i a.*

Su centro $\ $ satisface el sistema

$$\frac{\partial}{\partial} = 2\ \ - 4\ \ = 0\ \ , \quad \frac{\partial}{\partial y} = 2y - 4 = 0\ \ , \quad \frac{\partial}{\partial} = 2\ \ - 4\ \ = 0,$$

de donde deducimos que su centro es $\ = (0, 2, 0)$.

Los autovalores de la matriz $\ $ correspondiente a su parte cuadrática son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ y las direcciones de sus ejes vienen dadas por $\vec{\ }_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{\ }_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{\ }_3 = (1, 0, -1)$, ya que

$$\begin{aligned} L(\vec{\ }_1) &= \mathrm{Ker}(\ \ - \ \ ) = \{\ \ = 0, \ \ = 0\} \\ L(\vec{\ }_2) &= \mathrm{Ker}(\ \ + \ \ ) = \{\ \ - \ \ = 0, y = 0\} \\ L(\vec{\ }_3) &= \mathrm{Ker}(\ \ - 3\ ) = \{\ \ + \ \ = 0, y = 0\}. \end{aligned}$$

Luego los ejes del hiperboloide son las rectas afines

$$\begin{aligned} l_1 &= \ \ + L(\vec{\ }_1) = \{\ \ = 0, \ \ = 0\} \\ l_2 &= \ \ + L(\vec{\ }_2) = \{\ \ - \ \ = 0, y = 2\} \\ l_3 &= \ \ + L(\vec{\ }_3) = \{\ \ + \ \ = 0, y = 2\}. \end{aligned}$$

El eje principal es el que no corta el hiperboloide (ver figura 13.10). Puede comprobarse que en nuestro caso esto sucede con l_2 ya que al sustituir $\ = \ $, $y = 2$ en el hiperboloide se tiene $-2\ ^2 = 2$.

El plano π que contiene a l_1 y l_3 tiene por ecuación $\ + \ = 0$ y su intersección con el hiperboloide produce la elipse

$$6\ ^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

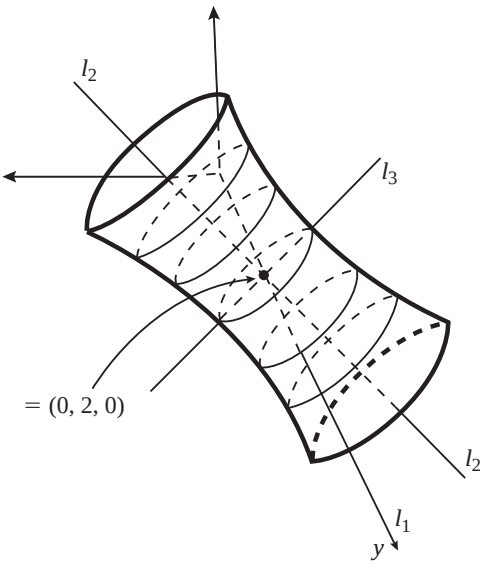
Con estos resultados puede hacerse un esbozo de su representación gráfica (ver figura 13.12). Esta puede completarse hallando la intersección de la cuádrica con planos perpendiculares a l_2. La ecuación de estos planos puede escribirse de la forma $\quad + \quad = 2\ , \quad \in \mathbb{R}$. Su intersección con la cuádrica dada produce

$$^2 + y^2 + (2 \quad - \quad)^2 - 4\ (2 \quad - \quad) - 4y + 2 = 0.$$

Tras simplificar y completar cuadrados se obtiene

$$6(\quad - \quad)^2 + (y - 2)^2 = 2(1 + \quad ^2),$$

que son elipses con centro (, 2,) en el eje l_2.



i ra 13.12

EJEMPLO B. *eterminar el entro y lo e e el i erboloi e e o o a el e em lo e la e i n* 13.2: $y^2 + 4 \quad + 1 = 0$. *bo ar re re enta i n gr i a.*

Su centro satisface el sistema

$$\frac{\partial}{\partial} = 4 \quad = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = 2y = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial} = 4 \quad = 0,$$

y, por tanto, $= (0, 0, 0)$. Los autovalores de la matriz correspondientes a su parte cuadrática son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$; las direcciones de sus ejes vienen dadas por

$$\vec{}_1 = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{}_2 = (1, 0, 1) \quad , \quad \vec{}_3 = (1, 0, -1),$$

ya que

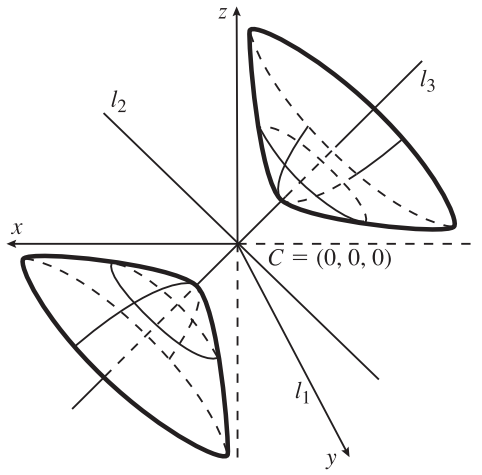
$$L(\vec{}_1) = \mathrm{Ker}(\quad - \quad) = \{\quad - 2 \quad = 0, 2 \quad - \quad = 0\} = \{\quad = 0, \quad = 0\}$$
$$L(\vec{}_2) = \mathrm{Ker}(\quad - 2\ ) = \{\quad - \quad = 0, y = 0\}$$
$$L(\vec{}_3) = \mathrm{Ker}(\quad + 2\ ) = \{\quad + \quad = 0, y = 0\}.$$

Luego los ejes del hiperboloide son las rectas afines

$$l_1 = \quad + L(\bar{\ }_1) \quad , \quad l_2 = \quad + L(\bar{\ }_2) \quad , \quad l_3 = \quad + L(\bar{\ }_3).$$

El eje principal es el que corta al hiperboloide (el eje en la forma canónica dada en el ejemplo B de la sección 13.2 (ver figura 13.11)) es el l_3 ya que al sustituir $= -$, $y = 0$ en la cuádrica dada se obtiene $-4^{\ 2} + 1 = 0$, que produce $= \pm 1/2$. Observar que los otros dos ejes, l_1 y l_2, no tienen intersección con la cuádrica.

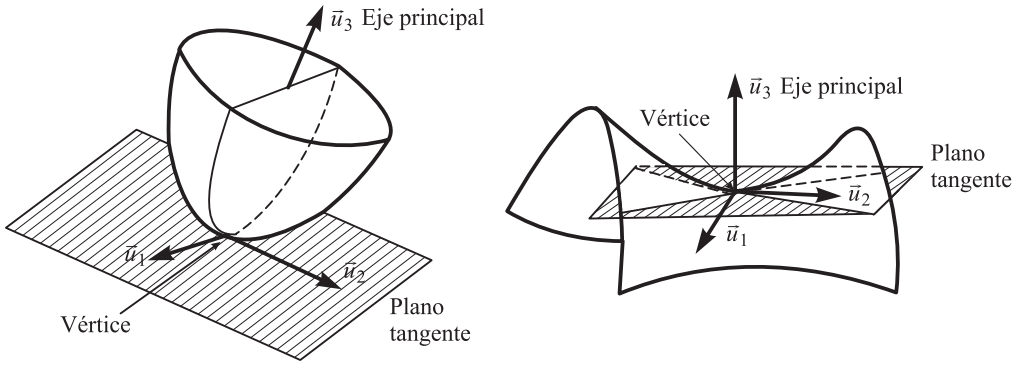
Con estos resultados puede hacerse un esbozo de su representación gráfica (ver figura 13.13). Observar que la intersección del hiperboloide con el plano $y = 0$ produce la hipérbola $4 \quad = -1$, cuyas asíntotas son los ejes coordenados , .



i ra 13.13

* * *

Supongamos ahora que la superficie dada en (3.1) es un *araboloi e* ($\Delta \neq 0$, $\delta = 0$) (ver figura 13.14).



i ra 13.14

El eje principal del paraboloide tiene la dirección de un autovector $\vec{\ }$ correspondiente al autovalor $\lambda_3 = 0$. Los autovectores correspondientes a λ_1 y λ_2 determinan el plano tangente al paraboloide en el vértice. Si $\quad = (\alpha, \beta, \gamma)$ es el vértice del paraboloide, el plano tangente a la superficie $(\ , y, \ ) = 0$ en $\quad$ es

$$\frac{\partial}{\partial}(\ \ )(\ \ - \alpha) + \frac{\partial}{\partial y}(\ \ )(y - \beta) + \frac{\partial}{\partial}(\ \ )(\ \ - \gamma) = 0.$$

Luego la ecuación $\nabla(\ \ ) \times \vec{\ } = \vec{0}$, junto con $(\ \ ) = 0$ nos permite hallar el vértice $\quad$; en consecuencia, también su eje principal $l = \quad + L(\vec{\ })$ (ver figura 13.14).

EJEMPLO C. *eterminar el v rti e, el e e rin i al y el lano tangente en el v rti e el a raboloi e* $^2 + 2y^2 + 4\ y + 4\ + 3 = 0$, *a í omo orma an ni a.*

Tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad ; \quad \delta = |\ \ | = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Como el polinomio característico de $\quad$ es $\quad(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 2)$, se tiene

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \quad , \quad \lambda_3 = 0.$$

Se trata de un paraboloide hiperbólico ya que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, pues $\sqrt{17} > 3$. Como

$$^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

su forma canónica es

$$\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \ \ ^2 + \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \ \ ^2 - 4 \ \ = 0.$$

La dirección del eje principal es la de $\vec{\ } = (0, 0, 1)$ pues

$$\text{Ker}(\ \ ) = \{\ \ + 2y = 0, 2\ \ + 2y = 0\} = \{\ \ = 0, y = 0\}.$$

Además $\nabla(\ , y, \ ) = (2\ \ + 4y, 4y + 4\ , 4)$. Luego

$$\nabla \times \vec{\ } = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \{4y + 4\ \ = 0, 2\ \ + 4y = 0\} \ \Leftrightarrow\ \{\ \ = 0, y = 0\}.$$

En consecuencia, el vértice del paraboloide es de la forma $\quad = (0, 0, \gamma)$ con $\quad(\ \ ) = 0$. Como $(0, 0, \gamma) = 0$ produce $4\gamma + 3 = 0$ se tiene $\gamma = -3/4$. Por tanto, el vértice es

$$= \left(0, 0, -\frac{3}{4}\right).$$

El plano tangente en $\quad$ tiene por ecuación $(\nabla(\ \ ), \overrightarrow{\ \ \ }) = 0$, lo que da $((0, 0, 4), (\ , y, \ + 3/4)) = 0$; es decir, $\quad = -3/4$.

13.4. CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS SEGÚN SUS INVARIANTES

En la sección 13.2 estudiamos algunos invariantes de las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$ (Teorema 13.2.1). Estos son (ver (2.5) y Teorema 13.2.1):

$$\begin{cases} {}_1 = a_{11} + a_{22} + a_{23} \\ {}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 \\ a_{13}/2 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix} \\ \delta = | \quad | \\ \Delta = | \ \bar{} \ | \end{cases} \tag{4.1}$$

donde es la matriz de la forma bilineal asociada a la cuádrica dada en (2.1) (ver (2.3)) y $\bar{}$ es la matriz de la cuádrica (ver (2.2)). Recordar que el polinomio característico de es

$$(\lambda) = | \quad - \lambda \ | = -\lambda^3 + {}_1\lambda^2 - {}_2\lambda + \delta. \tag{4.2}$$

Los invariantes dados en (4.1) no nos permitieron dar una clasificación completa de las cuádricas en la sección 13.2.

Para hacer esta clasificación vamos a estudiar distintos casos según los valores de dos invariantes dados en (4.1).

CASO 1. $\Delta \neq 0$	**CASO 2.** $\Delta = 0$
CASO 1.1: $\delta \neq 0$	CASO 2.1: $\delta \neq 0$
CASO 1.2: $\delta = 0$	CASO 2.2: $\delta = 0$

: $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los autovalores de se tiene $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ (ver (4.2)). Estamos entonces en el caso I de la sección 13.2. Como $\Delta \neq 0$ se obtienen elipsoides, hiperboloides de una hoja o hiperboloides de dos hojas. Su forma canónica es (ver (2.6)):

$$\lambda_1 \ {}^2 + \lambda_2 \ {}^2 + \lambda_3 \ {}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{4.3}$$

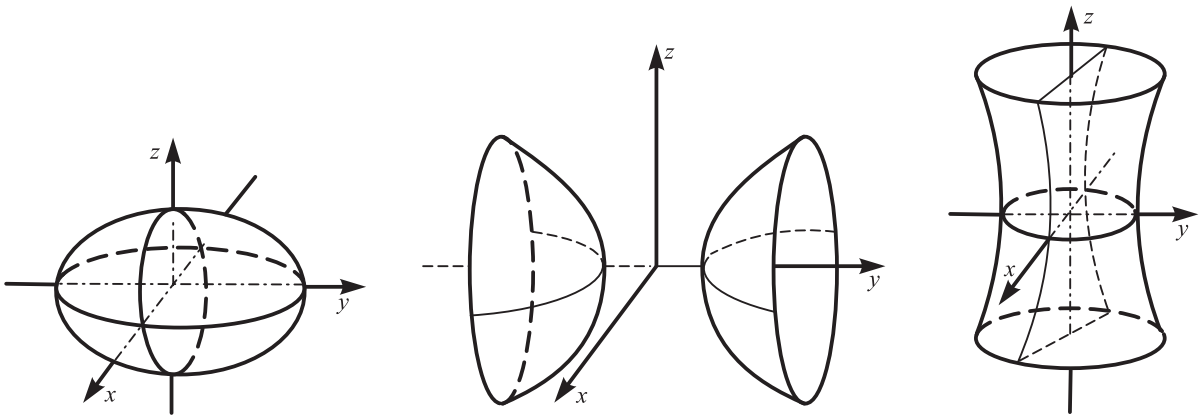
Para distinguir estas superficies es necesario saber la diferencia en valor absoluto entre el número de autovalores positivos y negativos; esto es, la signatura de la forma cuadrática cuya matriz es (ver sección 12.3). Como (4.2) tiene tres raíces reales podemos tener

a): Signatura = 3,

b): Signatura = 1.

En el caso a) o bien todos los autovalores son positivos o todos son negativos. En cualquiera de los casos, si $\Delta > 0$, (4.3) no tiene soluciones reales y si $\Delta < 0$ se tiene un *eli oi e*.

En el caso b) hay dos autovalores positivos y uno negativo o viceversa. En cualquiera de estos casos, si $\Delta > 0$ se obtiene un *i erboloi e e na o a* y si $\Delta < 0$ se tiene un *i erbo loi e e o o a* .



i ra 13.15

* * *

La signatura de una forma cuadrática dada por una matriz se obtiene sabiendo el número de raíces positivas y negativas del polinomio característico de , (λ), o completando cuadrados por el procedimiento descrito en la sección 12.2 (ver la observación al final de la sección 12.2). Recordar que es simétrica y que (λ) tiene todas sus raíces reales.

La *regla e lo igno e e arte* nos proporciona una estimación del número de raíces positivas de un polinomio con coeficientes reales:

$$( ) = a_n \,^{n} + a_{n-1} \,^{n-1} + \cdots + a_1 \, + a_0.$$

Si todas las raíces de ( ) fueran reales y no nulas la *regla e lo igno e e arte* nos da

$$\text{Número de raíces positivas de } = \text{Var}(( )) \tag{4.4}$$

donde Var(( )) es el número de cambios de signo de la sucesión ordenada de coeficientes del polinomio, es decir

$$(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0),$$

sin tener en cuenta los coeficientes nulos. Luego

$$\text{Número de raíces negativas de } = n - \text{Var}(( ))$$

y por tanto

$$\text{signatura}( ) = |\text{Var}(( )) - (n - \text{Var}(( )))| = |2 \text{ Var}(( )) - n|. \tag{4.5}$$

La *regla e lo igno e e arte* se demuestra para polinomios de grado 3 (este es el caso de las cuádricas) en la subsección 2 de la sección 13.5.

: $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$.

Como $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ podemos tener uno o dos autovalores nulos. Si hubiera dos autovalores nulos, digamos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, estamos en el caso III de la sección 13.2 y la forma canónica sería

$$\lambda_1 \,^{2} - b = 0 \quad , \quad \lambda_1 \,^{2} =$$

(ver (2.10) y (2.11)). En ambos casos se tendría $\Delta = 0$. Como $\Delta \neq 0$ solo podemos tener un autovalor no nulo, digamos $\lambda_3 = 0$. Entonces

$$_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \neq 0.$$

La forma canónica es

$$\lambda_1 \ ^2 + \lambda_2 \ ^2 \pm \sqrt{-4\frac{\Delta}{_2}} \ = 0, \tag{4.6}$$

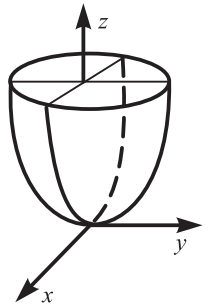
obteniéndose paraboloides elípticos o hiperbólicos.

Tenemos los casos siguientes:

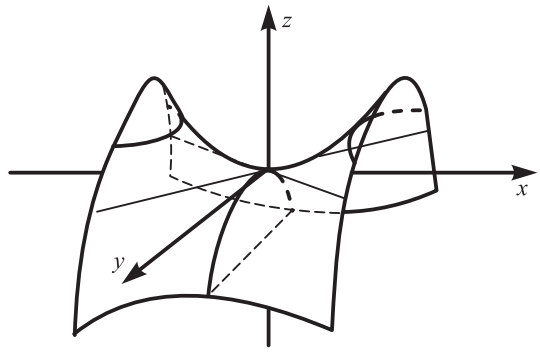
$$\text{a):} \quad _2 = \lambda_1\lambda_2 > 0,$$
$$\text{b):} \quad _2 = \lambda_1\lambda_2 < 0.$$

En el caso a), los dos autovalores tienen el mismo signo y tenemos un *araboloi e elí ti o*.

En el caso b), los dos autovalores tienen distinto signo y tenemos un *araboloi e i er b li o*.



Paraboloide elíptico



Paraboloide hiperbólico

i ra 13.16

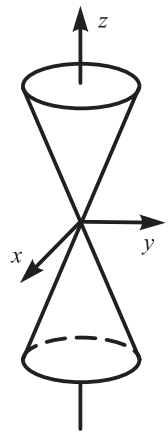
: $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$

Como $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ todos los autovalores de son no nulos. Puesto que $\Delta = 0$ su forma canónica es (ver (2.6)):

$$\lambda_1 \ ^2 + \lambda_2 \ ^2 + \lambda_3 \ ^2 = 0. \tag{4.7}$$

Si los tres autovalores tienen el mismo signo, es decir la signatura de la forma cuadrática es 3, se obtiene *n nto*.

Si hay dos autovalores con un determinado signo y el otro tiene signo contrario, es decir, la signatura de la forma cuadrática es 1, se obtiene un *ono*.



Cono

i ra 13.17

* * *

Para estudiar el caso 2.2, necesitamos un nuevo invariante de la cuádrica (2.1). Este se enuncia en el siguiente resultado:

Teorema 13.4.1

Si para la superficie de segundo grado dada en (2.1) se tiene $\Delta = 0$ y $\delta = 0$, la cantidad

$$_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_2/2 & a_3/2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 & a_1/2 \\ a_{13}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_1/2 & a_3/2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{vmatrix}$$

es un invariante.

Observar que el primer determinante que aparece en la definición de $_3$ es el cofactor del elemento a_{11} de la matriz dada en (2.2), el segundo es el de a_{22} y el tercero el de a_{33}.

La demostración del Teorema 13.4.1 puede verse en la subsección 3 de la sección 13.5.

* * *

: $\Delta = 0$, $\delta = 0$.

Como $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ podemos tener un autovalor nulo solamente, o bien dos o más autovalores nulos. El primer caso corresponde a $_2 \neq 0$ y el segundo a $_2 = 0$

a): $_2 \neq 0$,
b): $_2 = 0$.

En el caso a) podemos suponer $_2 = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$ ($\lambda_3 = 0$). Estamos entonces en el caso II de la sección 13.2 y con $\Delta = 0$, por lo que su forma canónica es (ver (2.9)):

$$\lambda_1 \ ^2 + \lambda_2 \ ^2 = \quad . \tag{4.8}$$

En este caso se obtienen cilindros elípticos, hiperbólicos, dos planos que se cortan o una recta. Para distinguir cada caso necesitamos utilizar el invariante $_3$ descrito en el Teorema 13.4.1. De (4.8) deducimos

$$_3 = \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2(- \ ) = - \ _2 \ .$$

Si $_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ (es decir, ambos autovalores tienen el mismo signo) y $_3 \neq 0$, se obtiene un *ilin ro elí ti o* en (4.8) si $= - \ _3/ \ _2$ tiene el mismo signo que λ_1 y λ_2 (es decir, signo($_1$) $\neq$ signo($_3$)) y no hay solución en caso contrario.

Si $_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ y $_3 = 0$ se tendría $= 0$ en (4.8) y tendríamos una recta.

Si $_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$ (es decir ambos autovalores tienen distinto signo) y $_3 \neq 0$ se obtiene un *ilin ro i erb li o* en (4.8).

Si $_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$ y $_3 = 0$ se tiene $= 0$ en (4.8) y como λ_1 y λ_2 tienen distinto signo tenemos un *ar e lano e ante* .

Nos queda por estudiar el caso b), en el que se tiene $\Delta = 0$, $\delta = 0$, $_2 = 0$. Estamos en el caso III de la sección 13.2.

Hay un autovalor no nulo, digamos $\lambda_1 \neq 0$. (Si los tres autovalores fueran nulos, es decir $_1 = 0$ en este caso, la cuádrica se reduce a un plano).

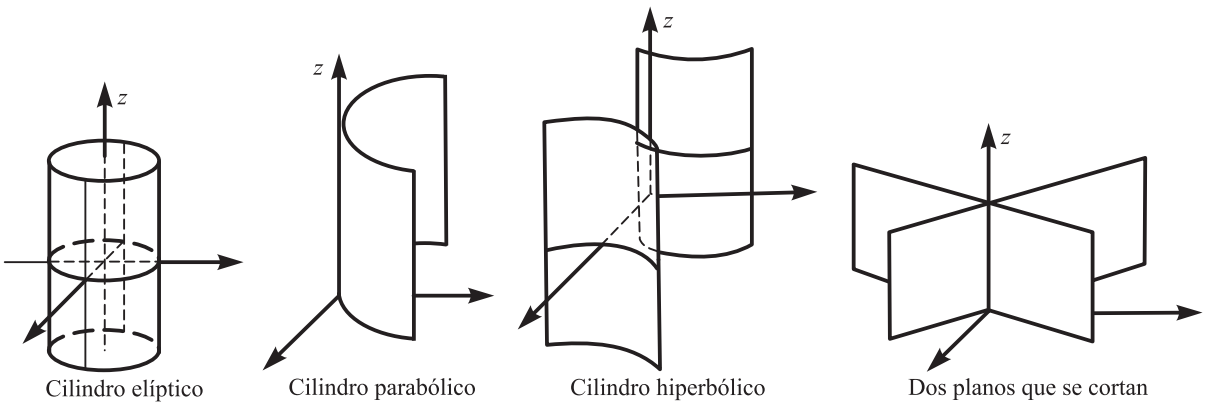
Si la forma canónica es $\lambda_1 \ ^2 - \ = 0$ ($\neq 0$) (ver (2.11)) se tiene un *ilin ro arab li o*. En este caso se tiene

$$_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & - \ /2 \\ 0 & 0 & 0 \\ - \ /2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \ /2 \\ 0 & - \ /2 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 \frac{^2}{4} \neq 0,$$

lo que nos permite calcular conociendo $_3$ y $_1 = \lambda_1$.

Si la forma canónica es $\lambda_1 \ ^2 - b = 0$ tenemos dos *lano aralelo* (si signo(b) = signo(λ_1)), *lano oin i ente* (si $b = 0$), o sin solución (si signo(b) $\neq$ signo(λ_1)). En este caso se tiene

$$_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = 0.$$



Cilindro elíptico | Cilindro parabólico | Cilindro hiperbólico | Dos planos que se cortan

i ra 13.18

* * *

RESUMEN

SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO O CUÁDRICAS

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{pmatrix}.$$

INVARIANTES

$$\Delta = |\overline{A}| \quad , \quad \delta = |A| \quad , \quad s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 \\ a_{13}/2 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix}, \; s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Si

$$\Delta = \delta = 0 \quad , \quad s_3 = |\overline{A}_{11}| + |\overline{A}_{22}| + |\overline{A}_{33}|$$

donde $\overline{A}_{ii}$ es la adjunta del elemento (i, i) de la matriz $\overline{A}$.

AUTOVALORES

Los autovalores λ_1, λ_2, λ_3 de A son las raíces de

$$p_A(x) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + s_1\lambda^2 - s_2\lambda + \delta.$$

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad , \quad s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \quad , \quad \delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

SIGNATURA

$$\text{Signatura}(A) = |2\ \text{Var}(p_A(x)) - 3|$$

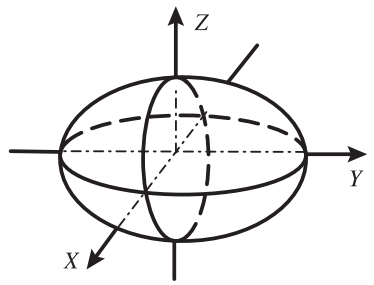
$$\text{Var}(p_A(x)) = \text{Var}(-1,\ s_1,\ -s_2,\ \delta)$$

Figura 13.19

CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS SEGÚN SUS INVARIANTES

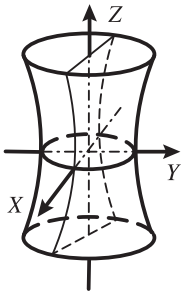
$\Delta \neq 0$	$\delta \neq 0$ Cuádricas con centro	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$	$\Delta > 0$ SIGNATURA $= 3$		No hay soluciones reales
			$\Delta < 0$ SIGNATURA $= 3$		Elipsoide
			$\Delta > 0$ SIGNATURA $= 1$		Hiperboloide de una hoja
			$\Delta < 0$ SIGNATURA $= 1$		Hiperboloide de dos hojas
	$\delta = 0$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm \sqrt{\dfrac{-4\Delta}{s_2}}\, Z = 0$	$s_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$		Paraboloide elíptico
			$s_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$		Paraboloide hiperbólico
$\Delta = 0$	$\delta \neq 0$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 0$	SIGNATURA $= 3$		Un punto
			SIGNATURA $= 1$		Un cono
	$\delta = 0$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \dfrac{s_3}{s_2} = 0$	$s_3 \neq 0$	$s_2 > 0$	Cilindro elíptico ($s_3 \cdot s_1 < 0$)
				$s_2 < 0$	Cilindro hiperbólico
		$\lambda_1 X^2 = \pm \sqrt{\dfrac{-4s_3}{s_1}}\, Y$		$s_2 = 0$	Cilindro parabólico
		$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$	$s_3 = 0$	$s_2 > 0$	Recta
				$s_2 < 0$	Par de planos secantes
		$\lambda_1 X^2 = b$		$s_2 = 0$ $s_1 \neq 0$	Dos planos paralelos o coincidentes

$\Delta \neq 0, \delta \neq 0$



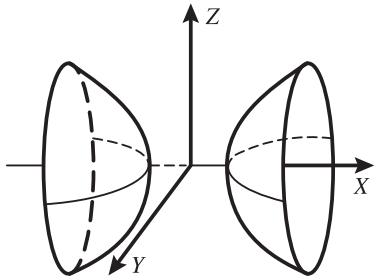
Elipsoide

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$



Hiperboloide de una hoja

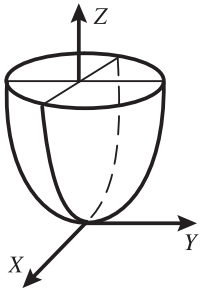
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$



Hiperboloide de dos hojas

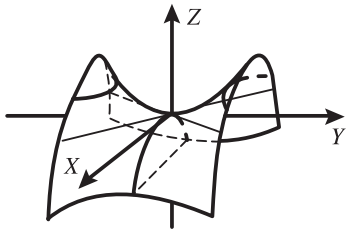
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

$\Delta \neq 0, \delta = 0$



Paraboloide elíptico

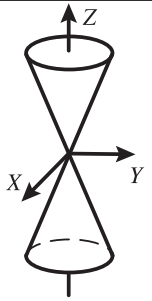
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=Z$$



Paraboloide hiperbólico

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=Z$$

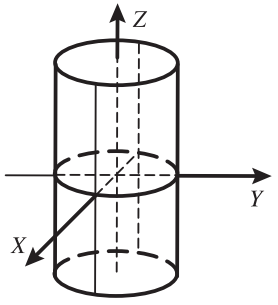
$\Delta = 0, \delta \neq 0$



Cono

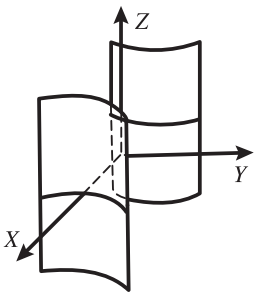
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=Z^2$$

$\Delta = 0, \delta = 0$



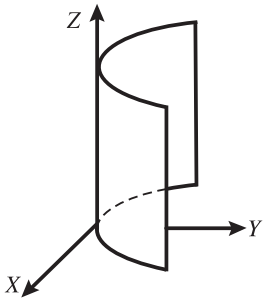
Cilindro elíptico

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$



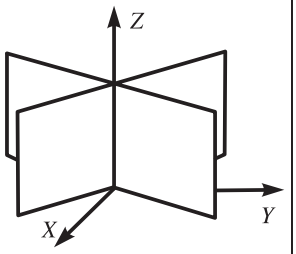
Cilindro hiperbólico

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$



Cilindro parabólico

$$Y=aX^2$$



Dos planos secantes

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$$

i ra 13.21

EJEMPLO A. *Clasificar la superficie de segundo grado*

$$^2 - y^2 - \ ^2 - 2y \ - \ + 3y + 3 \ - 2 = 0.$$

Encontramos sus invariantes:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -1 & -1 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & 3/2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

$$_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + (1 - 1) = -2 \neq 0 \quad ;$$

$$_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3/2 \\ -1 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Según la tabla de la figura 13.20 se trata de un par de planos secantes.

Para encontrar las ecuaciones de estos planos despejamos en la superficie dada considerando y, como fijas:

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-y^2 - \ ^2 - 2y \ + 3y + 3 \ - 2)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \left(y + \ - \frac{3}{2} \right).$$

Por tanto las ecuaciones de los planos son

$$= y + \ - 1 \quad ; \quad = -y - \ + 2$$

y la superficie dada puede escribirse de la forma

$$(\ + y + \ - 2)(\ - y - \ + 1) = 0.$$

* * *

EJEMPLO B. *Clasificar, con la tabla de la figura* 13.20, *la superficie siguiente*:

a) $3 \ ^2 + 2y^2 + 3 \ ^2 - 2 \ - 2 \ - 4y - 2 \ - 5 = 0.$

b) $^2 + y^2 + \ ^2 - 4 \ - 4y + 2 = 0.$

c) $y^2 + 4 \ + 1 = 0.$

d) $^2 + 2y^2 + 4 \ y + 4 \ + 3 = 0.$

En el caso a) tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -40 \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

Según el cuadro de la figura 13.20 ya sabemos que es una cuádrica con centro. Como

$$_1 = 8 \quad , \quad _2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

y la sucesión

$$(-1, \ _1, \ - \ _2, \delta) = (-1, 8, \ -20, 16)$$

tiene 3 cambios de signo, la signatura es $|2(3) - 3| = 3$. Como $\Delta = -40 < 0$, la cuádrica de a) es un *eli oi e*, como ya se obtuvo en el ejemplo de la sección 13.1.

En el caso b) ya se obtuvo en el ejemplo A de la sección 13.2 que $\Delta = 6 \neq 0$, $\delta = -3 \neq 0$. Como

$$_1 = 3 \quad , \quad _2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

la sucesión

$$(-1, \ _1, \ - \ _2, \delta) = (-1, 3, 1, \ -3)$$

tiene dos cambios de signo, por lo que la signatura es $|2(2) - 3| = 1$. Como $\Delta = 6 > 0$, la cuádrica de b) es un *i erboloi e e na o a*, como ya se obtuvo en el ejemplo A de la sección 13.2.

En el caso c) tenemos $\Delta = -4$, $\delta = -4$ como ya se obtuvo en el ejemplo B de la sección 13.2. Tenemos otra cónica con centro. Como

$$_1 = 1 \quad , \quad _2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

la sucesión

$$(-1, \ _1, \ - \ _2, \delta) = (-1, 1, 4, \ -4)$$

tiene dos cambios de signo, por lo que la signatura es $|2(2) - 3| = 1$. Como $\Delta = -4 < 0$, la cuádrica de c) es un *i erboloi e e o o a* , como ya se obtuvo en el ejemplo B de la sección 3.2.

Para el caso d) tenemos $\Delta = 8$, $\delta = 0$, como se obtuvo en el ejemplo C de la sección 13.3. Como

$$_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0,$$

se trata de un *araboloi e i erb li o*, según el cuadro de la figura 13.20. Ya se obtuvo este resultado en el ejemplo C de la Sección 13.3.

EJEMPLO C. *la i i ar*, *an o la tabla e la ig ra* 13.20, *la ri a e e a i n*

$$^2 + y^2 - 2 \ y - 3 \ - \ + 3 = 0.$$

Tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & -1/2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{11}{4} \neq 0$$

y

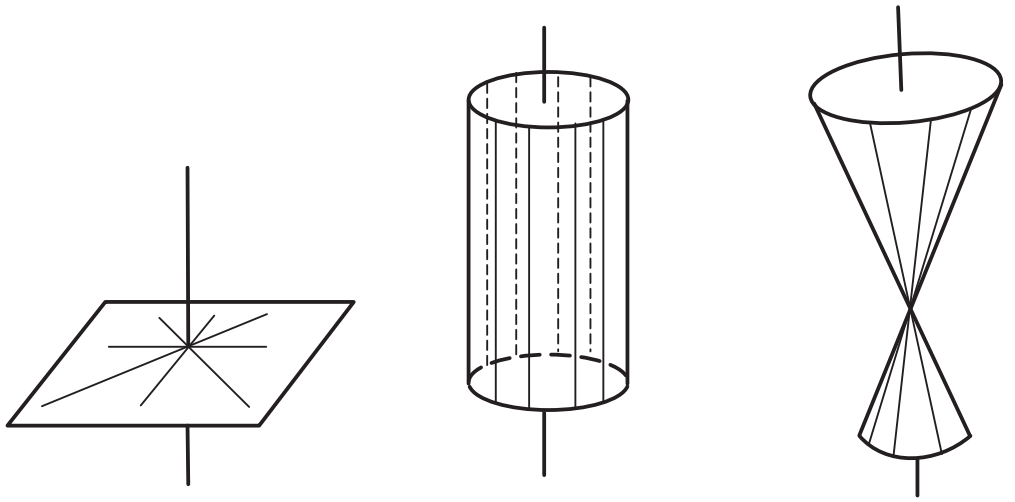
$$_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

se trata de un *ilin ro arab li o* según el cuadro de la figura 13.20.

13.5. NOTAS ADICIONALES

1. El hiperboloide de una hoja como superficie reglada

Una superficie se denomina *er i ie regla a* si por cada uno de sus puntos pasa al menos una recta totalmente contenida en la superficie. Ejemplos sencillos de superficies regladas son los «cilindros» estudiados en la sección 13.1. Otros ejemplos se obtienen girando una recta, llamada *generatri* , alrededor de otra fija, llamada *e e*. Si la generatriz es perpendicular al eje se obtiene un *lano*, si es paralela se obtiene un *ilin ro* y si corta al eje sin ser perpendicular a él se obtiene un *oble ono re to* con vértice en el punto de intersección (ver figura 13.21).



i ra 13.21

Podríamos ahora preguntarnos cuál es la superficie que se obtiene cuando la generatriz no es paralela ni corta al eje; para tratar de identificar esta superficie encontramos sus ecuaciones en un caso sencillo. Supongamos que el eje coincide con el eje y que la generatriz pasa por el punto $(a, 0, 0)$ y tiene como vector director $(0, \beta, 1)$ con $\beta \neq 0$.

Las ecuaciones paramétricas de la generatriz son

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

y las ecuaciones del giro alrededor del eje vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\operatorname{sen}\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\beta\operatorname{sen}\varphi \\ \beta\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $' = t$ deducimos que

$$(')^2 + (y')^2 = (a\cos\varphi - '\beta\operatorname{sen}\varphi)^2 + (a\operatorname{sen}\varphi + '\beta\cos\varphi)^2 = a^2 + \beta^2(')^2.$$

Por tanto, su ecuación es $(')^2 + (y')^2 - \beta^2(')^2 = a^2$, que representa un *i erboloi e e na o* a de semiejes a, a y $\dfrac{a}{\beta}$ y de centro el origen de coordenadas.

Este resultado no es debido a una casualidad, sino que es cierto para todo hiperboloide reglado; en efecto, para demostrarlo observemos que es suficiente probarlo para un hiperboloide de ecuación

$$\frac{^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{^2}{^2} = 1 \tag{5.1}$$

ya que cualquier otro se reduce a este mediante una transformación ortogonal y una traslación en $\mathbb{R}^3$. Para el hiperboloide dado en (5.1) podemos tomar la recta

$$(, y,) = (a, 0, 0) + t(0, b,) \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

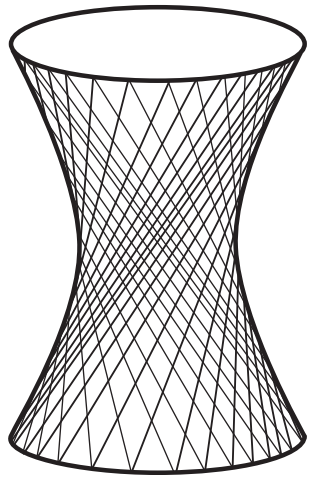
y hacerla moverse alrededor del origen siguiendo la elipse de ecuación $\dfrac{^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el plano $= 0$. Esto se hace con la transformación

$$\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\dfrac{a}{b}\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \dfrac{b}{a}\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

cuya comprobación se deja para el lector. Observar que la recta

$$(, y,) = (a, b, 0) + t(0, -b,) \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

también genera el hiperboloide de una hoja dado en (5.1) con la misma transformación dada en (5.2).



El hiperboloide de una hoja como superficie reglada

i ra 13.22

2. La regla de los signos de Descartes para polinomios de grado 3

En la sección 13.4 hemos usado la *regla e lo igno e e arte* para hallar la signatura de una forma cuadrática dada por una matriz de orden 3, sin necesidad de calcular los autovalores de , ni de utilizar la técnica de completar cuadrados que expusimos en el Capítulo 12. Recordar que, puesto que es simétrica, el polinomio característico de tiene todas sus raíces reales.

La *regla e lo igno e e arte* proporciona una acotación del número de raíces positivas de un polinomio con coeficientes reales. Cuando todas las raíces del polinomio son números reales, la regla permite saber el número de las que son positivas y no nulas, sin más que contar las variaciones de signo de los coeficientes del polinomio.

Dada una sucesión ordenada $(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0) =$ de números reales, llamamos *varia i n* de al número de cambios de signo en la sucesión , y lo denotamos por Var( ). Si $( ) = a_n{}^n + \cdots + a_1 + a_0$ es un polinomio con $a \in \mathbb{R}$, $= 0, 1, ..., n$, escribimos Var(( )) para denotar la variación de la sucesión de los coeficientes de ( ). Cuando alguno de los elementos de esta sucesión sea cero, se elimina de la sucesión a efectos de encontrar su variación. Así, por ejemplo, si $= (2, 0, 0, -1)$ se tiene que Var( ) = 1.

En esta sección daremos una demostración elemental de la *regla e lo igno e e arte* para polinomios de grado 3 con tres raíces reales, que es exactamente lo que se necesita en la sección 13.4 para la clasificación de las cuádricas usando sus invariantes.

Sea

$$( ) = {}^3 + a_2{}^2 + a_1 + a_0 \quad , \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},$$

un polinomio con tres raíces reales, λ_1, λ_2, λ_3, iguales o distintas. Supondremos que todas son no nulas, es decir $a_0 \neq 0$. Si alguna de ellas lo fuera tendríamos $a_0 = 0$ y considerando ( )/ se tendría un polinomio de grado 2, del que es fácil saber cuántas de sus raíces son positivas.

Puesto que

$$( ) = (- \lambda_1)(- \lambda_2)(- \lambda_3),$$

igualando coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} a_2 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ a_1 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ a_0 &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Lema 13.5.1

Sea $( ) = {}^3 + a_2 {}^2 + a_1 + a_0 \in {}_{\mathbb{R}}[\ ]$ un polinomio de grado 3 con $a_0 \neq 0$ y tal que todas sus raíces son reales. Entonces,

$$\text{Pos}(( )) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Var}(( )) = 0,$$

donde Pos(( )) es el número de raíces positivas de ( ).

Demostración.

$\Leftarrow$ Si Var(( )) = 0 se tiene $a_2 \geqslant 0$, $a_1 \geqslant 0$, $a_0 > 0$. Entonces ( ) > 0 para todo $\in (0, \infty)$, por lo que ( ) no posee raíces positivas.

$\Rightarrow$) Sean λ_1, λ_2, λ_3 las tres raíces reales de ( ). Como nuestra hipótesis es que Pos(( )) = 0 se tiene que $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. De las fórmulas (5.3) se deduce que $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$, por lo que Var(( )) = 0. ■

Nota Sea $( ) = - {}^3 + b_2 {}^2 + b_1 + b_0 \in {}_{\mathbb{R}}[\ ]$ un polinomio de grado 3 con $b_0 \neq 0$ y que tiene todas sus raíces reales. Entonces,

$$\text{Pos}(( )) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Var}(( )) = 0.$$

Esta equivalencia se prueba aplicando el Lema 13.5.1 a $( ) = - ( ) = {}^3 - b_2 {}^2 - b_1 - b_0$, ya que las raíces positivas de ( ) son las mismas que las raíces positivas de ( ) y Var(1, $-b_2$, $-b_1$, $-b_0$) = Var(-1, b_2, b_1, b_0).

Lema 13.5.3

Sea $( ) = {}^3 + a_2 {}^2 + a_1 + a_0 \in {}_{\mathbb{R}}[\ ]$ un polinomio de grado 3 con $a_0 \neq 0$ y con todas sus raíces reales. Se tiene que

$$\text{Var}(( )) + \text{Var}((-)) = 3.$$

Demostración. No puede ser $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ ya que si lo fueran el polinomio $( ) = {}^3 + a_0$ solo tendría una raíz real.

Examinaremos por separado los casos siguientes:

i) $a_2 \neq 0$, $a_1 \neq 0$.

ii) $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$.

iii) $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$.

i) Los distintos signos que pueden tomar a_2, a_1, a_0 dan 8 posibilidades. Estudiando cada una de ellas puede conseguirse el resultado. La tabla de la figura 13.23 explicita uno de estos casos. Se invita al lector a que compruebe los restantes terminando de rellenar la tabla.

Signos de $(\ )$	Var$(\ (\ ))$	Signos de $(-\ )$	Var$(\ (-\ ))$	Var$(\ (\ ))$ + Var$(\ (-\ ))$
$+\ +\ +\ +$	0	$-\ +\ -\ +$	3	3
$+\ +\ +\ -$				
$+\ +\ -\ +$				
$+\ +\ -\ -$				
$+\ -\ +\ +$				
$+\ -\ +\ -$				
$+\ -\ -\ +$				
$+\ -\ -\ -$				

ii) En este caso $(\ ) = {}^3 + a_1\ + a_0$. De las fórmulas (5.3) deducimos $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, por lo que las tres raíces de $(\ )$ no pueden tener el mismo signo. Renumerando, si fuera necesario, tenemos por consiguiente dos casos:

a) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0.$

b) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0.$

En el caso a) escribimos $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3)$ y usamos (5.3) para obtener

$$a_1 = \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 = -(\lambda_2 + \lambda_3)^2 + \lambda_2\lambda_3 = -\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_2\lambda_3 < 0.$$

En el caso b) escribimos $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ y usamos (5.3) para obtener

$$a_1 = \lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 < 0.$$

En cualquiera de los dos casos, como $a_1 < 0$, los signos de los coeficientes no nulos de $(\ )$ pueden ser $(+,\ -,\ +)$ ó $(+,\ -,\ -)$. En cada uno de estos casos los signos de $(-\ )$ son $(-,\ +,\ +)$ y $(-,\ +,\ -)$ respectivamente. Se tiene, por tanto, el resultado.

iii) En este caso $(\ ) = {}^3 + a_2\ {}^2 + a_0$. Distinguiremos dos casos:

a) $a_0 > 0.$

b) $a_0 < 0.$

En el caso a) tendría que ser $a_2 < 0$. En efecto, si fuera $a_2 > 0$, $(\ ) > 0$ para todo $\in (0, \infty)$ y, por consiguiente, las tres raíces reales de $(\ )$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ serían negativas. Pero entonces, en (5.3) tendríamos

$$0 = a_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 > 0$$

que es una contradicción. Como $a_2 < 0$ y $a_0 > 0$ los signos de los coeficientes de $(\ )$ son $(+,\ -,\ +)$ y los de $(-\ )$ son $(-,\ -,\ +)$, por lo que Var$(\ (\ ))$ + Var$(\ (-\ ))$ = 2 + 1 = 3.

En el caso b) tendría que ser $a_2 > 0$. En efecto, si fuera $a_2 < 0$, $(-\ ) = -\ {}^3 + a_2\ {}^2 + a_0 < 0$ para todo $\in (0, \infty)$ y, por consiguiente, las tres raíces reales de $(\ )$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, serían positivas. Pero entonces, en (5.3) tendríamos de nuevo

$$0 = a_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 > 0$$

que es una contradición. Como $a_2 > 0$ y $a_0 < 0$ los signos de los coeficientes de $(\ )$ son $(+,\ +,\ -)$ y los de $(-\ )$ son $(-,\ +,\ -)$, por lo que Var$(\ (\ ))$ + Var$(\ (-\ ))$ = 1 + 2 = 3. ■

Nota Si en el Lema 13.5.3 suponemos que todos los coeficientes de $(\ )$ son no nulos, estamos en el caso i) de su demostración, y entonces no es necesario suponer que todas sus raíces son reales para concluir el resultado. Pero, en general, es necesario tener la condición de que todas sus raíces sean reales para concluir el resultado, como puede comprobarse examinando $(\ ) = {}^3 - 1$.

Nota Sea $(\ ) = -{}^3 + b_2{}^2 + b_1 + b_0 \in \mathbb{R}[\ ]$ con $b_0 \neq 0$ y todas sus raíces reales. Si $(\ ) = -(\ ) = {}^3 - b_2{}^2 - b_1 - b_0$ se tiene

$$\text{Var}(\ (\ )) = \text{Var}(\ (\ )) \quad \text{y} \quad \text{Var}(\ (-\ )) = \text{Var}(\ (-\ )).$$

Usando el Lema 13.5.3 para $(\ )$ se obtiene

$$\text{Var}(\ (\ )) + \text{Var}(\ (-\ )) = 3$$

también en este caso.

Proposición 13.5.6 (Regla de los signos de Descartes)

Sea $(\ ) = a_3{}^3 + a_2{}^2 + a_1 + a_0 \in \mathbb{R}[\ ]$ un polinomio de grado 3 con $a_0 \neq 0$ y con todas sus raíces reales. Entonces,

$$\text{Pos}(\ (\ )) = \text{Var}(\ (\ ))$$

donde $\text{Pos}(\ (\ ))$ es el número de raíces positivas de $(\ )$.

Demostración. Dividiendo por a_3, si fuera necesario, podemos suponer $a_3 = 1$ ya que $\text{Var}\left(\frac{1}{a_3}\ (\ )\right) = \text{Var}(\ (\ ))$. Así que podemos suponer

$$(\ ) = {}^3 + a_2{}^2 + a_1 + a_0 \quad , \quad a_0 \neq 0.$$

Si $\text{Pos}(\ (\ )) = 0$, el resultado se deduce del Lema 13.5.1.

Si $\text{Pos}(\ (\ )) = 1$, sea $\lambda_1 > 0$ la raíz positiva de $(\ )$, de manera que $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. De (5.3), $a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. Tendríamos los siguientes signos de los coeficientes de $(\ )$ y su variación si $a_2 \neq 0$, $a_1 \neq 0$:

Signos	$\text{Var}(\ (\ ))$
$+\ +\ +\ -$	1
$+\ +\ -\ -$	1
$+\ -\ +\ -$	3
$+\ -\ -\ -$	1

Si $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ tendríamos

Signos	$\text{Var}(\ (\ ))$
$+\ +\ -$	1
$+\ -\ -$	1

Si $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$ tendríamos

Signos	Var(( ))
+ + −	1
+ − −	1

Observar que no puede ser $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ ya que el polinomio $( ) = {}^3 + a_0$ solo tiene una raíz real.

Tenemos que descartar el caso (+, −, +, −) que da Var(( )) = 3. Si fuera Var(( )) = 3, del Lema 13.5.3 deduciríamos Var((−)) = 0 y por la Nota 13.5.2 tendríamos Pos((−)) = 0, por lo que Pos(( )) = 3 y estamos suponiendo Pos(( )) = 1.

Si Pos(( )) = 2, tendríamos Pos((−)) = 1. También Pos(− (−)) = 1. Podemos aplicar ahora el caso anterior para deducir Var((−)) = Var(− (−)) = 1. Por la Nota 13.5.5, Var(( )) = 3 − 1 = 2.

Si Pos(( )) = 3, tendríamos Pos((−)) = 0. Por la Nota 13.5.2, Var((−)) = 0. De la Nota 13.5.5 deducimos Var(( )) = 3. ■

3. Demostración del Teorema 13.4.1

En este apartado realizamos la demostración del Teorema 13.4.1 que se utilizó en la clasificación de las cuádricas cuando $\Delta = 0$ y $\delta = 0$. Recordar que una cuádrica puede escribirse como

$$(, y,) = (, y, , 1) \begin{pmatrix} \\ y \\ \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.3}$$

donde $\bar{}$ es una matriz simétrica de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Escribiremos $\bar{}_i$ para denotar la matriz adjunta del elemento que ocupa el lugar $(i,)$ en la matriz $\bar{}$, $1 \leqslant i, \leqslant 4$.

Proposición 13.5.7

La cantidad $_3 = |\bar{}_{11}| + |\bar{}_{22}| + |\bar{}_{33}|$ permanece invariante mediante transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Sea la matriz de una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$; la transformación que tiene como matriz

$$C_1 = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

es ortogonal en $\mathbb{R}^4$ y transforma (5.3) en una cuádrica con matriz $\bar{\ } = {}^t_1\bar{\ }\ _1$. Puesto que

$$\bar{}(\lambda) = |\bar{\ } - \lambda\ | = |\ {}^t_1\bar{\ }\ _1 - \lambda\ {}^t_1\ _1| = |\bar{\ } - \lambda\ | = \ \bar{}(\lambda)$$

los coeficientes del polinomio característico de $\bar{\ }$, $\bar{}(\lambda) = |\bar{\ } - \lambda\ |$, permanecen invariantes mediante transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$. El término independiente de $\bar{}(\lambda)$ es $\bar{}(0) = |\bar{\ }| = \Delta$.

Para hallar el coeficiente de λ en $\bar{}(\lambda)$ observamos que los únicos términos con potencia λ provienen de multiplicar $(a_{ii} - \lambda)$ por su cofactor y por tanto es

$$-(|\bar{\ }_{11}| + |\bar{\ }_{22}| + |\bar{\ }_{33}| + |\bar{\ }_{44}|).$$

Al mismo resultado se puede llegar observando que el coeficiente de λ en $\bar{}(\lambda)$ *e* $\frac{\bar{}}{\lambda}(0)$ y aplicar la fórmula para derivar un determinante que se pidió demostrar en el ejercicio 6 de la sección 2.7.

Ahora bien, como $|\bar{\ }_{44}| = \delta$ ya sabemos que es un invariante (ver Teorema 13.2.1), se tiene que $\ _3 = |\bar{\ }_{11}| + |\bar{\ }_{22}| + |\bar{\ }_{33}|$ tiene que permanecer invariante por transformaciones ortogonales. ■

Lema 13.5.8

Sea $\ = (b_i\ )_{i,\ =1,\ldots,n}$ una matriz simétrica de orden *n*. Si $|\ \ | = 0$ y $|\ _{nn}| = 0$, entonces $|\ _{in}| = |\ _{ni}| = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Demostración. Sea $\ = (\ _i\ )_{i,\ =1,\ldots,n}$ la matriz de los cofactores de $\ $, es decir $\ _i = (-1)^{i+}\ |\ _i\ |$. Como $|\ \ | = 0$ se tiene $\ ^t = 0$ (ver las fórmulas que preceden al Teorema 2.4.2).

Sea $\ $ la matriz de tamaño $n \times (n-1)$ que se obtiene de $\ $ eliminando la última columna. Si el rango de $\ $ es inferior a $n-1$, todos los menores de orden $n-1$ de $\ $ deben ser nulos; estos menores coinciden con $|\ _{in}| = |\ _{ni}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Supongamos que el rango de $\ $ es $n-1$. De $\ ^t = 0$ se deduce el sistema (observar que $\ _{nn} = |\ _{nn}| = 0$)

$$\left.\begin{array}{rrcr} b_{11}\ _{n1} + & b_{12}\ _{n2} + \cdots + & b_{1,n-1}\ _{n,n-1} = 0 \\ b_{21}\ _{n1} + & b_{22}\ _{n2} + \cdots + & b_{2,n-1}\ _{n,n-1} = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1}\ _{n,1} + & b_{n-1,2}\ _{n,2} + \cdots + & b_{n-1,n-1}\ _{n,n-1} = 0 \\ b_{n,1}\ _{n,1} + & b_{n,2}\ _{n,2} + \cdots + & b_{n,n-1}\ _{n,n-1} = 0 \end{array}\right\} \qquad (5.5)$$

obtenido al multiplicar las filas de $\ $ por la última columna de $\ ^t$. El sistema (5.5), con incógnitas $\ _{ni}$, $i = 1, \ldots, n-1$, tiene $n-1$ incógnitas y n ecuaciones, siendo $\ $ la matriz de sus coeficientes. Como $\ $ tiene rango $n-1$ y (5.5) es un sistema homogéneo con $n-1$ incógnitas se ha de tener $\ _{ni} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, por el teorema de Rouché-Frobenius (Teorema 1.2.4). Esto finaliza la demostración del Lema 13.5.8. ■

Sea

$$\begin{pmatrix} \ \\ y \\ \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad (5.6)$$

la ecuación de una traslación en $\mathbb{R}^3$. Al aplicar esta traslación a (5.3) se obtiene

$$(\ _1, y_1, \ _1) = (\ _1, y_1, \ _1, 1) - \begin{pmatrix} \ _1 \\ y_1 \\ \ _1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con

$$- = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 & b_1 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 & b_2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

donde

$$b_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial}(\alpha, \beta, \gamma) = a_{11}\alpha + \frac{1}{2}a_{12}\beta + \frac{1}{2}a_{13}\gamma + \frac{a_1}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\alpha, \beta, \gamma) = a_{22}\beta + \frac{1}{2}a_{12}\alpha + \frac{1}{2}a_{23}\gamma + \frac{a_2}{2}$$

$$b_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial}(\alpha, \beta, \gamma) = a_{33}\gamma + \frac{1}{2}a_{13}\alpha + \frac{1}{2}a_{23}\beta + \frac{a_3}{2}$$

$$b = \ (\alpha, \beta, \gamma). \tag{5.8}$$

Lema 13.5.9

Sea $\bar{}$ la matriz (5.7) que se obtiene al aplicar la traslación (5.6) a la cuádrica (5.3). Se tiene

$$|\bar{}_{11}| = |\bar{}_{11}| + 2\alpha|\bar{}_{14}| + \alpha^2|\bar{}_{44}| \quad , \quad |\bar{}_{22}| = |\bar{}_{22}| + 2\beta|\bar{}_{24}| + \beta^2|\bar{}_{44}|,$$
$$|\bar{}_{33}| = |\bar{}_{33}| + 2\gamma|\bar{}_{34}| + \gamma^2|\bar{}_{44}|.$$

Demostración. Demostraremos solamente la primera igualdad. El resto se hace de manera similar. Tenemos

$$|\bar{}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & b_2 \\ a_{23}/2 & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & b \end{vmatrix}.$$

Multiplicar la primera columna por β, la segunda por γ y restar el resultado de la tercera. Usando (5.8) se tiene

$$|\bar{}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & (a_{12}\alpha + a_2)/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} & (a_{13}\alpha + a_3)/2 \\ b_2 & b_3 & b \end{vmatrix}$$

con

$$b = (\alpha, \beta, \gamma) - \beta b_2 - \gamma b_3 = a_{11}\alpha^2 + \frac{1}{2}a_{12}\alpha\beta + \frac{1}{2}a_{13}\alpha\gamma + a_1\alpha + \frac{1}{2}a_2\beta + \frac{1}{2}a_3\gamma + a.$$

Multiplicar la primera fila por β, la segunda por γ y restar el resultado de la tercera. Se tiene

$$|\bar{}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & \frac{1}{2}(a_{12}\alpha + a_2) \\ a_{23}/2 & a_{33} & \frac{1}{2}(a_{13}\alpha + a_3) \\ \frac{1}{2}(a_{12}\alpha + a_2) & \frac{1}{2}(a_{13}\alpha + a_3) & a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a \end{vmatrix}.$$

Este último determinante puede escribirse como suma de cuatro determinantes (ver la Propiedad 2 de los determinantes en la Sección 2.2) de la forma

$$|\bar{}_{11}| = |\bar{}_{11}| + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ \frac{1}{2}a_{12}\alpha & \frac{1}{2}a_{13}\alpha & \frac{a_1}{2}\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & \frac{1}{2}a_{12}\alpha \\ a_{23}/2 & a_{33} & \frac{1}{2}a_{13}\alpha \\ \frac{a_2}{2} & \frac{a_3}{2} & \frac{a_1}{2}\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 & \frac{1}{2}a_{12}\alpha \\ a_{23}/2 & a_{33} & \frac{1}{2}a_{13}\alpha \\ \frac{1}{2}a_{12}\alpha & \frac{1}{2}a_{13}\alpha & a_{11}\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= |\bar{}_{11}| + \alpha|\bar{}_{41}| + \alpha|\bar{}_{14}| + \alpha^2|\bar{}_{44}|,$$

lo que demuestra el resultado. ∎

Con los resultados anteriores puede demostrarse fácilmente el Teorema 13.4.1, que volvemos a enunciar a continuación:

Teorema 13.5.10

Si para la cuádrica dada en (2.1) se tiene $\Delta = |\bar{}| = 0$ y $\delta = |\bar{}_{44}| = 0$, la cantidad

$$_3 = |\bar{}_{11}| + |\bar{}_{22}| + |\bar{}_{33}|$$

es un invariante.

Demostración. La Proposición 13.5.7 prueba que $_3$ permanece invariante mediante transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$. Al considerar las traslaciones, los Lemas 13.5.8 y 13.5.9 muestran que $|\bar{}_{11}|$, $|\bar{}_{22}|$ y $|\bar{}_{33}|$ permanecen invariantes. Por tanto, $_3$ queda invariante por cualquier movimiento de $\mathbb{R}^3$. ∎

EJERCICIOS CAPÍTULO 13

1. Hacer un estudio lo más detallado posible de las superficies de segundo grado que se indican (encontrar tipo, forma canónica, ejes, centro, ...):

   a) $2\ ^2 + 2y^2 + 2\ ^2 + 2\quad - 2\ y - 2y\ = 1.$

   b) $2\ ^2 - 6y^2 - 2\ ^2 - 2\quad + 10\ \ - 6y - 1 = 0.$

   c) $-2y^2 + \quad - 4y + 6\ \ + 5 = 0.$

   d) $2\ ^2 + 2y^2 - 4\ ^2 - 5\ y - 2\quad - 2y\ \ - 2\ \ - 2y + \quad = 0.$

2. Clasificar la cuádrica $3\ ^2 + 2y^2 + 2\ ^2 + 2y\ \ + 4\ \ + 2y - 5\ \ + 7 = 0$ encontrando sus ejes, si los tiene.

3. Considerar las cuádricas que admiten por ecuaciones

$$^2 - 2y^2 + \alpha\ ^2 - 2\quad + 2y\ \ + 2\ \ + 1 = 0$$

   para α real. Estudiar para que valores de α la cuádrica anterior es un paraboloide (elíptico o hiperbólico) y encontrar la ecuación del eje principal.

4. Indicar el tipo y la forma canónica de las cuádricas dadas por las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicios de repaso

Capítulos 7 a 13.

A continuación presentamos varios ejercicios que pueden servir para repasar los conceptos introducidos en los Capítulos 7 a 13. Los ejercicios del 1 al 34 están ordenados de acuerdo con el orden de los capítulos de este libro. Del 35 al 44 el grado de dificultad es mayor que en los anteriores. El resto son problemas que se han propuesto en varias convocatorias a los alumnos de primer curso de los estudios en Matemáticas y Físicas de la Universidad Autónoma de Madrid.

1. a) Encontrar la ecuación del haz de rectas que pasa por el punto $= (3, 1)$.

   b) De todas las rectas que pasan por el punto del apartado anterior, determinar la ecuación cartesiana de aquellas cuya distancia al origen sea 1.

2. a) Encontrar el punto de intersección de las rectas

$$(, y,) = (0, 1, 2) + t(1, -1, 3),$$
$$(, y,) = (3, 0, 4) + (1, 1, -4).$$

   b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta perpendicular a las dos anteriores que pasa por su punto de intersección.

3. Encontrar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por $= (1, 1, 1)$ y es paralela a los planos

$$\pi_1: \quad + y + \quad = 1,$$
$$\pi_2: (, y,) = t(1, 1, 2) + (1, -1, 1).$$

4. Sean $_1$ y $_2$ las proyecciones ortogonales del punto $= (-1, 2, 0)$ sobre los planos de ecuaciones

$$\pi_1: \quad - y - \quad = 2,$$
$$\pi_2: (, y,) = (1, -1, 0) + t(1, 0, 1) + (1, 2, 0).$$

   Encontrar $_1$, $_2$ y el área del triángulo $\widehat{}$.

5. Hallar la distancia entre las rectas

$$r_1:\ \left.\begin{array}{rl} -y+ & =1 \\ 2\ +y & =3 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad r_2:\ \left.\begin{array}{rl} y+ & =0 \\ -2y+ & =1 \end{array}\right\}.$$

6. Dado el plano $\pi: 5\ -3y+4\ =1$, hallar la recta paralela al vector $(5, 3, -4)$, contenida en π y que esté más próxima al punto $(1, 0, 0)$.

7. Dados los puntos $\quad=(2, -1, 1)$ y $\quad=(0, 1, 2)$, la recta r de ecuación $(\ , y,\ )=(1, 0, 0)+t(3, -2, 1)$ y el plano $\pi: 2\ \underline{+}\ -1=0$, hay exactamente dos paralelogramos, uno de cuyos lados es el segmento $\underline{\quad}$ y cuyos dos restantes vértices están, respectivamente, en r y π. Hallar los vértices de estos paralelogramos y el volumen del paralelepípedo que los tiene por caras.

8. Hallar la ecuación de un plano que contenga a la recta $\ -1=y=\ $ y diste lo mismo del origen que del punto $\ =(2, 4, -4)$.

9. Encontrar la recta r que corta y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2 dadas por

$$r_1:\ \begin{cases} \ =-t \\ y=2+2t \\ \ =-2 \end{cases}, \qquad r_2:\ \begin{cases} \ =1-t \\ y=3-t \\ \ =-3+t\,. \end{cases}$$

10. Hallar la longitud de la proyección ortogonal del segmento $\overline{\quad}$ sobre el plano $3\ +2\ =0$, donde $\ =(3, 1, 2)$ y $\ =(-5, 0, 1)$.

11. Diagonalizar las matrices dadas mediante un cambio de base ortonormal e indicar el cambio de base.

a) $\quad=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\quad=\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Demostrar que todos los autovalores de una aplicación antisimétrica no singular son imaginarios puros. (*ota*: $\mathcal{A}$: $\ \rightarrow\ $ es antisimétrica si $(\mathcal{A}\bar{\ }, \bar{y}) = -(\bar{\ }, \mathcal{A}\bar{y})$.)

13. Aplicar el proceso de ortogonalización en $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual a los vectores

$$\bar{\ }_1=(1, 2, 2, -1)\quad,\quad \bar{\ }_2=(1, 1, -5, 3)\quad,\quad \bar{\ }_3=(3, 2, 8, -7).$$

14. Encontrar el coseno del ángulo que forman los planos

$$\pi_1 = \text{plano generado por } (1, 0, 0) \text{ y } (0, 1, 1),$$
$$\pi_2 = \text{plano generado por } (1, 1, 0) \text{ y } (1, -1, 1).$$

15. Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo coincide con la suma de los cuadrados de todos sus lados.

16. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ demostrar que

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$; calcular la norma del vector $\vec{v} = (1, -1, -1)$ con este producto escalar y el subespacio ortogonal al subespacio generado por $\vec{v}$.

17. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación ortogonal que respecto de la base canónica viene dada por la matriz.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Decir qué tipo de transformación ortogonal es.

18. Encontrar dos subespacios invariantes V_1 y V_2 de la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

y tal que $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 2$.

19. Sea la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base $\{\vec{u}_1 = (1, 1), \vec{u}_2 = (2, -1)\}$. Encontrar la matriz de la aplicación adjunta, f^*, de f con respecto a la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ cuando en $\mathbb{R}^2$ se considera el producto escalar usual.

20. Sea $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_2y_2 + x_3y_3$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base dada de $\mathbb{R}^3$. Encontrar la proyección del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sobre el plano π: $x_2 + x_3 = 0$ con el producto escalar dado.

21. Sea $\vec{u}_1 = (1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1)$ una base de $\mathbb{R}^2$; decir si la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que f tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es autoadjunta. ¿Es f una matriz ortogonal?

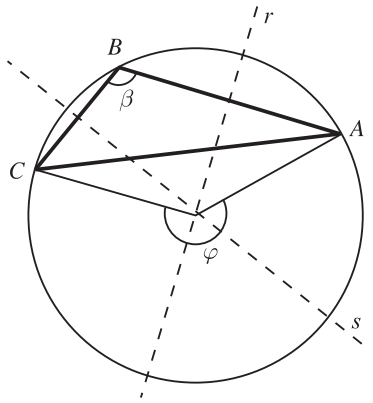
22. Clasificar el movimiento

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

y encontrar sus elementos geométricos.

23. Demostrar que el ángulo β es la mitad del arco que abarcan sus lados, es decir $\beta = \dfrac{\varphi}{2}$. (Ver figura adjunta.)

[*geren ia*. La composición ^{o} $_{r}$ es un giro de ángulo doble del que forman r y , donde r y son las mediatrices de y , respectivamente.]



24. Hallar las ecuaciones de la simetría en el plano con respecto a la recta $+ y = 3$.

25. Encontrar las ecuaciones de la simetría con respecto al plano $+ y + = 1$.

26. a) Encontrar las ecuaciones del movimiento que se obtiene como composición de la simetría con respecto al plano $2 - y - = 3$ y la traslación de vector $\vec{v} = (-2, 1, 3)$.

b) Decir qué tipo de movimiento es y encontrar sus elementos geométricos.

27. Determinar los valores de λ para los que las formas cuadráticas dadas son definidas positivas:

a) $5\,{}^{2}_{1} + {}^{2}_{2} + \lambda\,{}^{2}_{3} + 4\,{}_{1}{}_{2} - 2\,{}_{1}{}_{3} - 2\,{}_{2}{}_{3}$.

b) ${}^{2}_{1} + 4\,{}^{2}_{2} + {}^{2}_{3} + 2\lambda\,{}_{1}{}_{2} + 10\,{}_{1}{}_{3} + 6\,{}_{2}{}_{3}$.

28. Encontrar una base ortonormal en la cual la forma cuadrática $3\,{}^{2}_{2} + 3\,{}^{2}_{3} + 4\,{}_{1}{}_{2} + + 4\,{}_{1}{}_{3} - 2\,{}_{2}{}_{3}$ se reduce a su forma canónica y encontrar esta forma canónica.

29. Clasificar la cónica $16\,{}^{2} - 24\,y + 9y^2 - 30\, + 40y = 5$ y determinar su forma canónica.

30. Demostrar que la cónica $11\,{}^{2} - 24\,y + 4y^2 + 6\, + 8y = -15$ es una hipérbola y determinar su centro y su eje principal.

31. Clasificar la cónica ${}^{2} - 2\,y + 2y - 2 = 0$ indicando su forma canónica.

32. Reducir a una suma de cuadrados la forma cuadrática $2\,y + 2\,{}^{2}$ mediante una transformación ortogonal e indicar la transformación.

33. Determinar los valores de a y b para los cuales la aplicación bilineal siguiente define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que hace de este espacio un espacio euclídeo:

$$((\ _1,\ \ _2),(y_1,y_2)) = \ _1y_1 + a\ _1y_1 + (b-2)\ _2y_1 + (a^2+b)\ _2y_2.$$

34. Clasificar la cuádrica $-3\ ^2 - 2\ y + 4\ \ + 4y\ + 2\ + 2y - 2\ = 0$ indicando su forma canónica.

* * *

Los ejercicios siguientes son de mayor dificultad que los anteriores.

35. Sea $\ = (a_i)_{i,\ =1\ldots,n}$ una matriz real tal que $a_i > 0$ y $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1$ para todo $i,\ =1, ..., n$. Demostrar que todos los autovalores de $\ $ son en módulo menor o igual que 1.

36. Utilizar el problema 12 para demostrar que si $\ $ es una matriz antisimétrica, $(\ +\ )$ es invertible; demostrar, además, que $(\ +\ )^{-1}(\ -\ )$ es una matriz ortogonal con determinante 1.

Utilizar esta construcción para obtener una matriz ortogonal a partir de la matriz

$$= \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{tg}(\alpha/2) \\ -\operatorname{tg}(\alpha/2) & 0 \end{pmatrix}.$$

37. a) Hallar la ecuación de la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje $\ $ la recta que pasa por el punto $(a, 0, 0)$ y que tiene como vector director $(\alpha, \beta, 1)$.

b) Demostrar que si $\beta \neq 0$ la superficie anterior es un hiperboloide de una hoja; encontrar su centro y sus ejes.

ota. Una superficie con la propiedad de que por cada uno de sus puntos pasa al menos una recta contenida en la superficie se denomina una *er i ie regla a*. ¿Qué superficies regladas conoces?

38. Demostrar que todos los autovalores de una matriz real simétrica $\ $ están en el intervalo $[a, b]$ si y solo si la forma cuadrática con matriz $\ - \lambda_0$ es definida positiva para todo $\lambda_0 < a$ y definida negativa para todo $\lambda_0 > b$.

39. a) Sea l el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas al eje $\ $ de la cónica de ecuación

$$a_{11}\ ^2 + a_{12}\ y + a_{22}y^2 + a_1\ \ + a_2y + a = 0 \qquad (1)$$

donde $a_{11} \neq 0$. Demostrar que l está contenido en una recta y encontrar la ecuación de esta recta.

b) Demostrar que si (1) es una cónica *on entro*, la recta encontrada en a) pasa por el centro de la cónica. (Esta recta se llama *re ta iametral*.)

c) Encontrar la recta diametral de

1) $3\ ^2 - 2\ y + 3y^2 + 2\ \ - 4y + 1 = 0.$

2) $\ ^2 - 2\ y + y^2 + 4\ \ - 6y + 1 = 0.$

40. Hallar el ángulo que forma la diagonal de un cubo con una de sus aristas. Demostrar que la proyección ortogonal de una arista del cubo sobre una diagonal coincide, en valor absoluto, con 1/3 de la longitud de la diagonal.

41. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales, demostrar que $\langle\ ,\ \rangle = \text{traza}(\quad {}^t)$ es un producto escalar. Encontrar una base ortonormal para el subespacio $\quad = \{\quad \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \text{traza}(\ ) = 0\}$.

42. Determinar todos los movimientos en el plano que transforman $\quad = (2, 0)$ en $\quad' = (1, 2)$ y $\quad = (0, 0)$ en $\quad' = (1, 0)$, precisando tipo, subespacios invariantes y elementos geométricos.

43. Sea $\quad$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y U y $\quad$ dos subespacios complementarios de $\quad$. Probar que la proyección sobre $\quad$ paralelamente a U es autoadjunta si y solo si U y $\quad$ son ortogonales.

44. En un espacio vectorial euclídeo $\quad$ cuyo producto escalar tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

en la base $\{\vec{\ }_1, \vec{\ }_2, \vec{\ }_3\}$, hallar la proyección ortogonal de $\vec{\ }_3$ sobre $L(\vec{\ }_1, \vec{\ }_2)$.

* * *

45. Se consideran los puntos $\quad = (1, 2, -1)$, $\quad = (0, 1, 2)$ y los planos π y π' descritos por las condiciones siguientes: π pasa por $\quad$ y es perpendicular a $(1, 1, 1)$ y π' pasa por $\quad$ y es perpendicular a $\overrightarrow{\quad}$. Se designa por r la recta intersección de π y π'. Determinar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por $\quad$ y es perpendicular a r.

46. Considerar los puntos $\quad = (1, 1, 0)$ y $\quad = (0, 1, 1)$.

    a) Determinar un punto $\quad$ sobre la recta r: $(0, 1, 1) + \quad (1, 0, 1)$, cuya distancia a la recta determinada por $\quad$ y $\quad$ sea $2\sqrt{2}$.

    b) Determinar un punto $\quad$ sobre la recta r': $(1, 1, 1) + t(0, 1, 0)$ de tal manera que el volumen del paralelepípedo determinado por los puntos $\quad , \quad ,\quad$ y $\quad$ sea 4, donde $\quad$ es la solución del apartado a) que tiene todas sus coordenadas positivas.

47. Dados los puntos $\quad = (1, 2, -1)$ y $\quad = (1, 3, 2)$ y la recta r de ecuación

$$r: \begin{cases} 2\quad + y - \quad = 6 \\ \quad - y + \quad = 1. \end{cases}$$

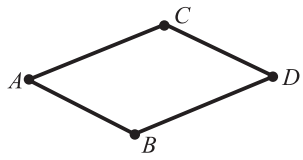
Hallar:

    a) La proyección ortogonal de $\quad$ sobre r.

    b) Un punto situado en el plano perpendicular a r por $\quad$ y que esté a la menor distancia posible de $\quad$.

48. a) Sean $= (1, 0, 1)$, $= (2, 1, 1)$ y $= (-1, 0, 1)$ tres puntos en el espacio; encontrar el cuarto vértice del paralelogramo de la figura adjunta.

    b) Encontrar los vértices de las pirámides rectas que tengan como base y cuyo volumen sea 2 (hay 2 vértices).



49. Encontrar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de la proyección de la recta $(2, 1, 1) + t(-1, 0, 2)$ sobre el plano $2 + y - = 0$.

50. Los puntos $= (0, 0, 0)$, $= (4, 3, 0)$ y $= (0, 0, 2)$ son vértices de una cara de un paralelogramo de volumen 20. Hallar la ecuación del plano que contiene a la cara opuesta a la dada.

51. Determinar de las siguientes formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ si son definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas o indefinidas:

    a) $^2 + y^2 + \ ^2 + 2\ y + 4y$.

    b) $^2 + 6y^2 + \ ^2 + 2\ y + 4y$.

    c) $^2 + y^2 + \ ^2 + 2\ y$.

52. Clasificar el movimiento de ecuación

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}$$

    y escribirlo en forma canónica si es posible.

53. Clasificar la cónica $11\ ^2 - 16\ y - y^2 + 2y = 0$; hallar su forma canónica y su eje principal.

54. Se consideran las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^2$, y , dadas en el sistema canónico de coordenadas $(, y)$ por $5\ ^2 + 2y^2 + 2\ y$ e $y^2 - 2\ ^2 - 8\ y$, respectivamente. Determinar un sistema de coordenadas $(', y')$ de la forma $' = a\ + by$, $y' = \ + \ y$, $a, b, \ , \ \in \mathbb{R}$, en el que se tenga $= \ '^2 + y'^2$, $= \lambda\ '^2 + \mu y'^2$ para algunos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que también se determinarán (la solución estará completa cuando se determinen $a, b, \ , \ , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ para los que se cumpla lo pedido).

55. ¿Existe una transformación ortogonal o una autoadjunta de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que transforme $(1, 1, 1)$ en $(\sqrt{3}, 0, 0)$ y al mismo tiempo $(2, -1, -1)$ en $(\sqrt{5}, 1, 0)$?

56. Dada la forma cuadrática $(, y, \ ) = 35\ ^2 + 55y^2 + 4\ ^2 - 42\ y + 12\ - 4y$ encontrar una base tal que tenga la expresión

$$(', y', \ ') = \lambda\ '^2 + \mu y'^2 + \nu\ '^2$$

    y decir si es definida.

57. Sea el movimiento de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}.$$

a) Determinar el tipo de movimiento.

b) Hallar los subespacios invariantes y determinar los elementos geométricos.

58. Clasificar la cónica de ecuación

$$^2 + 2\ y + y^2 - 6\sqrt{2}\ \ + 6\sqrt{2}\, y = 0$$

y encontrar su forma canónica y elementos geométricos.

59. Dada la cónica de ecuación

$$\alpha\ ^2 + 2\alpha\ y + y^2 - 2\ \ - 2y + \alpha = 0$$

determinar los valores del parámetro α para los cuales representa un par de rectas, y hallar dichas rectas.

Soluciones

En las páginas siguientes se encuentran los resultados finales de muchos de los problemas propuestos en este libro. Esperamos que sirvan al lector como comprobación de su trabajo diario. Es necesario observar que aquellos problemas en los que se pide la demostración de algún resultado no están, por su naturaleza, incluidos en estas soluciones.

Como ya se dijo en el prólogo, la matemática *no* es un deporte para espectadores. Los intentos repetidos de solucionar un problema pueden producir mayores beneficios que la memorización de la teoría. Esperamos que los numerosos ejercicios acumulados al final de casi todas las secciones de este libro sirvan para que el lector no sea un mero espectador.

Consejo

irar las páginas siguientes solo después de intentar solucionar los problemas propuestos.

Capítulo 1

1.1

1. a) $_1 = 0$, $_2 = 1$. b) $_1 = -1$, $_2 = 2$.

2. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 32/23 & 0 \\ 0 & 1 & 43/23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. a) $_1 = 1$, $_2 = 1$, $_3 = 0$. b) $_3 =$, $_2 = -(1 +$), $_1 = 3 - 2$.
   c) Incompatible. d) $_1 = -2$, $_2 = 1$, $_3 = 4$, $_4 = 3$.
   e) $_1 = \dfrac{15 - 3b + 3}{8}$, $_2 = \dfrac{11 + 17b - 25}{8}$, $_3 = b$, $_4 =$.
   f) $_1 =$ $_2 =$ $_3 = 1$. g) $_1 = -1$, $_2 = 0$, $_3 = 1$.
) $_1 = \dfrac{2}{5}$, $_2 = \dfrac{4}{5}$, $_3 =$. i) Incompatible.
) $_1 = 3$, $_2 = 2$, $_3 = 1$.

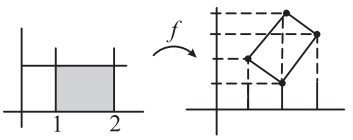
4. a) Compatible indeterminado. b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

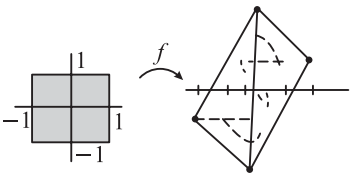
1.2.

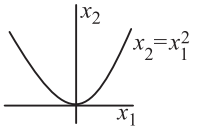
2. a) L.D. $(2, 4) = 2(1, 2)$. b) L.I. c) L.D. $(1, 2, 3) = (1, 3, 2) + (0, -1, 1)$.
   d) L.D. $(2, 2, 4, 2) = (2, 1, 3, 1) + (0, 1, 1, 1)$.
3. a) 2. b) 1. c) 2. d) 3. e) 3.
4. a) 3. b) 4.
5. a) Compatible, $_1 =$ $_2 =$ $_3 = 1$. b) Compatible indeterminado, $_1 = 5 -$ $_1 +$ $_2$, $_2 = 2 -$ $_1 -$ $_2$, $_3 =$ $_1$, $_4 =$ $_2$.

1.3.

1. a) Nada. b) Inyectiva. c) Biyectiva.
2. Hay seis.
4. a) $\operatorname{sen}[3\ ^2 + 16]$. b) $3[\operatorname{sen}(3\ - 5)] - 5$. c) $3[\operatorname{sen}(\ ^2 + 7)] - 5$.
5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. d) $(3, -1, 1)$.

6. a) 

b) 

7. 

8. $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. c) $\begin{pmatrix} 172 \\ 21 \end{pmatrix}$.

11. a) $(4\ _1, -3\ _1 +\ _2, 5\ _1 + 3\ _2)$.

b) $(7\ _1 - 3\ _2, -6\ _1 + 2\ _2, -11\ _1 - 9\ _2)$.

14. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} a & -2 & 3 \\ 1 & -a & 2 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$.

1.4

2. $g \circ\ ^{-1}(\ ) = \cos\left(\dfrac{+2}{3}\right)$; $\ ^{-1} \circ\ ^{-1} \circ g(\ ) = \dfrac{1}{9}(\cos\ ) + \dfrac{2}{3}$.

3. a) 2. b) 2. c) 2. d) 1. e) 4.

4. a) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. b) No. c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2a \\ a/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. a) $\ ^{-1}(\ _1,\ _2,\ _3) = ((\ _1 +\ _2 -\ _3)/2, (3\ _1 -\ _2 -\ _3)/2, -\ _1 +\ _2)$.
b) $\ ^{-1}(\ _1,\ _2) = ((\ _1 +\ _2)/2, (\ _1 -\ _2)/2\ )$, si no es nulo.

7. a) $^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $^{-} = \begin{pmatrix} 1 - 2a \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -37/4 & -13/4 & 17/4 \\ 11 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $^{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ -48 \end{pmatrix}$.

c) $^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 7/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $^{-} = \begin{pmatrix} 5/36 \\ -2/18 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Capítulo 2

2.1

1. a) 3. b) 12. c) $a(b-1)$. d) 1. e) -1.

2. $\begin{pmatrix} \dfrac{b}{ab-a} & \dfrac{-1}{ab-a} \\ \dfrac{-1}{b-1} & \dfrac{1}{b-1} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3. a) $_1 = -1$, $_2 = 1$. b) $_1 = \pi/2$, $_2 = 0$. c) $_1 = \ _2 = 0$.

4. a) 11. b) 0. c) $(\ -y)(\ -\ )(\ -y)$. d) 1.

7. $\cos\alpha$.

2.2

1. a) 8. b) 2. c) -56.

2. a) -16. b) 0. c) -14. d) -90.

3. a) 0. b) 4. c) 1. d) -60. e) -162.
   f) $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 1$. g) $(\ -1)(y-1)$.

4. a) $_1 = -\ _2$. b) $_3 = 2\ _1 + 3\ _2$. c) $_2 = \ _1 + \ _3$.
   d) $_1 = 2\ _2 - \ _3$. e) $_4 - \ _1 = 3(\ _3 - \ _2)$.

8. a) $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$. b) $|\ \ | = |-\ \ ^t| = (-1)^n|\ \ |$. c) No.

13. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}\cdot$
   $\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}$.

$\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

$\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. b) $= \begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-7&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$.

$\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-5/7\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

3. $^{-1} = \quad \Rightarrow \quad 1 = |\quad^{-1}| = |\quad||\quad^{-1}|$.

5. $^{t} = (a^2 + b^2 + \ ^2 + \ ^2) \quad \Rightarrow \quad |\ | = (a^2 + b^2 + \ ^2 + \ ^2)^2$.

6. $= \begin{pmatrix}1&{}_1&0\\1&{}_2&0\\1&{}_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\y_1&y_2&y_3\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\ | = 0.$

7. a) $2(-\ )^{n-1}$. b) $(\ -1)(\ -2)\cdots(\ -n+1)$. c) $(n-1)^{n-1}(2n-1)$.

9. $_n = \ _{n-1} - \ _{n-2}$.

11. $(\ +2)(\ -2)^3$.

12. $(-1)^{n-1}\,2^{n-2}(n-1)$.

13. $-2(\ -1)^3$.

2.4

1. a) $\text{cof}(\ ) = \begin{pmatrix}5&-11&-1\\3&-5&-1\\-3&7&1\end{pmatrix}$; $\quad^{-1} = \dfrac{1}{2}\,[\text{cof}(\ )]^t$.

b) $\text{cof}(\ ) = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$; $\quad^{-1} = [\text{cof}(\ )]^t = \begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$.

c) $\text{cof}(\ ) = \begin{pmatrix}15&-1&-6\\-3&5&6\\-3&-3&6\end{pmatrix}$; $\quad^{-1} = \dfrac{1}{24}\,[\text{cof}(\ )]^t$

d) $\operatorname{cof}(\ ) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 19 \\ -15 & 20 & -5 & -19 \end{pmatrix}$; $^{-1} = -\frac{1}{7}[\operatorname{cof}(\ )]^t$.

4. $^{-1} = \frac{1}{|\ |}\ ^t \Rightarrow |\ | = |\ ^t| = |\ |^n |\ ^{-1}| = |\ |^{n-1}$.

5. a) y b) son inversas entre sí. c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

6. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{+(n-1)}{(n+\ )} & \frac{-1}{(n+\ )} & \cdots & \frac{-1}{(n+\ )} \\ \frac{-1}{(n+\ )} & \frac{+(n-1)}{(n+\ )} & \cdots & \frac{-1}{(n+\ )} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-1}{(n+\ )} & \frac{-1}{(n+\ )} & \cdots & \frac{+(n-1)}{(n+\ )} \end{pmatrix}$

7. a) $a \neq -1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$. b) $a \neq 1 \pm \sqrt{3}$. c) $a \neq 0, b \neq 0, a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$.

8. $^{-1}(\ , y,\ ) = (-2\ \ -2y+3\ , -y+\ \ , 3\ \ +4y-5\ )$.

10. a) $_1 = 5/3,\ _2 = 8/3,\ _3 = 0$.

b) $_1 = -1/5,\ _2 = 14/5,\ _3 = 6/5$.

c) $_1 = \frac{332}{145},\ _2 = \frac{-239}{145},\ _3 = -\frac{55}{58},\ _4 = -\frac{1}{58}$.

11. $m = -5$.

12. a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

13. $(\ ) = 2^{\ 2} - \ + 1$.

16. $|\ | = a(a-1)^{n-1}$; es invertible si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

2.5

1. a) $r = 2$. b) $r = 3$. c) $r = 2$. d) $r = 2$.

2. $r = 3$ para toda $a \neq 3$; $r = 2$ si $a = 3$.

4. b) $_1 = 8/9$, $_2 = -5/9$, $_3 = \ _4 = 0$.
   c) $_1 = 3\lambda$, $_2 = \lambda$, $_3 = 1 - 4\lambda$.

5. a) Incompatible. b) $_1 = 11/4$, $_2 = 3/2$, $_3 = -11/2$.
   c) $= \dfrac{4+5t}{3}$, $y = \dfrac{-2-10t}{3}$, $= \dfrac{4-10t}{9}$, $t = t$ (indeterminado).
   d) $= \dfrac{23+66t}{62}$, $y = \dfrac{27+2t}{62}$, $= \dfrac{7-19t}{31}$, $t = t$ (indeterminado).

6. Todas las soluciones son $(33\lambda + 17\mu, 7\lambda + 4\mu, \lambda, 0, \mu)$.

2.6

1. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   d) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -19/7 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7/2 & 2 \\ 0 & 0 & -4/7 \end{pmatrix}$

2. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $(\ _1, \ _2, \ _3) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

   b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $(\ _1, \ _2) = \left(-\dfrac{3}{2}, 4\right)$.

c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; Sistema imcompatible.

d) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -19/7 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7/2 & 2 \\ 0 & 0 & -4/7 \end{pmatrix}$; $(\ _1,\ _2,\ _3) = \left(\frac{49}{4}, -3, -\frac{19}{4}\right)$.

e) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $(\ _1,\ _2,\ _3) = \left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

f) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $(\ _1,\ _2,\ _3) = (2, 2, 3)$.

3. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15/56 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 56/15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 209/56 \end{pmatrix}$.

4. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$; $(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right)$.

5. a) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{pmatrix}$.

6. a) Una factorización LU puede ser $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ y otra puede ser $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. En la segunda se ha comenzado dividiendo entre 2 la primera fila de la matriz .

b) La descomposición es única. Escribir $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ 0 & b \end{pmatrix}$ y probar que estas ecuaciones determinan α, a, b y de manera única.

Capítulo 3

3.1

1. a) $2.016 - 920i$. b) -1. c) 25.
2. a) $-i$. b) $\dfrac{22-4i}{10}$. c) $(7-i)^2/100$.
3. Las partes reales son $a^2 - b^2$, $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)^2$, $(a^2 - 1 + b^2)/(a^2 + b^2 - 2a + 1)$.
4. $3 + i$, $-3 - i$.

3.2

1. Solamente escribimos módulo y argumento.
   a) $\sqrt{2}$, $\pi/4$. b) 1, $-\pi/3$. c) 1, $7\pi/6$. d) $\sqrt{8}$, $5\pi/4$.
2. -1, 1, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
3. a) 2, 0. b) 1, 120°. c) $\sqrt{18}$, $\dfrac{5\pi}{4}$.

3.3

1. a) $\sqrt{2}e^{\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)i}$, $\sqrt{2}e^{\left(2\pi-\frac{\pi}{8}\right)i}$. b) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$, -2, $2e^{\frac{5\pi}{3}i}$.
   c) i, $e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $e^{\frac{11\pi}{6}i}$.
   d) $2e^{\frac{\pi}{8}i}$, $2e^{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i}$, $2e^{\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)i}$, $2e^{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)i}$.
   e) $3i$, $-3i$.
2. 1, $e^{2\pi i/6}$, $e^{4\pi i/6}$, $e^{\pi i}$, $e^{8\pi i/6}$, $e^{10\pi i/6}$.
3. $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{2\pi i/3}$, $\omega_2 = e^{4\pi i/3}$.

3.4

1. a) $1, 2, 3, 4$. b) -1, 1, $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. c) -2, $\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
   d) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, -1$. e) 3, -3, $4i$, $-4i$.
2. Las soluciones son $e^{2\pi i/5}$, $e^{4\pi i/5}$, $e^{6\pi i/5}$, $e^{8\pi i/5}$.
4. No lo contradice porque es una ecuación con coeficientes complejos.

Capítulo 4

4.1 4.2 4.3

1. a) Sí. b) Sí.
2. a) Linealmente independientes. b) Linealmente dependientes.
   c) Linealmente dependientes. d) Linealmente independientes.
   e) Linealmente independientes.

3. $= 0, \pm\sqrt{2}$.

5. a) Sí. b) Sí. c) No.

6. $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

7. No.

9. dim $= n^2 - 1$.

10. b) $\vec{v} = 4\vec{}_1 + 2\vec{}_2 - \vec{}_3 - 6\vec{}_4$.

11. b) $\vec{} = -(\vec{}_1 + 2\vec{}_2 + 3\vec{}_3 + \cdots + (n-1)\vec{}_{n-1} + n\vec{}_n)$.

12. $_1 = \{ \ + 1, \ - 1, \ ^2 - 1\}$.

15. $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

4.4

1. a) No. b) Sí, no. c) Sí, no.

2. a) No. b) Sí.

3. a) 2. b) 1.

4. a) $\text{com}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} + \text{com}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} = L\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}\right)$

$\text{com}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \cap \text{com}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} = L\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\right)$.

b) $_1 + \ _2 = \ ^{(3)}_{\mathbb{C}}[\ ]$ y $_1 \cap \ _2 = L\{\ ^2 - 1, \ (\ ^2 - 1)\}$.

c) $L(\text{sen}\, t, \cos t) + L(e^{it}, e^{-it}) = L(\text{sen}\, t, e^{it}, e^{-it})$,
$L(\text{sen}\, t, \cos t) \cap L(e^{it}, e^{-it}) = L(\cos t)$.

5. a) Sí, $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

b) Sí, $\oplus \ = \{\ : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$.

c) Sí, $_1 \oplus \ _2 = \{\ : [-1, 1] \to \mathbb{R} : \ (0) = 0\}$.

4.5

1. a) $\mathbb{R}^2/\ = \{[(t, 0)] : t \in \mathbb{R}\}$. b) $\mathbb{R}^3/\ = \{[(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. c) $^{(3)}_{\mathbb{R}}[\ ] = \{[t] : t \in \mathbb{R}\}$.

2. a) El conjunto $_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3, \vec{v}_3\}$ es una base que contiene a los vectores dados.
b) El conjunto $_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ es una base que contiene a los vectores dados.

3. $_1 = 0, \ _2 = 0, \ _3 = \ , \ _4 = t, \ , t \in \mathbb{R}$.

4. $\mathbb{R}^3/\ = \{[\lambda\vec{e}_3] : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. Del ejercicio 3 se deduce que $\{[\vec{e}_3], [\vec{e}_4]\}$ es una base de $\mathbb{R}^4/\ $.

Capítulo 5

5.1 5.2 5.3

1. a) Lineal. b) No lineal. c) Lineal. d) Lineal.
e) No lineal. f) Lineal. g) No lineal.

2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. a) $L\{(1,-1,0),(1,-1,-1)\}$, $\dim(\ _1) = 2$, $\dim(\ (\ _1)) = 2$.

b) $L\{(1,0,1),(1,0,0)\}$, $\dim(\ _2) = 2$, $\dim(\ (\ _2)) = 2$.

c) $L\{(0,1,2)\}$, $\dim(\ _3) = 1$, $\dim(\ (\ _3)) = 1$.

3. a) $\quad = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $\quad = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & -1/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$.

6. $\circ\ (\ _1,\ _2,\ _3) = (\ _3, 0, 0)$ y $\ ^n = \ \circ\ \circ \cdots \circ\ = 0$ si $n \geqslant 3$

$\circ\ (\ _1,\ _2,\ _3) = (\ _2,\ _3)$.

7. a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

8. a) $\left.\begin{aligned} ' &= -\frac{1}{3}\ \ + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\\ y' &= \frac{2}{3}\ \ - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\\ ' &= \frac{2}{3}\ \ + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}\end{aligned}\right\}$. b) $\left.\begin{aligned} ' &= \frac{2}{3}\ \ + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\\ y' &= \frac{1}{3}\ \ + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\\ ' &= -\frac{1}{3}\ \ + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\end{aligned}\right\}$.

c) $\left.\begin{aligned} ' &= \frac{1}{2}\ \ - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\\ y' &= -\frac{1}{2}\ \ - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\\ ' &= -\ \ - y\end{aligned}\right\}$.

9. $(\ ^2 + 2\ \ + 1) = 1 - 2\ \ + \ \ ^2 + \ \ ^3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
$((\ \ - 2)^2 + \ \ ^3) = 3 + 5\ \ + 5\ ^2 + \ \ ^3$

10. a) $\quad = \{(2, 1, 0), (3, 0, -1)\}; \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de $\quad |\ _1$ con respecto a $\quad$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) *b erva i n*: $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^3$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$; la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es $\{(1, 0), (0, 1)\}$ y la base canónica de $\mathbb{C}^3$ es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

$= \{(i, 1)\} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ -1 \end{pmatrix}.$

11. a) $\{(0, 1, 0)\}$.

b) $\lambda = 2$, $\{(0, 0, 3, 1)\}$; $\lambda = 1$, $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.

c) $(e^{\pi i/3}) = \{(0, 0, 0)\}$.

13. a) $(\ \ ) = L\{(2, 1, 1)\}$.

b) $(\ \ ) = L\{(2, -1, 1), (0, -1, -1)\}$.

14. 1.

5.4

1. a) $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \{t(1, 0, -1) : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Img}(\ \ ) = \{t(1, 0, 1) + \ \ (0, 1, 0) : t, \ \ \in \mathbb{R}\}$. No inyectiva, no suprayectiva.

b) $\mathbb{C}^2$ se considera como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \{(0, 0)\}$, $\mathrm{Img}(\ \ ) = \mathbb{C}^2$. Inyectiva y suprayectiva.

c) $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \{(0, 0)\}$, $\mathrm{Img}(\ \ ) = \{t(1, 1, 2, 1) + \ \ (0, 1, 0, 2) : t, \ \ \in \mathbb{R}\}$. Inyectiva, no suprayectiva.

d) $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \{\alpha(2i, -2, 1) : \alpha \in \mathbb{C}\}$, $\mathrm{Img}(\ \ ) = \{\alpha, (1, 0, i) + \beta(0, 1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$. No inyectiva, no suprayectiva.

2. a) $\mathrm{Ker} \quad = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $\mathrm{Img} \quad = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; no inyectiva, suprayectiva.

b) $\mathrm{Ker} \quad = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $\mathrm{Img} \quad = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; no inyectiva, no suprayectiva.

c) $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \{0\}$, $\mathrm{img}(\ \ ) = \ ^{(3)}_{\mathbb{R}}[\ \ ]$; inyectiva, suprayectiva y biyectiva.

d) $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \mathcal{L}\{1\}$, $\mathrm{img}(\ \ ) = \ ^{(n-1)}_{\mathbb{R}} \cdot [\ \ ]$; no inyectiva, suprayectiva.

3. $\mathrm{Ker}(\ \ ) = \left\{(a_i)_{i,\ } \in \mathcal{M}_{n\times n} : \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\right\}$; $\dim(\mathrm{Ker}\ \ ) = n^2 - 1$; $\mathrm{Img}(\ \ ) = \mathbb{K}$;
$\dim(\mathrm{Img}(\ \ )) = 1$.

5. a) $\quad : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{R}^{10} : \ (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3, a_4 + ib_4, a_5 + ib_5) =$
$= (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5)$.

b) $\quad : \ ^{(n)}_{\mathbb{C}}[\ \ ] \to \mathbb{C}^{n+1} : \ \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\ ^i\right) = (a_0, a_1, ..., a_n)$.

c) $: \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6 : \begin{pmatrix} a & b \\ & \\ e & \end{pmatrix} = (a, b, \ , \ , e, \ ).$

5.5

1. ${}_1(\ {}_1, \ {}_2, \ {}_3) = \ {}_2 - \ {}_3, \ \ {}_2(\ {}_1, \ {}_2, \ {}_3) = \ {}_3 - \ {}_1, \ \ {}_3(\ {}_1, \ {}_2, \ {}_3) = \ {}_1 - \ {}_2 + \ {}_3.$

2. ${}_1(a_0 + a_1 \ + a_2 \ {}^2 + a_3 \ {}^3) = a_0 - a_1 + 2a_2 + 2a_3$
   ${}_2(a_0 + a_1 \ + a_2 \ {}^2 + a_3 \ {}^3) = a_1$
   ${}_3(a_0 + a_1 \ + a_2 \ {}^2 + a_3 \ {}^3) = a_2 + a_3$
   ${}_4(a_0 + a_1 \ + a_2 \ {}^2 + a_3 \ {}^3) = a_3$

3. ii) ${}_1 = \ {}_1 + \ {}_2 + \ {}_3, \ {}_2 = \ {}_2, \ {}_3 = \ {}_1 + \ {}_2.$
   iii) $\vec{}_1 = (0, 0, 1), \vec{}_2 = (-1, 1, 0), \vec{}_3 = (1, 0, -1).$

4. La base es $\{ \ {}_0(\ ) = 1, \ \ {}_1(\ ) = \ , \ \ {}_2(\ ) = \frac{1}{2} \ {}^2\}.$

Capítulo 6

6.2

1. a) $1, -2.$ b) 3. c) No hay. d) $-1.$ e) $\pm 1.$ f) $0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}.$ g) 1.
) $-1, -2.$ i) 2.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

4. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1;$ $(1, -1, -1)$ con $\neq 0.$
   b) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0;$ $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$, con $\neq 0.$
   c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1;$ $(0, 0, 0, 1), \ \neq 0;$ $\lambda_3 = \lambda_4 = 0;$ ${}_1 = (0, 1, 0, 0) + \ {}_2(0, 0, 1, 0),$ ${}_1 \cdot \ {}_2 \neq 0.$

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

6. $\lambda = 0$; polinomios de grado cero no nulos.

7. Si $b = 0$, la matriz ya es diagonal; si $b \neq 0$, la matriz es diagonalizable si y solo si $a \neq -1.$

8. No es diagonalizable en ningún caso.

10. Autovalores $\lambda = b, \ \lambda = \pm\sqrt{a}$; $a = 0$ no diagonalizable; $a > 0$ diagonalizable; $a < 0$: autovalores complejos y, por tanto, no diagonalizable en forma real.

11. $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 0;\ \ {}_1(2, 1),\ \ {}_2(-1, 2),\ \ {}_1 \neq 0,\ \ {}_2 \neq 0.$

12. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1;\ (\beta, 1-\alpha),\ (\beta, -1-\alpha)$. Simetría: ${}^2 = \ .$

13. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0;\ (\alpha, \beta),\ (\beta, -\alpha)$. Proyección: ${}^2 = \ .$

16. b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1.$

6.3

1. $$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}; \qquad {}^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $${}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{10} & 5\cdot 2^{10} \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{10}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. $$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}; \qquad = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1};$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. $$(\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4

1. $$: \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad : \ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$
$$: \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad : \ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$: \ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad : \ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$G: \ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad : \ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $${}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^6 & 0 \\ 0 & 0 & 3^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. ${}_1 = \mathcal{L}\{(2, 2, -1)\}$, ${}_2 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)\}$, ${}_3 = \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$
${}_4 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$; ${}_5 = \mathcal{L}\{(2, 2, -1), (0, 1, 1)\}$
${}_6 = \mathcal{L}\{(2, 2, -1), (1, 1, 0)\}$; ${}_7 = \{\vec{0}\}$, ${}_8 = \mathbb{R}^3$.
Cualquier subespacio de dimensión 1 generado por $\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5. $\lambda_1 = 0$ doble; $(-\lambda, \alpha, 0)$, $(-\mu, 0, \alpha)$; $\lambda_2 = 1$; (μ, ν, γ).

6.5

1. a) El polinomio característico es $( ) = -({}^2 - 15 - 18)$.
b) El polinomio característico es $( ) = ({}^2 - 4 + 1)({}^2 - 11 + 2)$.
c) El polinomio característico es $( ) = (2 -)(+ 2)^2$.

2. La matriz nula y todas las equivalentes a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Todas las de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ con $| | \neq 0$.

5. El polinomio mínimo es $(1 -)({}^2 - 2 + 2)$.

6. a) El polinomio mínimo es $(2 -)$. b) El polinomio mínimo es $(2 -)^2$.
c) El polinomio mínimo es $(2 -)^3$.

7. a) $( ) = -(- 1)^2$ y $\dim(\text{Ker}(-)) = 1$. Luego no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
b) $( ) = {}^2(+ 2)(- 2)$ y $\dim(\text{Ker}(- 0)) = 2$. Luego es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
c) $( ) = -(+ 2)({}^2 + 4)$. Como ${}^2 + 4$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$, no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

1. a) $1, \pm\sqrt{3}i$; ${}_2 = 0$; $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. b) $1 \pm i\sqrt{6}$; $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$.
c) $\pm i$; $\{ {}_2 = {}_4 = 0\}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. d) $0, 2 - i$.

4. c) $\lambda = 0,1$; $\lambda = \pm 1$; $\lambda = e^{2\pi i /n}$, $= 0, 1, ..., n - 1$; $\lambda = \pm i$.

6.8

1. $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $= \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 & 1-i \\ 3-i & 1-5i & 3+i & 1+5i \\ 1-2i & 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $J = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

5. Si $a \neq 0, 1$,

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si $a = 0, 1$,

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si $a = 1$,

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

6. $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.9

1. a) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. b) $= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$.

c) $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluciones a algunos ejercicios de repaso de los Capítulos 1 a 6

1. $(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right), \quad \in \mathbb{R}.$
2. $r = 2$.
3. $(\ _1,\ _2,\ _3,\ _4,\ _5) = (7, -1, -2, -3, 0)$.
4. Si $a + b - 2ab \neq 0$, sistema compatible determinado. En este caso:

$$= \frac{(1-a)(b-1)}{(a+b)-2ab}, \quad y = \frac{1-a}{(a+b)-2ab}, \qquad = \frac{1-b}{(a+b)-2ab}$$

Si $a + b - 2ab = 0$, $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Incompatible.
Si $a + b - 2ab = 0$, $a = 1$, $b = 1$. Compatible indetermiando.

$$= 0,\ y = 1 - t, \quad = t,\ t \in \mathbb{R}$$

Si $a = 0$ y $b = 0$. Incompatible.

5. Si $\neq a$ y $\neq -a \pm 2b$, $r = 4$. [*g.*: Utilizar tansformaciones elementales.)
Si $= a$, $r = 2$; si $= -a \pm 2b$, $r = 2$.
6. Si $\neq 0$ existe inversa y es

$$\frac{1}{\ \ 4}\begin{pmatrix} {}^3 & -\ {}^2 & & -1 \\ 0 & {}^3 & -\ {}^2 & \\ 0 & 0 & {}^3 & -\ {}^2 \\ 0 & 0 & 0 & {}^3 \end{pmatrix}$$

[*g.*: Utilizar transformaciones elementales.)

7. $(\ _1,\ _2,\ _3) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)$.
8. a) $a \neq 2$. b) $5\ '_1 + 2\ '_2 + 10\ '_3 = 0$. c) $_1 = \ ''_1$, $_2 = 2\ ''_1 + 3\ ''_2$, $_3 = \ ''_2 - \ ''_3$.
9. $a_1 a_2 \cdots a_n$.
12. a) $= 1$, $= 2 + i$, $= 2 - i$.

13. a) $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $7 + 8(\ -1) + 3(\ -1)^2 + 2(\ -1)^3 + (\ -1)^4$.

14. Dimensión = 3; $\{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4)\}$ es una base, $\quad - y - \quad + t = 0$.

15. Está generado por dos vectores: $\bar{}_1$ y $\bar{}_2$ (por ejemplo).

21. $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

23. No. Sus autovalores son 0 y 2 con $\dim(\text{Ker}(\ )) = 1$ y $\dim(\text{Ker}(\ - 2\ )) = 1$.

24. $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = J_B$

25. a) $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. c) $-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. a) Autovalores $\lambda_1 = (n - 1)$ doble, $\lambda_2 = n + 2$; $\dim(\text{Ker}(\ _n - (n - 1)\ )) = 2$.

b) $n \neq 1, n \neq -2$; $\ ^{-1}_n = \dfrac{1}{(n-1)(n+2)} \begin{pmatrix} n+1 & -1 & -1 \\ -1 & n+1 & -1 \\ -1 & -1 & n+1 \end{pmatrix}$.

c) $n = 1$, Ker $\ _1 = \{(\ , y, \ ) : \ + y + \ = 0\}$, Img $(\ _1) = \{(\ , \omega, t) : \ = \omega = t\}$,
$n = -2$, Ker $\ _{-2} = \{(\ , y, \ ) : \ = y = \ \}$, Img $(\ _{-2}) = \{(\ , \ , t) : \ + \ + t = 0\}$.

27. $0, 1, 3^{10}$.

28. $a \neq 1$ y $a \neq 2$ Compatible determinado
$a = 1, b \neq -1$ Incompatible
$a = 1, b = -1$ Compatible indeterminado: $\begin{cases} _1 = 10\ _3 - 1 \\ _2 = -1 + 6\ _3 \end{cases}$.

$a = 2,\ b \neq -\dfrac{3}{5}$ Incompatible

$a = 2,\ b = -\dfrac{3}{5}$ Compatible indeterminado: $\begin{cases} {}_1 = 2/5 \\ {}_2 = -1/5 + 2\ {}_3 \end{cases}$.

29. $\{\ ^3 + 2\ ^2 + \ ,\ -2\ ^3 - 4\ ^2 + 1\}$ es base del núcleo.
$\{\ ^2 - 2\ ,\ \ + 1\}$ es base de la imagen.

30. a) Sí. b) Recta $t(2, 5, -1)$ y todas las rectas contenidas en el plano $t(-2, 1, 0) + (0, 0, 1)$.

31. 5, 3 y 2.

32. a) No hay. b) $L(\{(2, 1, 1)\})$. c) $\mathbb{R}^3$.

33. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

34. $a = 1;\ -\vec{}_1 - \vec{}_2 + \vec{}_3 = \vec{0}$.

35. a) $\begin{pmatrix} 5 - i & -4 + i & i - 1 \\ -1 - 5i & 1 + 4i & 1 + i \end{pmatrix}$.
b) $\text{Ker}(\ ) = L\{(4 - i, 5 - i, 0), (1 - i, 0, 5 - i)\}$; $\text{Img}(\ ) = L\{(\ , 1)\}$.

36. La matriz es diagonalizable para todo $a \neq -1$.

Capítulo 7

7.1

1. a) $\left\{\begin{matrix} = 1 + 2t \\ y = -2t \end{matrix}\right\}$, $\ + y - 1 = 0$. b) $\left\{\begin{matrix} = 1 + 4t \\ y = -3t \end{matrix}\right\}$, $3\ + 4y - 3 = 0$.
c) $\left\{\begin{matrix} = -5t - 1 \\ y = 3t + 2 \end{matrix}\right\}$, $5y + 3\ - 7 = 0$.

3. a) Coinciden. b) Se cortan en $(1, 0)$. c) Coinciden.
d) Se cortan en $(3/7, -6/7)$.

4. a) $\left\{\begin{matrix} = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{matrix}\right\}$. b) $\left\{\begin{matrix} = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{matrix}\right\}$. c) $\left\{\begin{matrix} = 3 \\ y = t \end{matrix}\right\}$. d) $\left\{\begin{matrix} = t \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$.

5. $y + \ + t = 0,\ t \in \mathbb{R}$.

6. a) $\left\{\begin{matrix} = 1 + 2t \\ y = t \end{matrix}\right\}$, $\ - 2y - 1 = 0$. b) $\left\{\begin{matrix} = 2 + t \\ y = 2t \end{matrix}\right\}$, $2\ - y - 4 = 0$.
c) $\left\{\begin{matrix} = -2 + t \\ y = -3 - t \end{matrix}\right\}$, $\ + y + 5 = 0$.

9. a) $\ + y - 2 = 0$. b) $t(4\ - y) + (\ + y - 5) = 0,\ t, \ \in \mathbb{R}$.
c) $t\ +\ y = 0,\ t, \ \in \mathbb{R}$.

7.2

1. a) $\begin{cases} = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ = -1 + t \end{cases}$. b) $\begin{cases} = 1 + t \\ y = 1 \\ = -1 - 3t \end{cases}$. c) $\begin{cases} = t \\ y = 1 - t. \\ = 2 - t \end{cases}$

2. a) Se cruzan. b) Se cortan en (1, 4, 3). c) Se cruzan.

3. $\begin{cases} = 1 + t/2 \\ y = 1 + 5t/2. \\ = 1 + t \end{cases}$

4. $\left.\begin{array}{l} 3 \quad + 6y + \quad - 11 = 0 \\ -4 \quad + 6y - 3 \quad - 15 = 0 \end{array}\right\}$.

5. a) $\left.\begin{cases} = t - \\ y = 1 + t - 3 \\ = -1 + 4t - 2 \end{cases}\right\}, 5 \quad - y - \quad = 0.$

   b) $\left.\begin{cases} = 1 - t + 5 \\ y = 2 - t \\ = 3 - 4t + 3 \end{cases}\right\}, 3 \quad + 17y - 5 \quad - 22 = 0.$

   c) $\left.\begin{cases} = 10t + 5 \\ y = 1 + 3t + 3 \\ = -1 + 3t \end{cases}\right\}, 3 \quad - 5y - 5 \quad = 0.$

6. a) $\begin{cases} = 2/3 + t/2 \\ y = -1/3 + 3t/2. \\ = t \end{cases}$ b) $\begin{cases} = t \\ y = 1 - 3t \\ = -2 + 7t. \end{cases}$ c) $\begin{cases} = 0 \\ y = t \\ = -1/3 + 2t \end{cases}$.

9. a) $\left\{\begin{array}{l} 3 \quad - \quad + 1 = 0 \\ 2 \quad + y - 2 \quad = 0 \end{array}\right\}$. b) $\begin{cases} = t + \\ y = 2 + 2t + \\ = 1 + t - \end{cases}$.

   c) $\left.\begin{array}{l} = 1 + ta \\ y = tb \\ = 1 + 3ta \end{array}\right\}, a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \neq 0, t \in \mathbb{R}; \quad \left.\begin{array}{l} = 1 + t \\ y = 3t \\ = 1 + 3t \end{array}\right\}.$

   d) $3 \quad - 3y + \quad = 4.$ e) $\begin{cases} = 2 - t \\ y = 1 - t. \\ = 1 \end{cases}$

7.3

1. a) $\sqrt{5}$. b) $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. c) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$. d) $\quad - 3y - 1 = 0$. e) $-2 \quad - y + 5 = 0$.

   f) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) + \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. g) $\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.) $\dfrac{6}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

2. a) $1, \sqrt{19}$. b) 0. c) $\quad + 2 = 0$. d) (1, 0, 0).

e) $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. f) $\begin{cases} \quad + 3y - 11 = 0 \\ y + \quad - 1 = 0 \end{cases}$

g) $- \quad + 4y + 7 \quad - 6 = 0.$) $\frac{0}{\sqrt{6}}, 0.$ i) $(1, 0, 0).$

3. b) $2 \quad + \quad - 1 = 0.$ c) $\left\{ \begin{array}{l} \quad = 2t \\ y = 0 \\ \quad = -2 + t \end{array} \right\}$ ó $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \quad = -2 + \quad /2 \end{array} \right\}$.

d) $\left\{ \begin{array}{l} \quad = t\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\right) \\ y = \frac{t}{\sqrt{11}} \\ \quad = 2 + t\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{11}}\right) \end{array} \right\}$ y $\left\{ \begin{array}{l} \quad = t\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}}\right) \\ y = t\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) \\ \quad = 2 + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{11}}\right) \end{array} \right\}$.

e) $\left(\frac{1}{5}, 1, -\frac{2}{5}\right)$. f) $(\quad , r_1) = \frac{\sqrt{104}}{5}$. g) $\left(-\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}, 3, -\frac{4}{5}\right)$.

) $\quad - 5y - 2 \quad - 4 = 0.$ i) $\quad - 5y - 2 \quad + 4 = 0.$) $8/\sqrt{30}.$

6. Punto de corte $(1, 1, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \quad = 1 + t\left(-\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{11}}\right) \\ y = 1 + t\left(\frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\right) \\ \quad = 1 + t\left(\frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{11}}\right) \end{array} \right\}$ y

$\left\{ \begin{array}{l} \quad = 1 + t\left(-\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{11}}\right) \\ y = 1 + t\left(\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{11}}\right) \\ \quad = 1 + t\left(\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\right) \end{array} \right\}$.

7. $\quad - 2y + \quad - 6 = 0.$

8. $3 \quad + 2y + 6 \quad - 6 = 0.$

9. $2 \quad - 3y - 6 \quad \pm 35 = 0.$

10. $2 \quad + 4y - 3 \quad + 18 = 0.$

7.4

1. $\left(\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, 2, \frac{7}{3}\right).$

3. a) $\left(\frac{3+\sqrt{11}}{2}, \frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)$ y $\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}, \frac{1-\sqrt{11}}{2}\right)$. b) $(\ -2)^2 + y^2 = 6$.
c) $\left\{\begin{matrix} 2 \ -y > 0 \\ \ +2y-5<0 \end{matrix}\right\}$.

10. a) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\ +\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{26}}{2}$. d) $(0, 3)$.

11. $\left\{\begin{matrix} =1-t \\ y=1+t \\ =1-4t \end{matrix}\right\}$.

7.5

1. 8.
2. a) $\ +3y+\ -8=0$. b) $\left\{\begin{matrix} 25 \ -3y-144=0 \\ 8 \ -3 \ -36=0 \end{matrix}\right\}$. c) $- \ +2y-5=0$.

Capítulo 8

8.1

1. a) No. b) No. c) No. d) No. e) Sí.
2. $\|\vec{\ }\| = \sqrt{2(\ _1+\ _2)^2+\ ^2_2}$; $\cos \sphericalangle(\vec{\ }, \vec{y}) = \dfrac{2\ _1y_1+3\ _2y_2+2\ _1y_2+2\ _2y_1}{\sqrt{2(\ _1+\ _2)^2+\ ^2_2}\sqrt{2(y_1+y_2)^2+y_2^2}}$.
3. $\pi/2$.
4. $\arccos(1/\sqrt{n})$.

8.2

1. La matriz del producto escalar es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 14 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{y}_1 = (1, 0, 0), \vec{y}_2 = (0, -2, 0), \vec{y}_3 = (0, 0, 5)$.
4. $\{(1, 2, 1, 3), \left(\frac{10}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right), \left(\frac{-19}{185}, \frac{87}{185}, \frac{61}{185}, \frac{-72}{185}\right)$.
5. a) $\{(1, 1, 1)\}$. b) $\{(2, -1, 0), (-4, 11, -6)\}$.
6. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right.$.
7. $\frac{1}{202}(187, 55, 33, -99)$.
8. $\vec{\ } = -\frac{7}{17}\vec{a} + \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{1}{17}(7, 6, 25, 19, 1)$.
10. a) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$. b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\right.$
$\left.\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$

8.3

1. a) $^{\perp} = L\{(1, 1, -1)\}$. b) $^{\perp} = L\{(1, 1, 1, 1), (3, 0, 1, 1)\}$.

2. a) $(\bar{\ }) = \frac{1}{19}[(2\ _1 + 4\ _2 - \ _3 - 5\ _4)(1, 2, -1, -2) + (-\ _1 - \ _2 + 11\ _3 - 8\ _4)(0, 0, 1, -1)]$.

   b) $_{(3,2)}(\bar{\ }) = \frac{1}{19}(17, -4, 3, 3) + \quad (\bar{\ })$.

4. $\vec{g} = (3, 1, -1, -2) \in L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, $\bar{\ } = (2, 1, -1, 4) \perp L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

5. [Ejercicio 10, sección 8.2: a) $^{\perp} = L\{(1, 1, -1)\}$. b) $^{\perp} = L\{\ ^3, \ ^2, 1\}$.

   c) $^{\perp} = L\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.]

   a) $^{\perp} = \{\ \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0\}$.

   b) $(\ ) = \begin{pmatrix}\ _{11}&0&0\\0&\ _{22}&0\\0&0&\ _{33}\end{pmatrix}$; mín $(\ ,\ ) = \left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{=1}^{3}\ ^2_i - (\ ^2_{11} + \ ^2_{22} + \ ^2_{33})\right]^{1/2}$.

6. $(\bar{\ }) = \frac{1}{11}[(5\ _1 + 5\ _2 - \ _3 + 2\ _4)(1, 1, -1, 0) + (2\ _1 + 2\ _2 + 4\ _3 + 3\ _4)(0, 0, 2, 1)]$.

8. $\bar{\ } = (2, 1, -1)$.

8.4

1. Todas las aplicaciones dadas son autoadjuntas.

2. a) o es autoadjunta, ya que su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

   b) $\acute{\imath}$ es autoadjunta, ya que su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&3\\1&3&1\end{pmatrix}$.

3. a) $= \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$, $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

   b) $= \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

c) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.6

1. a) Ortogonal. b) No es ortogonal.
   c) No (observar que el determinante de la matriz es -2).

2. Base ortonormal $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0) \right\}$.

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

3. $\alpha = \gamma = 2$, $\beta = 1$.

8. b) $+ 2y = 0$. c) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. c) $3 + y = 0$. d) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. a) Sí. b) No. c) Sí.

8.7

2. a) $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. b) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.8

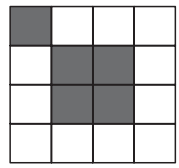
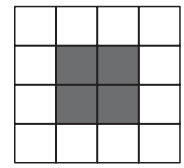
1. a) $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

   b) $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   c) $U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

d) $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \quad .$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ; $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  .

4. $\left\{ \vec{}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}} \right), \vec{}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de Im( );
$\left\{ \vec{}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de Ker(^{t}); Im(^{t}) = $\mathbb{R}^2$.

5. a) $\vec{}_0 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$. b) $\vec{}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

6. $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

7. a) $\vec{}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. b) $\vec{}_0 = \begin{pmatrix} /2 \\ 0 \\ /2 \end{pmatrix}$.

Capítulo 9

1. $\{(_1, _2, _3) \in \mathbb{C}^3 : _3 = i _1\}$.

2. a) No. b) Sí. c) No.

3. b) $= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$. c) $= \begin{pmatrix} \frac{i+\sqrt{-1-12i}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i-\sqrt{-1-12i}}{2} \end{pmatrix}$.

4. tiene en la base $\left\{\vec{}_1=(0,0,1),\ \vec{}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \vec{}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right\}$ la forma diagonal

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

5. $$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\right]\left[\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}\right]$$

(La primera es unitaria y la segunda simétrica conjugada.)

Observación sobre el problema 5

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ con } |a|^2+|b|^2=1 \text{ y } \quad =\begin{pmatrix} r & \\ - & \end{pmatrix} \text{ con } r, \quad \in \mathbb{R}.$$

Escribiendo $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & \\ - & \end{pmatrix}$ e igualando, se obtienen varias ecuaciones, que se van resolviendo hasta obtener el resultado.

6. a) $(\vec{} + i\vec{},\ \vec{} + i\vec{v}) = (\vec{},\ \vec{}) + (\vec{},\ \vec{v}) + i[-(\vec{},\ \vec{v}) + (\vec{},\ \vec{})] = \overline{(\vec{} + i\vec{v},\ \vec{} + i\vec{})}$.
   b) Se deduce de la propiedad distributiva del producto euclídeo.
   c) Se deduce de la propiedad distributiva del producto euclídeo.
   d) $(\vec{} + i\vec{v},\ \vec{} + i\vec{v}) = (\vec{},\ \vec{}) + (\vec{v},\ \vec{v}) + i[-(\vec{},\ \vec{v}) + (\vec{v},\ \vec{})] = \|\vec{}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 > 0$ salvo si $\vec{} = \vec{v} = 0$.

Capítulo 10

10.1

1. a) $_1 + \ _2 + \ _3 = 2$. b) $_1 - \ _2 - \ _3 + \ _4 = 6$.
2. a) $-4/3,\ 5/3)$. b) $'_1 + 2\ '_2 + 1 = 0$.
3. $(\ '_1 - \cos\alpha)^2 + (\ '_2 + \operatorname{sen}\alpha)^2 = 4$; centro $= (\cos\alpha,\ -\operatorname{sen}\alpha)$.
4. $(3,0,0),\ \vec{}_1 = (1,1,0),\ \vec{}_2 = (1,-1,1),\ \vec{}_3 = (0,1,1)$.
5. $\dfrac{(\ '_1 + 2\sqrt{2})^2}{9} + \dfrac{'^2_2}{9/4} = 1$. Circunferencia.
6. b) Es un plano en $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas $_1 + \ _2 + \ _3 = 1,\ \ _4 = 1$. Su dimensión es 2.
7. a) $_1 + \ _2$ tiene dimensión 3. Se tiene que

$$\dim(\ _1 + \ _2) = \dim\ _1 + \dim\ _2 + 1$$

b) $_1 + \ _3$ tiene dimensión 3. Se tiene que

$$\dim(\ _1 + \ _3) = \dim\ _1 + \dim\ _3.$$

8. c) $\pi = \ , y, \ , t) \in \mathbb{R}^4 : y = 1/2, 2\ + 2\ = 1\}$; $\dim(\pi_\lambda + \ ) = 4$.

10.2

1. $\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$.

2. a) $G\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$.

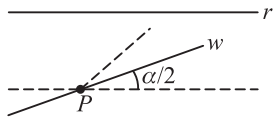
c) $(\ \circ G)\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$,

$(G \circ\ )\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$.

3. Todos los puntos del plano $2\ + y + \ = 2$ son puntos fijos. La aplicación es una simetría con respecto a este plano.

10.4

1. El centro de giro es el punto de intersección de los ejes. El ángulo de giro es el doble del ángulo que forman las rectas.
2. La composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación de vector $2\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector perpendicular a las rectas y $\|\vec{v}\| = \ (r, l)$, siendo r y l los ejes de simetría.
3. El eje de la simetría deslizante es paralelo a la recta $\ $.



5. $_t \circ\ \circ\ _r$ es una simetría con respecto a la recta l, que es bisectriz del ángulo $\measuredangle(\ , t)$ y uno de cuyos lados es r.

10.5

1. a) $' = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\ .$ b) $' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\ .$

c) $' = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\ .$

d) $' = \begin{pmatrix} 12/5 + \sqrt{2}/10 \\ 1/5 - 7\sqrt{2}/10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/10 & 7\sqrt{2}/10 \\ 7\sqrt{2}/10 & \sqrt{2}/10 \end{pmatrix}\ .$

2. a) Giro de ángulo $\pi/3$ y centro $= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$.

   b) Simetría deslizante: Eje $(2 - \sqrt{2})\ _1 - \sqrt{2}\ _2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

   Vector: $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

3. El giro de ángulo $\pi/2$ y centro (1, 1) y la simetría deslizante de eje $_2 = 1/2$ y vector de traslación (1, 0).

4. Traslaciones de vector $\vec{v}$ paralelo al eje de simetría.
   Giros de ángulo π y centro en cualquier punto del eje de simetría.
   Simetrías respecto a rectas perpendiculares al eje.

5. a) Traslaciones; simetrías respecto de rectas con vector director $\vec{}_0$; simetrías deslizantes respecto de rectas con vector director $\vec{}_0$.
   b) Giros de centro $_0$; simetrías respecto de rectas que pasan por $_0$.

10.6

3. La longitud del vector de traslación es el doble de la distancia entre ambos planos.

5. La longitud del vector de traslación es el doble de la distancia entre los centros de simetría.

7. a) El eje de giro es perpendicular al plano determinado por las rectas secantes.

8. La identidad o la simetría con respecto al plano $\pi = \{\ + 2y - 2\ = 1\}$ que es el que contiene a los puntos , y .

9. O bien es una simetría con respecto al plano $\pi = \{\ = y\}$ o bien es un giro de 270º respecto a la recta $r = \{\ = 1, y = 1,\ = t\}$ orientada con el vector (0, 0, 1).

10. b) $\pi = \{\ = y\}$, $\Gamma = \{y = 0\}$ es un ejemplo (pero hay otros muchos).

11. a) Simetría deslizante con plano de simetría π_1 y vector de traslación $\vec{v} = (2, 0, 0)$.
    b) Simetría rotatoria con plano de simetría Γ_1 y giro de 180º respecto a la recta $\gamma = \{\ = t, y = 1,\ = 1\}$.
    c) Traslación de vector $\vec{a} = (-2, -2, 0)$.

12. a) El centro de simetría es el punto de intersección de los tres planos.
    b) Es una simetría rotatoria con plano de simetría π y giro respecto a la recta $\gamma = \{\ = -1 + 2t, y = 1 - t,\ = t\} = \Delta \cap \Gamma$ con ángulo de giro $\alpha = 2 \arccos \frac{7}{\sqrt{55}}$.

10.8 10.9

1. a) $S_\pi\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}\right]$.

   b) $\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}$.

c) $G\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix}$.

d) $^{o}{}_{\pi}\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 15 \\ -17 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix}\right]$.

2. a) Simetría deslizante respecto al plano π: $\quad -\sqrt{2}y - \quad = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, con vector de deslizamiento $\dfrac{1}{4}(3-\sqrt{2}, \sqrt{2}-2, \sqrt{2}+1)$.

b) Movimiento helicoidal: r: $(\ , y, \ ) = \dfrac{1}{3}(1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$; giro $\alpha = 120^{o}$ en el sentido del sacacorchos para que avance en la dirección $(1, 1, -1)$; vector de deslizamiento $\dfrac{1}{3}(2, 2, -2)$.

c) Movimiento helicoidal: r: $\{\ = 1, \ = 1\}$; giro $\alpha = -90^{o}$ (el sentido de giro positivo es el del sacacorchos para que avance en la dirección $(0, 1, 0)$); vector de deslizamiento $(0, 1, 0)$.

d) $_{3}{}^{o}{}_{2}$ es un movimiento helicoidal: r: $\{y = 1/2, \ = 3/2\}$, giro $\alpha = 90^{o}$ en el sentido del sacacorchos para que avance en la dirección de $(1, 0, 0)$; vector de deslizamiento: $(2, 0, 0)$.

$_{2}{}^{o}{}_{3}$ es un movimiento helicoidal: r: $\{\ = 3/2, y = -1/2\}$, giro $\alpha = -90^{o}$ (el sentido de giro positivo es el del sacacorchos para que avance en la dirección de $(0, 0, 1)$); vector de deslizamiento: $(0, 0, -2)$.

3. Todos los movimientos que llevan puntos del plano $\ = 0$ en puntos del mismo plano.

4. $\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix}\right]$.

5. a) $\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix}$; vector de traslación $(3, 3, 0)$.

b) Vector de traslación: $2\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector normal a los planos, que va de uno de los planos al otro.

6. a) $\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \\ \end{pmatrix}$; r: $\left\{\begin{array}{l} \ = 1 \\ \ + y = 3 \end{array}\right\}$.

Giro $\alpha = \arccos(-1/3)$ en el sentido del sacacorchos para que avance en la dirección $(-1, 1, 0)$.

b) El eje es la intersección de los dos planos.

c) El ángulo de giro es el doble del ángulo que forman los planos.

Capítulo 11

11.2 11.3 11.4

1. $\| \overline{\quad_1 \quad} \| = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \| \overline{\quad_1 \ _1} \|$, $\quad =$ centro;

   $\| \overline{\quad_1 \ _2} \| = \dfrac{2}{1-\varepsilon} \| \overline{\quad_1 \ _1} \|$; $\ _2 =$ vértice; $b = \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \| \overline{\quad_1 \ _1} \|$.

2. $\| \overline{\quad_1 \quad} \| = \dfrac{1}{\varepsilon-1} \| \overline{\quad_1 \ _1} \|$, $\quad =$ centro; las asíntotas son las rectas de pendiente $\pm\sqrt{\varepsilon^2-1}$ que pasan por $\quad$.

11.5

2. $y^2 - 6 \ + 2y + 4 = 0$; $y^2 + 2y + 6 \ - 20 = 0$.
3. $3 \ ^2 - 4 \ y - 4 = 0$.
4. $\ ^2 + 9y^2 + 8 \ - 36y + 43 = 0$.
5. $20 \ ^2 - 5y^2 - 10y - 41 = 0$.
6. $64 \ ^2 + 16 \ y + 76y^2 - 393 \ - 87y + 596 = 0$.

11.7 11.8 11.9 11.10

1. Parábola: $\quad = \dfrac{1}{2}(1, 5)$; forma canónica $\ ^2 = \dfrac{\quad}{\sqrt{2}}$; eje: $\quad + y = 3$.
2. Hipérbola: $\quad = \dfrac{1}{6}\ (1, -2)$; forma canónica $\dfrac{12 \ ^2}{5} - \dfrac{18 \ ^2}{5} = 1$; ejes; $y = 2 \ - \dfrac{2}{3}$, $2y + \quad + \dfrac{1}{2} = 0$.
3. Dos rectas paralelas: $\quad - y - 1 = 0, \quad - y + 5 = 0$.
4. Un punto $(-1, 1)$.
5. Elipse: $\quad = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{5 \ ^2}{12} + \dfrac{20 \ ^2}{12} = 1$; $\varepsilon = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$; $\quad = \dfrac{1}{5}(1, 2)$; ejes: $\quad + 2y - 1 = 0, y = 2$.
6. Tipo parabólico: dos rectas coincidentes $(\quad + 2y - 3)^2 = 0$.
7. Hipérbola equilátera: $\quad = (-1, 3)$; $\dfrac{\ ^2}{5} - \dfrac{\ ^2}{5} = 1$.
8. Tipo hiperbólico; dos rectas $\quad - 2y + 3 = 0, \quad + y - 1 = 0$.
9. Hipérbola equilátera: $\dfrac{4 \ ^2}{5} - \dfrac{4 \ ^2}{5} = 1$; asíntotas $\quad - y + \dfrac{1}{2} = 0, \quad + y + \dfrac{1}{2} = 0$.
10. Elipse: $\dfrac{\ ^2}{2} + \dfrac{9 \ ^2}{2} = 1$; $\quad = \dfrac{1}{8}(-3, 1)$; ejes: $y = \quad + \dfrac{1}{2}, y = - \quad - \dfrac{1}{4}$.
11. No tiene soluciones reales.

12. Elipse: $\frac{\quad^2}{8}+\frac{\quad^2}{16}=1$; ejes: $\quad -y=-1, \quad +y=-7; \quad =(-4,\ -3)$;
focos: $(-5+\sqrt{3},\ -4+\sqrt{3})$ y $(-5-\sqrt{3},\ -4-\sqrt{3})$.

13. Parábola: $2\ ^2=\sqrt{2}\ $.

14. a) $y=(-2\pm\sqrt{3})\ $. b) $y+\frac{4}{5}=\frac{11}{2}\left(\ -\frac{3}{5}\right)$; $y+\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\left(\ -\frac{3}{5}\right)$.

15. a) $\ =(0,\ 0)$; eje: $4\ =3y$. b) $\ =\left(\frac{-3}{50},\frac{-2}{25}\right)$; eje: $4\ =3y$.

11.11

1. a) $4\ ^2+9y^2+(12+\ )\ y-(2\ +64)\ -(5\ +96)y+220+10\ =0, \quad \in\mathbb{R}$.
b) $4\ ^2+9y^2-10\ y-20\ +14y=0$, para la que $\Delta=-396\neq 0$, $\delta=11>0$ y $\ =13>0$; luego se trata de una elipse.

2. a) $-\ \ ^2+2y^2+(\ +1)\ y+(3\ -1)\ -(3\ +5)y+3=0, \quad \in\mathbb{R}$.
b) $\ ^2+2y^2-4\ -2y+3=0$; elipse.

3. La elipse $2\ ^2+4y^2-3\ y-2\ -2y=0$.

4. Son dos rectas coincidentes: $(2y-\ )^2=0$ y una parábola: $25\ ^2+4y^2+20\ y-48\ -48y=0$.

5. Las cónicas buscadas son las de ecuación

$$^2+y^2+(\ -2)\ y+(2-\ )\ +(\ -2)y+1-\ =0$$

para $\in(0,\ 4)$.

6. Las cónicas buscadas son las de ecuación

$$-\ ^2+(\ +1)y^2-(\ +2)y+1=0$$

con $\ >-1$.

Capítulo 12

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 3 \\ -3/2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. c) $\begin{array}{l} a_{ii}=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ a_i=(i-\ )^2/2,\ i\neq\ . \end{array}$

4. a) $-\frac{11}{2}\ _1^2+2y_1^2+\ _1^2$. b) $\ _2^2-y_2^2$. c) $\ _1^2-4y_1^2-\ _1^2$.

5. a) $2\ _1^2-3y_1^2$. b) $-6\ _1^2+\sqrt{5}y_1^2-\sqrt{5}\ _1^2$. c) $\ _1^2+\sqrt{3}y_1^2-\sqrt{3}\ _1^2$.
d) $\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2-\frac{1}{2}y_4^2$.

6. a) $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$, $3\ _1^2+6y_1^2+9\ _1^2$.

b) $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,\,-1,\,-1),\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\,2,\,0),\frac{1}{\sqrt{29}}(2,\,-1,\,5)\right\},\ -2\ {}^{2}_{1}+4y_1^2+4\ {}^{2}_{1}.$

c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,1,\,0),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\,-1,\,-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\,-1,\,2)\right\},\ \ {}^{2}_{1}+2y_1^2-\ {}^{2}_{1}.$

7. a) ${}_1-y_1+\ {}_1$; índice de inercia positivo = 2; negativo = 1; signatura = 1.
   b) ${}_1+y_1-\ {}_1$; índice de inercia positivo = 2; negativo = 1; signatura = 1.
   c) ${}^{2}_{1}-y_1^2+\ {}^{2}_{1}$; índice de inercia positivo = 2; negativo = 1; signatura = 1.

$$\left.\begin{array}{l} {}_1 = 2\ \ -y+ \\ y_1 = (y+\ \ )/2 \\ {}_1 = (y-\ \ )/2 \end{array}\right\}$$

8. Ningún valor.
9. $\beta \in (-\infty,\,-1)$.
10. $\{(\ ,y,\ \ ) \in \mathbb{R}^3 : |\ \ | < 1, y \neq 0\}$.
11. a) En $\ \ = -1, y = 0$ hay un mínimo relativo.
    b) En $(2,\,-2)$ y $(-2,\,-2)$ hay máximos relativos.
    c) En $(1,\,-1)$ hay un mínimo relativo.
13. a) $0 < a < \sqrt{2}$. b) Nunca.
14. $(\bar{\ },\bar{\ }) = {}^{2}_{1}+\ {}^{2}_{2}\ ;\quad (\bar{\ },\bar{\ }) = 4\ {}^{2}_{1}-2\ {}^{2}_{2}\ ;\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Capítulo 13

1. a) Elipsoide: ${}^{2}+\ {}^{2}+4\ {}^{2}=1$; centro = (0, 0, 0).
   b) Hiperboloide de dos hojas con eje en la dirección de $\ \ $; centro $= \left(-2,\,-\frac{1}{2},\,1\right)$.
   c) Hiperboloide de una hoja con eje $\ \ ;\ -2\ {}^{2}+\frac{1}{2}\ {}^{2}-\frac{1}{2}\ {}^{2}=-7$; centro $=(-6,\,-1,\,0)$; ejes $\{\ \ =-6,\ \ =0\}$, $\{y=-1,\ \ =\ \ -6\}$, $\{y=-1,\ \ =-\ \ -6\}$.
   d) Paraboloide hiperbólico: $\frac{9}{2}\ {}^{2}-\frac{9}{2}\ {}^{2}\pm\frac{27}{9}\ \ =0.$
4. a) No tiene soluciones reales.
   b) Hiperboloide de una hoja: $-\ {}^{2}+(3+\sqrt{6})\ {}^{2}+(3-\sqrt{6})\ {}^{2}=\frac{1}{3}.$
   c) Hiperboloide de una hoja: $-\ {}^{2}-\sqrt{17}\ {}^{2}+\sqrt{17}\ {}^{2}=-\frac{11}{17}.$
   d) Elipsoide: ${}^{2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\ {}^{2}+\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\ {}^{2}=\frac{1}{2}.$

e) Hiperboloide de una hoja.

f) El punto $(0, 0, -1)$.

g) Paraboloide hiperbólico: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ^2 = -2\ .$

) Un cono.

Soluciones a los ejercicios de repaso de los Capítulos 7 a 13

1. a) $(\ , y) = (3, 1) + t(a, 1),\ t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$. b) $3\ \ - 4y - 5 = 0$.

2. a) $(2, -1, 8)$. b) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{-8}{2}$.

3. $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{-1}{-2}$.

4. $_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right),\ \ _2 = \left(-\frac{7}{9}, \frac{17}{9}, \frac{-2}{9}\right)$. Área $= \frac{5}{54}\sqrt{2}$.

5. $1/\sqrt{138}$.

6. $\left(\frac{15}{25}, \frac{6}{25}, -\frac{8}{25}\right) + t(5, 3, -4)$.

7. $\left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right), \left(-\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{4}{7}\right), \left(-\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right), \left(\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{11}{7}\right)$

   $$\text{Vol} = \frac{1}{49}\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 13 & -11 & -12 \\ -5 & 1 & -18 \end{vmatrix}$$

8. $-4\ \ + y + 3\ \ + 4 = 0$.

9. $(\ , y,\ ) = (0, 2, -2) + t(2, 1, 3)$.

11. $= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ con $= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ con

    $= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

12. $0 \leqslant (\mathcal{A}\bar{\ }, \mathcal{A}\bar{\ }) = -(\bar{\ }, \mathcal{A}\,\mathcal{A}\bar{\ }) = -(\bar{\ }, \mathcal{A}(\lambda\bar{\ })) = -\lambda^2(\bar{\ }, \bar{\ }) \ \Rightarrow\ \ -\lambda\ ^2 \geqslant 0$ (las igualdades anteriores son ciertas si λ es un autovalor real de $\bar{\ } \neq 0$).

13. $\vec{e}_1 = (1, 2, 2, -1),\ \vec{e}_2 = (2, 3, -3, 2),\ \vec{e}_3 = (2, -1, -1, -2)$.

14. $-1/2\sqrt{3}$.

16. $\|\vec{v}\| = \sqrt{3};\ \ _1 - y_1 - \ _1 = 0$.

17. Simetría con respecto a la recta $\ = -y = \ $.

18. $_1 = \{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^3 : \ = y = \ \}$; $_2 = \{(\ , y, \ ) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$.

19. $= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $(\vec{v}) = (2, 0, 0)$.

21. Si es autoadjunta. No es ortogonal.

22. Giro de centro $\frac{1}{10-4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5-\sqrt{5} \\ 5-3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ y ángulo de giro φ con $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\varphi = -1/\sqrt{5}$.

24. $\begin{pmatrix} ' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}$.

26. a) $\begin{pmatrix} ' \\ y' \\ ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix}$. b) Simetría deslizante.

27. a) Para todo $\lambda > 2$. b) Para ningún λ.

28. Forma canónica $4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$ en la base $\left\{ \vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2),\ \vec{}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1),\right.$
$\left. \vec{}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \right\}$.

29. Parábola; forma canónica $25\ ^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{875}\ $.

30. Centro $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; eje principal $4\ = 3y$.

32. $2\ ^2 + \ ^2 - \ ^2$; $\begin{pmatrix} \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

33. $a = b - 2$, $a > -2$.

34. Hiperboloide de dos hojas; $25\ ^2 - 5\ ^2 - 5\ ^2 = 1$.

37. a) $\ ^2 + y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\ ^2 - 2a\alpha\ = a^2$.

39. a) $2a_{11}\ + a_{12}y + a_1 = 0$.
c) 1. $3\ - y + 1 = 0$. 2. $\ - y + 2 = 0$.

40. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

42. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: giro de 90º alrededor del punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: simetría deslizante respecto a la recta $x - y = 1/2$, con vector de traslación $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

44. $(\vec{\ }_3) = -\vec{\ }_2/2$.

45. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

46. a) $x_1 = (2, 1, 3)$, $x_2 = (-2, 1, -1)$. b) $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$.

47. a) $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$. b) $(1, 1, 0)$.

48. a) $x = (0, 1, 1)$. b) $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right)$ y $x' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$.

49. $(0, -1, -1) + t(1, 2, 4)$; $\left.\begin{matrix} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{matrix}\right\}$.

50. $3x - 4y = 10$ ó $3x - 4y = -10$.

51. a) No es definida. b) Definida positiva. c) Semidefinida positiva.

52. Simetría deslizante; plano de simetría $x - y = 1$; vector de traslación $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

53. Hipérbola: $\dfrac{x^2}{\left(\frac{11}{375}\right)} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{11}{1125}\right)} = 1$; eje focal $2x - y = 1/15$.

54. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio; esto es, $\left.\begin{matrix} x' = 2x + y \\ y' = x - y \end{matrix}\right\}$; $\lambda = -1$, $\mu = 2$.

Referencias

1. Aroca, J. M., Fernández-Bermejo, M. J., *Álgebra lineal y Geometría*. Ed. Universidad de Valladolid, (1998).
2. Atkinson, K. E., Han, W., *lementary meri al naly i* , 3.ª ed., John Wiley and Sons (2003).
3. Coxeter, H. S. M., Greitzer, S.L., *Geometry revi ite* , MAA, 1967.
4. Dorronsoro, J., Hernández, E., *mero* , *gr o y anillo* , Addison-Wesley/UAM (1996).
5. Guzmán, M. de, *irar y ver*, Nivola, 2004.
6. Guzmán, M. de, *ento on enta* , Nivola, 2008.
7. Kurosch, A. G., *r o e lgebra erior*, Mir (1977).
8. Martin, G. E., *ran ormation Geometry*. *n intro tion to ymmetry*, Springer-Verlag (1992).
9. Martínez Fernández de las Heras, J. J., *La e om o i i n en valore ing lare* ( ) *y alg na e a li a ione* , La Gaceta de la RSME, vol. 8.3 (2005), págs. 795-810.
10. Melzak, Z. A., *nvitation to geometry*, John Wiley & Sons (1983).
11. Nicholson, W. K., *Álgebra lineal on a li a ione* , McGraw-Hill (2003).
12. Puig Adam, P., *r o e geometría m tri a* (1956).

Índice alfabético

Abscisa de un punto, 293
Abel, N. H., 137
Afinidad, 437
Alturas de un triángulo, 337
Ángulo
  que forma un vector con un subespacio vectorial, 370
  que forman dos planos, 326
  que forman dos vectores, 316
Aplicación, 25
  biyectiva, 26
  derivación, 185
  identidad, 40
  invertible, 41
  inyectiva, 26
  suprayectiva, 26
Aplicación lineal, 28, 178
  adjunta
    en un espacio euclídeo, 377
    en un espacio hermítico, 420
  asociada a una matriz, 28, 179
  asociada a una transformación afín, 437
  autoadjunta
    en un espacio euclídeo, 379
    en un espacio hermítico, 421
  biyectiva, 195
  cambio de base, 189
  caracterización, 31
  composición, 189
  diagonalizable, 212
  identidad, 185
  imagen, 197
  invertible, 41
  inyectiva, 195
  nilcíclica, 265
  nilpotente, 265
  normal, 422
  núcleo, 180, 195
  nula, 185
  ortogonal, 383
  rango, 47, 195, 199
  restricción a un subespacio , 194
  suma, 32
  suprayectiva, 195
  unitaria, 421
Apolonio de Perga, 511, 562
Argumento de un número complejo, 127
Asíntotas, 516
Autoespacio máximo, 263, 266
Autovalor, 212
Autovector, 212

Baricentro, 331
Base, 148, 151
  canónica, 151
  de Jordan, 229, 254
  de un espacio vectorial, 148, 151
  dual, 204
  ortogonal, 361

ortonormal,
en un espacio euclídeo, 361,
en un espacio hermítico, 419
negativamente orientada, 395
positivamente orientada, 395
Bisectrices
de dos rectas dadas, 324
Bisectriz de un ángulo, 337
Bola unidad, 357
Brianchon, Ch., J., 534

Cambio
de base, 156
de sistema de referencia, 434
ecuación matricial, 158
para aplicaciones lineales, 189
para una forma bilineal, 567
Cayley, A., 238, 590
Centro
de gravedad, 331
de una circunferencia, 332, 512
de una esfera, 335
de una homotecia, 438
de una superficie, 593
Cicloide, 334
Circuncentro, 337
Circunferencia, 332, 510
centro, 332, 512
radio, 332, 512
Cilindro
elíptico, 599
hiperbólico, 599
Clase de equivalencia, 170
Coeficientes de Fourier de una función, 373
Cofactor, 89
Columnas básicas de una matriz, 96
Combinación lineal, 15, 148
Complemento ortogonal
en un espacio euclídeo, 366, 367
en un espacio hermítico, 419
Componentes
de un punto en el espacio, 303
de un punto en el plano, 293
de un vector, 13, 152, 372
Composición
de aplicaciones, 27
lineales, 189
Cónica, 510
de tipo elíptico, 536
hiperbólico, 537
parabólico, 538
degenerada, 511
directriz, 518
excentricidad, 518
foco, 518
forma canónica, 528
Conjugado de un número complejo, 124, 416
Conjunto cociente, 170
Cono recto (doble), 510
eje, 510
generatriz, 510
vértice, 510
Coordenadas
cartesianas
de un punto en el espacio, 303
de un punto en el plano, 293
de un punto, 432
de un vector, 152
Cramer
regla de, 53, 89, 92
Criterio de Sylvester, 578, 581
para formas cuadráticas
definidas negativas, 581
definidas positivas, 578
Cuerpo, 125, 144
Cuádrica, 592, 606
Curva
de segundo grado, 545
invariantes, 545

Delta de Kronecker, 187
Descartes, R., 292, 563
Descomposición
en valores singulares , 402, 403
LU de una matriz, 106, 107
polar de una aplicación, 425
Desigualdad
de Bessel, 360
de Schwarz
en un espacio euclídeo, 357
en un espacio hermítico, 418
triangular, 316
en un espacio afín euclídeo, 441
en un espacio hermítico, 419
en un espacio vectorial euclídeo, 359
Desviación cuadrática media de una función, 374
Determinante
de un producto de matrices, 78
de una matriz de orden 2, 52, 53
de una matriz de orden 3, 56
de una matriz de orden n, 60
de Vandermonde, 84
desarrollo por la i-ésima fila, 73
desarrollo por la j-ésima columna, 74
propiedades, 62, 63, 65, 66, 67

Diagonalización simultánea de formas cuadráticas, 582
Dimensión
  de un espacio afín, 431
    euclídeo, 442
  de un espacio vectorial, 148, 153
  de una variedad lineal, 431
Distancia
  de un punto a una recta o a un plano, 323, 324
  en un espacio afín euclídeo, 441
  entre dos puntos, 315
Dualidad
  principio de, 534

Ecuación
  general de una cónica, 534
  general de una recta en un plano, 297
  implícita de un plano, 308
  implícita de una recta en un plano, 297
  matricial de una transformación afín, 439
Ecuaciones
  cartesianas de un plano, 308
  cartesianas de una circunferencia, 332
  cartesianas de una elipse, 332
  cartesianas de una recta en el espacio, 306
  cartesianas de una recta en un plano, 297
  implícitas de una variedad lineal, 433
  paramétricas de un plano, 308
  paramétricas de una cicloide, 334
  paramétricas de una circunferencia, 332
  paramétricas de una elipse, 332
  paramétricas de una esfera, 335
  paramétricas de una recta, 295, 304
Eje
  de abscisas, 293
  de giro, 387
  de ordenadas, 293
Elipse, 332, 511, 513, 518
  centro, 514
  distancia focal, 514
  eje principal, 514
  eje secundario, 514
  excentricidad, 514
  focos, 513
  semieje principal, 514
  semieje secundario, 514
Elipsoide, 594
Epimorfismo, 195
Escalar, 145
Esfera, 335
  unidad, 357
Espacio
  afín, 430,431
    dimensión, 431
    euclídeo, 430, 441
  dual de un espacio vectorial, 204, 376
  euclídeo, 354
  hermítico, 416, 417
  vectorial, 144
    base, 148, 151
    cociente, 169, 171
    dimensión, 148, 153
    isomorfo, 200
Estructura de las soluciones de un sistema, 13, 23
Euclides, 292, 414, 511

Factorización
  LU, 106
  PLU, 111
Fibonacci
  sucesión de, 88
Filas básicas de una matriz, 96
Forma bilineal, 566
  antisimétrica, 568
  cambio de base, 567
  matriz , 567
  rango, 568
  simétrica, 568
Forma canónica
  de una cónica, 528
  de una forma cuadrática, 571, 572, 574
  de una superficie de grado dos con centro, 593
Forma cuadrática, 566, 569
  definida negativa, 577
  definida positiva, 577
  forma canónica, 571, 572, 574
  forma normal, 576
  índice de inercia
    negativo, 575
    positivo, 575
  ley de inercia, 574
  matriz, 570
  semidefinida negativa, 577
  semidefinida positiva, 577
  signatura, 575
Forma de Jordan, 223
  de matrices de orden 2, 222
  real, 275
Forma normal
  de una forma cuadrática, 576
Formas cuadráticas
  diagonalización simultánea, 582
Fórmula
  de De Moivre, 132
  de Euler, 131
  de Grassmann, 165

Gauss, C. F., 48, 125, 136
Giro
  en el espacio, 387, 469, 479, 480, 499
  en un plano, 384, 444, 454, 461
Grassmann,
  fórmula de, 165
Grupo, 389, 421
  ortogonal, 389
  unitario, 421

Hamilton, W., 238
Haz
  de cónicas, 556
  de rectas, 302
Hermite, Ch., 427
Hipérbola, 513, 518
  asíntotas, 516
  centro, 516
  eje principal, 515
  eje secundario, 515
  excentricidad, 516
  focos, 515
  vértices, 516
Hiperboloide
  de una hoja, 595
  de dos hojas, 595
Hiperplano de un espacio afín, 431
Homotecia, 438

Identidad
  de Bezout, 241
  de Parseval, 360
Índice de inercia
  negativo, 575
  positivo, 575
Imagen
  de una aplicación, 26
    lineal, 197
Incentro, 337
Intersección de subespacios vectoriales, 165, 167
Invariante
  de una cuádrica, 604
  de una curva de segundo grado, 545
Inversa
  de una aplicación, 39
  de una matriz, 39, 42, 89
Involución, 398
Isometría, 399, 443
Isomorfismo, 195

Jordan, C., 209, 283

-plano, 431

Legendre, polinomios de, 366
Leibniz, G. W., 534
Ley de inercia de una forma cuadrática, 574
Ley del paralelogramo, 360
Lemniscata de Bernouilli, 333
Longitud de un vector
  en un espacio euclídeo, 315, 356
  en un espacio hermítico, 418

Matrices equivalentes, 222
Matriz
  adjunta, 55
  ampliada de un sistema, 5, 8
  antisimétrica, 78
  conjugada, 418
    traspuesta, 420
  cuadrada, 42
  de cambio de base, 157
  de intercambio, 111
  de Jordan, 209, 226, 253
    real, 228, 229, 275, 279
  de los coeficientes de un sistema, 5, 8
  de un producto escalar, 356
  de un producto hermítico, 417
  de una aplicación lineal, 182, 183
  de una forma bilineal, 567
  de una forma cuadrática, 570
  diagonalizable, 212
  elemental, 80
    de Jordan, 253
    de Jordan real, 279
  escalonada reducida, 6
  hermítica, 418, 421
  hessiana, 577
  inversa, 39, 42, 89
  no singular, 91
  ortogonal, 389
  pseudoinversa, 409
  raíz cuadrada, 401
  rango, 13, 16, 96
  simétrica conjugada, 418, 421
  singular, 91
  traspuesta, 73

traza, 161, 168, 193, 264
triangular superior, 67, 106
triangular inferior, 68, 106
unitaria, 421
Máximo relativo, 576, 577
Medianas de un triángulo, 331
Mediatrices de un triángulo, 337
Mediatriz de un segmento, 337
Menaechmus de Grecia, 511
Menor
básico de una matriz, 96,
de orden de una matriz, 96
de un elemento en una matriz, 55, 60
Método
de eliminación de Gauss, 109
de eliminación de Gauss-Jordan, 3, 5, 6, 11
de inducción, 61
Mínimo relativo, 576, 577
Módulo
de un número complejo, 127
de un vector, 315
Monomorfismo, 195
Movimiento, 443
directo, 446
helicoidal, 445, 479, 480, 500
inverso, 446
punto fijo, 446
Movimientos, 496
clasificación en el espacio, 483
descripción en el plano, 452
Multiplicación
de matrices por un número real, 34
de un vector por un número real, 14
de una aplicación lineal por un número real, 34, 187
Multiplicidad de una raíz, 136

Norma de un vector, 315
en un espacio euclídeo, 356
en un espacio hermítico, 418
Normalización de un vector, 357, 418
Núcleo de una aplicación lineal, 180, 195
Número complejo, 122
argumento, 127
cociente, 123, 129
conjugado, 124, 416
forma polar, 127, 131,
forma trigonómetrica, 127
fórmula de De Moivre, 132
fórmula de Euler, 131
módulo, 127
parte imaginaria, 122, 416
parte real, 122, 416
producto, 123, 128
raíz, 131
suma, 122, 126

Operaciones
con aplicaciones lineales, 182
con matrices, 25
elementales, 4
Opuesto de un vector, 14, 144
Orden de nilpotencia, 265
Ordenada de un punto, 293
Orientación en una recta, 469
Origen de coordenadas, 293
Ortocentro, 338
Ortogonalidad
en un espacio euclídeo, 358
en un espacio hermítico, 419
Ortogonalización
de Gram-Schmidt, 361
en un espacio hermítico, 419

Pappus de Alejandría, 563
Parábola, 518
directriz, 518
eje principal, 519
eje secundario, 519
foco, 518
vértice, 519
Paraboloide
elíptico, 598
hiperbólico, 598
Pascal, B., 533, 563
recta de, 533
teorema de, 533
Permutación, 114
impar, 115
inversión, 115
par, 115
signatura, 115
Pitágoras
teorema de, 359, 419, 442
Plano afín, 431
Polarización, 360
Polinomio
característico, 215, 238
de Legendre, 366
mínimo, 240
Potencia de un punto respecto de una circunferencia, 524
Principio de dualidad, 534
Problema de mínimos cuadrados, 409

Producto
de matrices, 36
escalar, 317, 354
hermítico, 416
mixto, 345
vectorial, 342
Proyección
de un punto, 321
ortogonal de un vector, 185, 369
Pseudoinversa de una matriz, 409
Punto(s)
afínmente independientes, 476
crítico, 576
de silla, 576, 578
de un espacio afín, 431
en posición general, 467
fijo de un movimiento, 446, 496

Radio
de una circunferencia, 332
de una esfera, 335
Raíces *n*-ésimas de la unidad, 134
Raíz de un número complejo, 131
Rango
de un conjunto de vectores, 16
de una aplicación lineal, 47, 195, 199
de una forma bilineal, 568
de una matriz, 13, 16, 96
Razón
de un punto con respecto a otros dos puntos, 329
de una homotecia, 438
Recta
afín, 431
diametral de una cónica, 639
Reflexión, 444, 466, 482
Regla
de Cramer, 53, 89, 92
de los signos de Descartes, 626
de Ruffini, 136
Relación de equivalencia, 169
Representante de una clase de equivalencia, 170
Rodrigues, O., 366
Rotación
alrededor del origen, 391
en el espacio, 387, 469, 479, 480, 499
en el plano, 184, 444, 454, 461
Rouché-Frobenius
teorema de, 9, 20
Ruffini
regla de, 136

Sección cónica, 510
Semiejes de una superficie, 593
Sentido de giro, 469
Signatura
de una forma cuadrática, 575
de una permutación, 115
Simetría
axial, 392, 472
central, 473, 483
con respecto a un plano,184, 445
con respecto a una recta en el espacio, 387, 480
con respecto a una recta en un plano, 385, 444, 455, 461
deslizante, 450, 451, 457, 460, 463, 473, 480, 483, 499
rotatoria, 473, 482
Sistema
compatible determinado, 8
compatible indeterminado, 8
de ecuaciones lineales, 7
de generadores, 148
de referencia
afín, 432
ortonormal, 442
homogéneo, 10
incompatible, 8
no homogéneo, 10
solución general, 24
solución particular, 24
Solución
general de un sistema, 24
particular de un sistema, 24
Steinitz
teorema de, 172
Sucesión de Fibonacci, 88
Subespacio vectorial, 162
generado por un conjunto de vectores, 163
impropio, 162
invariante, 209, 248
propio correspondiente a un autovalor, 219
propio, 162
suma directa, 166, 167
Subespacios
complementarios, 173
ortogonales, 366
Subvariedad lineal
invariante, 462, 501
Suma
de aplicaciones lineales, 32, 34, 187
de matrices, 33
de subespacios vectoriales, 165, 167

de vectores, 14
directa de subespacios vectoriales, 166, 167
Superficie
cónica, 606
degenerada, 517
de segundo grado, 592
reglada, 624
Sylvester, J., 590
criterio de, 578, 581

Teorema
de Cayley-Hamilton, 231, 239
de diagonalización, 245
de Jordan, 254
para matrices de orden 2, 226,
para matrices reales de orden 2, 229
real, 280
de Pascal, 533
de Pitágoras
en un espacio afín, 442
en un espacio euclídeo, 359, 361
en un espacio hermítico, 419
de representación de Riesz, 376
de Rouché- Frobenius, 9, 20
de Steinitz, 172
del menor básico, 98
espectral
en espacios euclídeos, 397
en espacios hermíticos, 423
fundamental del álgebra, 135
Transformación afín, 437
Traslación, 438, 444, 453, 460, 479
Traza de una matriz, 161, 168, 193, 264

Valor propio, 212
Valores singulares de una matriz, 402
Vandermonde
determinante, 84
Variedad lineal, 431
engendrada por un conjunto de puntos, 436
invariante, 462, 501
suma, 436
Variedades lineales ortogonales, 442
Vector, 13, 145
característico de una recta en un plano, 318
componentes, 13, 152, 372
opuesto, 14, 144
ortogonal a un subespacio vectorial, 361
propio, 212
unitario, 321, 357, 418
Vectores, 13, 145
combinación lineal, 15, 148
linealmente dependientes, 15, 148
linealmente independientes, 15, 148
ortogonales, 358
positivamente orientados, 351
suma, 14
Vértice
de un paraboloide, 600

Tablas

Movimientos en el plano

T	$r(I - T)$	$r(I - T \mid A)$	**Movimiento** $P' = A + T(P)$
I $\lvert T\rvert > 0$	0	0 1	*Identidad* *Traslación*
Simetría respecto a una recta: $\lvert T\rvert < 0$	1	1 2	*Simetría* respecto de la recta de puntos fijos. *Simetría deslizante*: composición de simetría y traslación paralela al eje de simetría.
Giro o rotación: $\lvert T\rvert > 0$	2	2	*Giro* en torno al punto fijo.

i ra 10.32

Movimientos en el espacio

T	$r(I - T)$	$r(I - T \mid A)$	**Movimiento** $P' = A + T(P)$
I $\lvert T\rvert = 1$	0	0 1	*Identidad* *Traslación*
Simetría respecto a un plano: $\lvert T\rvert = -1$	1	1 2	*Simetría* respecto a un plano de puntos fijos. *Simetría deslizante*: composición de simetría y traslación paralela al plano de simetría.
Giro o rotación: $\lvert T\rvert = 1$	2	2 3	*Giro* en torno a un eje de puntos fijos. *Movimiento helicoidal*: composición de giro y traslación paralela al eje de giro.
Simetría $\circ$ Giro: $\lvert T\rvert = -1$	3	3	*Simetría rotatoria*: composición de un giro y una simetría; el eje de giro y el plano de simetría son perpendiculares.

i ra 10.55

Obtención de la forma de Jordan compleja de una matriz

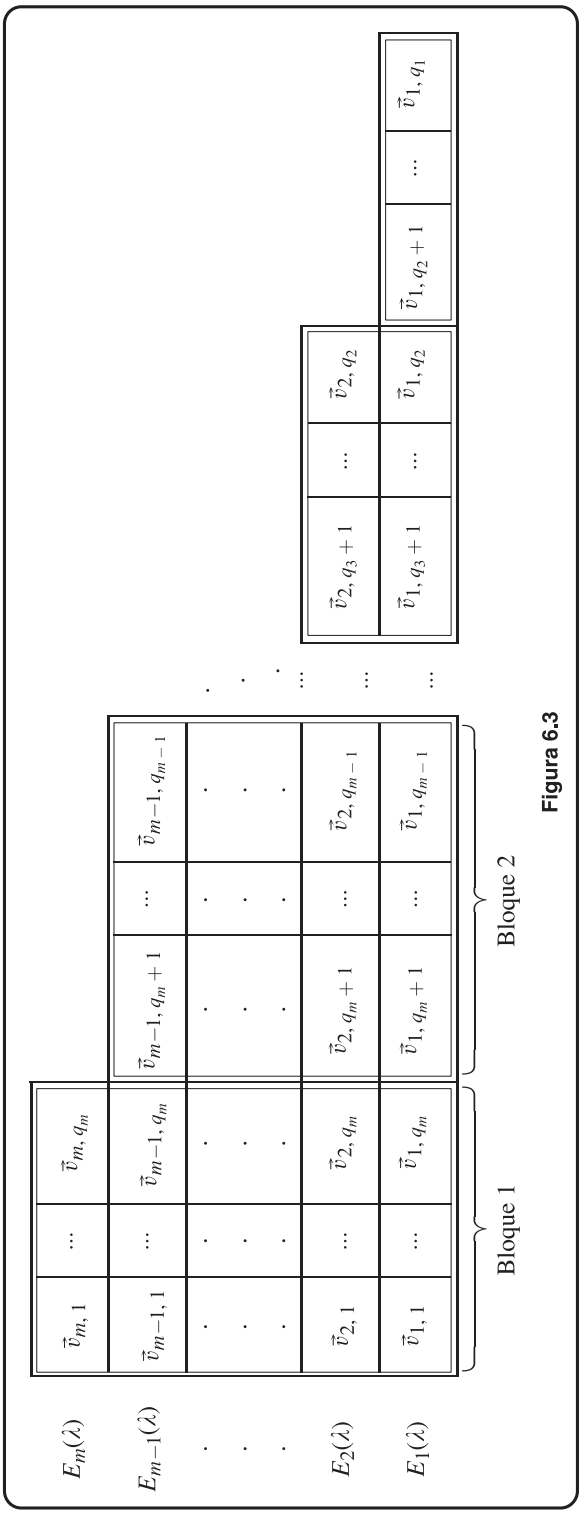


Figura 6.3

1) Dada una aplicación lineal se comienza calculando los autovalores; sean estos $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$, con multiplicidades $_1, ..., _r$, respectivamente, con $_1 + \cdots + _r = n$ (n = dimensión del espacio vectorial en el que está definida).
2) Para cada autovalor λ se calcula la cadena de subespacios

$$_1(\lambda) \subsetneq _2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq _m(\lambda) = _{m+1}(\lambda) = \cdots$$

donde $(\lambda) = \mathrm{Ker}(- \lambda)$, $= 1, 2, ...$ La secuencia anterior se estabiliza después de un cierto número de pasos m (el subespacio $_m(\lambda)$ se denomina *a toe a io m i mo* asociado a λ). El valor de m puede obtenerse sabiendo que dim $_m(\lambda)$ = multiplicidad de λ en ( ).

Nota. Es conveniente ahora observar la figura 6.3.

3) Elegir $\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m,\ _m}$ en $_m(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m,1} + _{m-1}(\lambda), ..., \vec{v}_{m,\ _m} + _{m-1}(\lambda)\}$$

sea una base de $_m(\lambda)/\ _{m-1}(\lambda)$ ($_m = \dim\ _m(\lambda) - \dim\ _{m-1}(\lambda)$). Estos vectores forman la primera fila de la tabla de la figura 6.3.
4) Hallar

$$\vec{v}_{m-1,1} = (- \lambda)\vec{v}_{m,1}, ..., \vec{v}_{m-1,\ _m} = (- \lambda)\vec{v}_{m,\ _m}$$

que son los $_m$ primeros vectores de la segunda fila de la tabla de la figura 6.3. Completar esta fila de la tabla con vectores $\vec{v}_{m-1,\ _m+1}, ..., \vec{v}_{m-1,\ _{m-1}}$ en $_{m-1}(\lambda)$ tales que

$$\{\vec{v}_{m-1,\ } + _{m-2}(\lambda)\}_{=1}^{_{m-1}}$$

sea una base de $_{m-1}(\lambda)/\ _{m-2}(\lambda)$ ($_{m-1} = \dim\ _{m-1}(\lambda) - \dim\ _{m-2}(\lambda)$).
5) Continuar el proceso anterior hasta obtener los elementos $\vec{v}_{1,1}, ..., \vec{v}_{1,\ _m}, \vec{v}_{1,\ _m+1}, ..., \vec{v}_{1,\ _{m-1}}, ..., \vec{v}_{1,\ _3+1}, ..., \vec{v}_{1,\ _2}$ de $_1(\lambda)$ que estan en la última fila. Si fuera necesario estos elementos se completan con los vectores $\vec{v}_{1,\ _2+1}, ..., \vec{v}_{1,\ _1}$ de manera que todos ellos sean una base de $_1(\lambda)$.
6) Escribir la base $_\lambda$ en el siguiente orden: por columnas de izquierda a derecha y en cada columna de abajo hacia arriba (ver figura 6.3). La matriz de $|_{_m(\lambda)}$ en la base $_\lambda$ estará formada por matrices elementales de Jordan de la forma (λ) descritas al comienzo de la sección 6.7.
7) Repetir los pasos 2) a 6) para cada autovalor λ_i, $i = 1, ..., r$; por el Corolario 6.7.7, $= _{\lambda_1} \cup \cdots \cup _{\lambda_r}$ es la base de Jordan de y en esta base la matriz de es su forma de Jordan .

i ra 6.4

Clasificación de las curvas de segundo grado

RESUMEN

CURVAS DE SEGUNDO GRADO O CÓNICAS

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

INVARIANTES

$$s = a_{11} + a_{12},\ \delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_2/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a \end{vmatrix}$$

AUTOVALORES

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 - s\lambda + \delta \quad , \quad s = \lambda_1 + \lambda_2,\ \delta = \lambda_1\lambda_2 .$$

CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS SEGÚN SUS INVARIANTES

$\Delta \neq 0$	$\delta \neq 0$	$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$	$\delta > 0$ $\Delta \cdot s < 0$	Elipse
			$\delta < 0$	Hipérbola
	$\delta = 0$	$\lambda_2Y^2 = \pm\sqrt{\dfrac{-4\Delta}{s}}\,X$	Parábola	
$\Delta = 0$	$\delta \neq 0$	$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 = 0$	$\delta > 0$	Un punto
			$\delta < 0$	Par de rectas secantes
	$\delta = 0$	$\lambda_2Y^2 + c = 0$	Rectas paralelas o coincidentes (si hay soluciones reales)	

Clasificación de las superficies de segundo grado

RESUMEN

SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO O CUÁDRICAS

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{pmatrix}.$$

INVARIANTES

$$\Delta = |\overline{A}| \quad , \quad \delta = |A| \quad , \quad s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 \\ a_{13}/2 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix}, \; s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Si

$$\Delta = \delta = 0 \quad , \quad s_3 = |\overline{A}_{11}| + |\overline{A}_{22}| + |\overline{A}_{33}|$$

donde $\overline{A}_{ii}$ es la adjunta del elemento (i, i) de la matriz $\overline{A}$.

AUTOVALORES

Los autovalores λ_1, λ_2, λ_3 de A son las raíces de

$$p_A(x) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + s_1\lambda^2 - s_2\lambda + \delta.$$

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad , \quad s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \quad , \quad \delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

SIGNATURA

$$\text{Signatura}(A) = |2\ \text{Var}(p_A(x)) - 3|$$

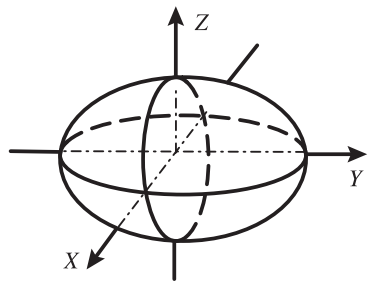
$$\text{Var}(p_A(x)) = \text{Var}(-1,\ s_1,\ -s_2,\ \delta)$$

Figura 13.19

CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS SEGÚN SUS INVARIANTES

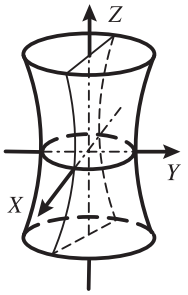
<table>
<tr><td rowspan="6">$\Delta \neq 0$</td><td rowspan="4">$\delta \neq 0$
Cuádricas con centro</td><td rowspan="4">$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$</td><td colspan="2">$\Delta > 0$
SIGNATURA $= 3$</td><td>No hay soluciones reales</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta < 0$
SIGNATURA $= 3$</td><td>Elipsoide</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta > 0$
SIGNATURA $= 1$</td><td>Hiperboloide de una hoja</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta < 0$
SIGNATURA $= 1$</td><td>Hiperboloide de dos hojas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta = 0$</td><td rowspan="2">$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm \sqrt{\dfrac{-4\Delta}{s_2}}\, Z = 0$</td><td colspan="2">$s_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$</td><td>Paraboloide elíptico</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$</td><td>Paraboloide hiperbólico</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\Delta = 0$</td><td rowspan="2">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="2">$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 0$</td><td colspan="2">SIGNATURA $= 3$</td><td>Un punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">SIGNATURA $= 1$</td><td>Un cono</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\delta = 0$</td><td rowspan="2">$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \dfrac{s_3}{s_2} = 0$</td><td rowspan="2">$s_3 \neq 0$</td><td>$s_2 > 0$</td><td>Cilindro elíptico ($s_3 \cdot s_1 < 0$)</td></tr>
<tr><td>$s_2 < 0$</td><td>Cilindro hiperbólico</td></tr>
<tr><td>$\lambda_1 X^2 = \pm \sqrt{\dfrac{-4s_3}{s_1}}\, Y$</td><td>$s_2 = 0$</td><td>Cilindro parabólico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$</td><td rowspan="3">$s_3 = 0$</td><td>$s_2 > 0$</td><td>Recta</td></tr>
<tr><td>$s_2 < 0$</td><td>Par de planos secantes</td></tr>
<tr><td>$\lambda_1 X^2 = b$</td><td>$s_2 = 0$
$s_1 \neq 0$</td><td>Dos planos paralelos o coincidentes</td></tr>
</table>

$\Delta \neq 0, \delta \neq 0$



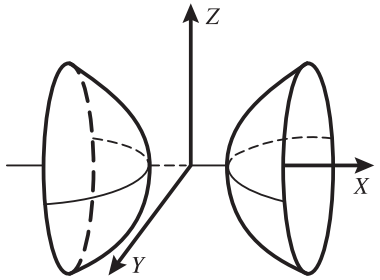
Elipsoide

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide de una hoja

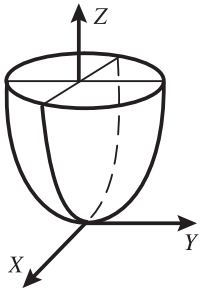
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide de dos hojas

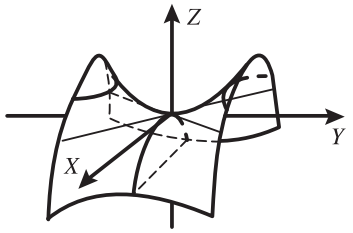
$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

$\Delta \neq 0, \delta = 0$



Paraboloide elíptico

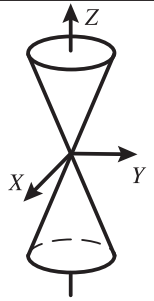
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z$$



Paraboloide hiperbólico

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

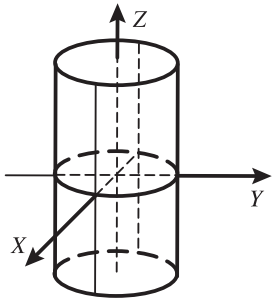
$\Delta = 0, \delta \neq 0$



Cono

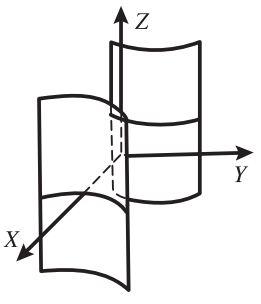
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z^2$$

$\Delta = 0, \delta = 0$



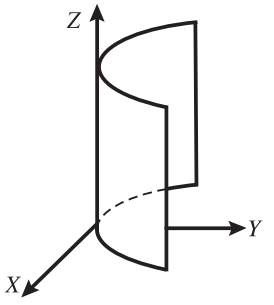
Cilindro elíptico

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$



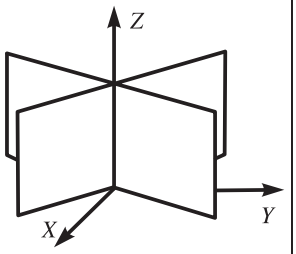
Cilindro hiperbólico

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro parabólico

$$Y = aX^2$$



Dos planos secantes

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

i ra 13.21

Este libro es fruto de la experiencia acumulada en la enseñanza de asignaturas de *Álgebra lineal y Geometría* durante varios años en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Madrid. En él se pretende que el estudiante infiera los resultados generales a partir de ejemplos y que estos sirvan a la vez para ilustrar la demostración de aquellos.

Esta obra cubre todos los temas de un primer curso de enseñanza universitaria en Álgebra lineal y Geometría, tanto en las facultades de Ciencias como en las escuelas de Ingeniería. La resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los espacios vectoriales, los espacios euclídeos y las formas bilineales son algunos de los temas tratados. En todos los capítulos se proponen abundantes problemas cuyos resultados se indican al final del libro.

Eugenio Hernández se doctoró en Matemáticas en Washington University (St. Louis, MO., E.U.A.) en 1981 y es profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid desde 1982.

María Jesús Vázquez Gallo es Doctora en Ciencias Matemáticas por la Universidad Autónoma de Madrid en 1997 y es profesora en la Universidad Politécnica de Madrid desde 2003.

María Ángeles Zurro Moro es Doctora en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Valladolid en 1994 y es profesora de la Universidad Autónoma de Madrid desde 1995.

PEARSON

www.pearson.es

7 - 4-7 2 -12 -

7 47 2 12